UNIVERSITÉ PARIS.DIDEROT (Paris 7)

École doctorale de physique de la région parisienne

Laboratoire AstroParticules et Cosmologie

THÈSE DE DOCTORAT

Spécialité : **PHYSIQUE THÉORIQUE**

présentée par

Sébastien RENAUX-PETEL

Sujet :

Inflation cosmologique et théorie des cordes : aspects multichamps et non-gaussianités primordiales

Thèse dirigée par M. David LANGLOIS

Soutenue le 24 juin 2010 devant la commission d'examen :

M. Constantin Bachas	Examinateur
M. Francis Bernardeau	Rapporteur
M. Pierre Binétruy	Examinateur
M. David Langlois	Directeur de thèse
M. George Smoot	Examinateur
M. David Wands	Rapporteur

Résumé

La description de l'inflation cosmologique dans le cadre de la physique des hautes énergies motive la construction de scénarios faisant intervenir plusieurs champs scalaires ou/et des actions de type non-standard. Ces scénarios génèrent des fluctuations primordiales dont les déviations à la gaussianité peuvent maintenant être sondées avec une précision intéressante et nous étudions dans cette thèse les signatures observationnelles correspondantes.

Nous exposons tout d'abord la théorie relativiste des perturbations cosmologiques ainsi que le mécanisme de genèse de celles-ci pendant l'inflation. Nous dressons ensuite un panorama des différents types de modèles générant d'importantes non-gaussianités primordiales ainsi que des méthodes permettant la détermination de ces-dernières. Nous présentons à cet égard plusieurs applications d'un formalisme dit covariant. Nous traitons ensuite d'un scénario inflationnaire inspiré par la théorie des cordes appelé l'inflation Dirac-Born-Infeld, et notamment de ses aspects multichamps. Nous décrivons enfin les moyens mis en oeuvre pour détecter les effets des non-gaussianités primordiales sur les observables cosmologiques.

Mots Clés : Cosmologie, Inflation, Multichamp, Perturbations, Non-gaussianités, Théorie des cordes, Dirac-Born-Infeld.

Abstract

Cosmological inflation and string theory: multifield aspects and primordial non-Gaussianities

The embedding of cosmological inflation in high-energy physics motivates the construction of scenarios involving several scalar fields or/and non-standard actions. These scenarios generate primordial fluctuations whose deviations from Gaussianity can now be probed with an interesting accuracy and we study in this thesis the corresponding observational signatures.

We first expose the relativistic theory of cosmological perturbations and the mechanism by which they are created during inflation. We then present a review of the different types of models that generate large primordial non-Gaussianities as well as of the methods to determine the latter. We present in particular several applications from a formalism known as covariant. We then deal with an inflationary scenario inspired by string theory known as Dirac-Born-Infeld inflation, and notably its multifield aspects. We finally describe the means carried out to detect the effects of primordial non-Gaussianities on the cosmological observables.

Key Words: Cosmology, Inflation, Multifield, Perturbations, Non-Gaussianities, String theory, Dirac-Born-Infeld.

Remerciements

Je tiens en premier lieu à remercier David Langlois d'avoir accepté d'encadrer ma thèse. Il a su se montrer disponible malgré ses diverses activités de chercheur, d'enseignant et de responsable du groupe théorie et je lui en suis particulièrement reconnaissant. J'ai eu la chance de bénéficier auprès de lui aussi bien d'un encadrement scientifique et humain exceptionnel que d'une très grande liberté et je le remercie de sa confiance. Enfin, sa curiosité intellectuelle restera pour moi toujours un modèle.

Je remercie également Pierre Binétruy, Costas Bachas et George Smoot qui m'ont fait l'honneur de faire partie du jury de ma thèse, et particulièrement Francis Bernardeau et David Wands d'avoir accepté d'en être les rapporteurs.

Merci à mes collaborateurs, Takahiro Tanaka, Gianmassimo Tasinato, Jean-Luc Lehners et Danièle Steer en particulier, pour sa bonne humeur, ses conseils et sa patiente relecture de nombreux documents.

Je remercie l'ensemble des membres du laboratoire *AstroParticules et Cosmologie* et de l'UFR de Physique de Paris Diderot pour m'avoir accueilli chaleureusement lors de ces trois années de thèse. Je remercie en particulier la direction du laboratoire et de l'UFR en les personnes de Pierre Binétruy et Yannick Giraud-Héraud. Je tiens également à remercier Françoise Virieux, Jean-Pierre Villain, Georgette Diaby, Martine Piochaud, Aurélia Guet et Hélène Le Bihan pour m'avoir offert des conditions de travail excellentes. J'ai également apprécié les discussions partagées avec les membres du laboratoire APC, et notamment avec Francesco Nitti, Jean-François Dufaux, Julien Serreau, Thomas Hertog et Cédric Deffayet, ainsi qu'avec Dan Israël et Flavien Kiefer à l'Institut d'Astrophysique de Paris.

Merci à tous les doctorants du laboratoire qui ont partagé mon quotidien durant ces trois années, Riad à qui je dois beaucoup, Alejandro, Alexandre, Lorenzo, Julien, Éloïse, Euihun, Ahmed, Sofiane.

On effectue une thèse après un long parcours, universitaire et personnel. Je tiens à cet égard à remercier chaleureusement Christian Legrand qui a nourri ma vocation d'« astrophysicien » et Françoise Combes, Pierre Carrique et M. Meir qui m'ont prodigué de précieux conseils quant à mon orientation scolaire. La liste des enseignants à qui je suis tributaire est longue mais, sans être exhaustif, je remercie Cyrille Rosset, Costas Bachas et Tristan Beau de m'avoir initié à la recherche, ainsi que M. Coup, Marc Magro, Frédéric Van Wijland, Nathalie Deruelle, Cédric Deffayet, Francis Bernardeau et Pierre Binétruy.

Je remercie ma famille pour son soutien constant, et en particulier ma mère pour sa relecture attentive de ce mémoire et ma soeur qui a lancé ma carrière de physicien théoricien en m'expliquant patiemment la résolution des systèmes d'équations linéaires il y a quelques années maintenant. Je tiens également à saluer mes amis, Antonin, François, Alexandra, Ingrid, Nicolas, Édouard.

Une pensée émue va à mes enfants, Clémentine et David, qui ont dû supporter mes absences lors de mes séjours à l'étranger. Je les remercie également de leur patience et de leur compréhension devant une explication aussi peu convaincante pour eux que « papa doit écrire son livre ».

Enfin, toute ma reconnaissance va à Mariette qui m'a épaulé et soutenu depuis plusieurs années, et qui a partagé avec moi les moments d'euphorie et de déception que créent la recherche scientifique. Je la remercie également pour tous les efforts auxquelles elle a consenti pour me permettre d'écrire ce mémoire dans les meilleures conditions.

Table des matières

Résumé **2**

Abstract **4**

Remerciements **6**

Table des matières **9**

Introduction **13**

I Quelques éléments du modèle cosmologique standard **17**

1 L'univers homogène **19**
1.1 Le modèle du Big Bang chaud 19
1.1.1 Principe cosmologique et espace-temps de FLRW 19
1.1.2 Cinématique : temps conforme et horizon des particules 21
1.1.3 Dynamique : relativité générale, tenseur énergie impulsion et équations de Friedmann 22
1.1.4 Équation d'état de la matière et évolution de l'univers 23
1.1.5 Le modèle de concordance 24
1.2 Les problèmes du modèle du Big Bang chaud 27
1.2.1 Le problème de l'horizon 27
1.2.2 Le problème de la platitude 27
1.2.3 Le problème des reliques 28
1.2.4 Le problème de l'origine des structures 28
1.2.5 Sur le problème des conditions initiales 29

2 L'univers inhomogène et la théorie des perturbations cosmologiques **31**
2.1 Généralités 32
2.1.1 La décomposition Scalaire Vecteur Tenseur 32
2.1.2 Perturbations de la géométrie et de la matière 36
2.2 Transformations de jauge 38

2.2.1 Le problème de jauge 38
2.2.2 Approches active et passive des transformations de jauge 39
2.2.3 Variables invariantes de jauge 43
2.3 Dynamique 45
2.3.1 Perturbations scalaires au premier ordre 45
2.3.2 Perturbations vectorielles et tensorielles au premier ordre 48
2.3.3 Perturbations adiabatiques et entropiques 49
2.4 Statistiques des perturbations cosmologiques 52
2.4.1 Motivations et conventions 52
2.4.2 Spectres de puissance 53
2.4.3 Contraintes observationnelles sur l'univers inhomogène 55

II L'inflation cosmologique 57

3 L'inflation à un champ 59
3.1 Le mécanisme de l'inflation 60
3.1.1 La décroissance du rayon de Hubble comobile 60
3.1.2 Les conditions de l'inflation 62
3.1.3 La structure causale de l'univers inflationnaire 63
3.2 Dynamique homogène de l'inflation canonique à un champ 64
3.2.1 Dynamique d'un champ scalaire couplé à la gravité 65
3.2.2 L'inflation de roulement lent 66
3.2.3 Le réchauffement 69
3.3 Les fluctuations quantiques pendant l'inflation canonique à un champ 70
3.3.1 Un bref aperçu 70
3.3.2 Calcul de l'action quadratique 72
3.3.3 Quantification et évolution des perturbations scalaires 76
3.3.4 Quantification et évolution des perturbations tensorielles 80
3.3.5 Spectres primordiaux 81
3.4 L'inflation à un champ avec des termes cinétiques non standard ou "k-inflation" 82
3.5 Quel modèle d'inflation ? 85
3.5.1 Reconstruction locale du potentiel inflationnaire 85
3.5.2 Ondes gravitationnelles et physique des hautes énergies 86
3.5.3 Une description microphysique de l'inflation ? 87

4 L'inflation multichamp 89
4.1 Motivations 89
4.2 L'inflation multichamp "canonique" 90
4.2.1 Évolution homogène 91
4.2.2 Quantification et traversée du rayon de Hubble 91
4.2.3 La décomposition adiabatique/entropique 93
4.2.4 Matrice de transfert et spectres primordiaux 97
4.2.5 Extensions 99
4.3 L'inflation multichamp généralisée (article) 100

III Les non-gaussianités primordiales **125**

5 Non-gaussianités primordiales : formalismes et modèles **127**
5.1 Introduction 128
5.1.1 Motivations et contexte 128
5.1.2 Cadre général 129
5.2 Un aperçu 130
5.2.1 Le bispectre 130
5.2.2 Le trispectre 131
5.2.3 Le résultat de Maldacena et au-delà 132
5.3 L'approche univers séparés et le formalisme δN 132
5.3.1 L'approche univers séparés 133
5.3.2 Le formalisme δN 135
5.3.3 Les non-gaussianités locales 138
5.4 Le calcul quantique des non-gaussianités 141
5.4.1 Le formalisme in-in 141
5.4.2 Développement perturbatif 144
5.4.3 L'exemple de la k-inflation 145
5.5 Les grandes classes de modèles et leurs signatures non-gaussiennes 150
5.5.1 Forme locale et effets multichamps 151
5.5.2 Formes équilatérale et "orthogonale" et termes cinétiques non-standard 152
5.5.3 Dépendances d'échelle sinusoïdale et "résonante" et irrégularités 152
5.5.4 Forme aplatie et vide différent de celui de Bunch-Davies. 154

6 Formalisme covariant et non-gaussianités locales **157**
6.1 Le formalisme covariant 1+3 157
6.2 Le formalisme 1+3 et les perturbations non-linéaires dans l'inflation multichamp généralisée (article) 160
6.2.1 Contexte scientifique et motivations 160
6.2.2 Article 161
6.2.3 Commentaires et précisions 203
6.3 Théorie des perturbations cosmologiques multichamp au troisième ordre et trispectre ekpyrotique (article) 204
6.3.1 Les scénarios ekpyrotiques 204
6.3.2 Non-gaussianités ekpyrotiques et contexte scientifique 206
6.3.3 Motivation et résultats 208
6.3.4 Article 208

IV L'inflation Dirac-Born-Infeld **229**

7 L'inflation branaire à un champ **231**
7.1 Pourquoi décrire l'inflation dans le cadre de la théorie des cordes ? 231
7.2 Limite de basse énergie de la théorie des cordes de type IIB et compactifications avec flux 233
7.2.1 La limite de basse énergie de la théorie des cordes de type IIB 233
7.2.2 Compactifications avec flux et gorges déformées 234

7.2.3 Gorges coniques, solution de Klebanov-Strassler et approximation AdS_5 235
7.3 L'inflation branaire 236
7.3.1 Historique 236
7.3.2 L'inflation branaire de roulement lent 237
7.4 L'inflation Dirac-Born-Infeld à un champ 239
7.4.1 L'évolution de fond 240
7.4.2 La théorie linéaire et les non-gaussianités 243
7.4.3 La borne de Baumann McAllister et ses conséquences 245
7.4.4 Extensions et raffinements 247

8 L'inflation DBI multichamp 249
8.1 Fluctuations primordiales et non-gaussianités dans l'inflation multichamp générale et dans l'inflation multichamp DBI (articles) 249
8.1.1 Motivations, contexte scientifique et résultats 249
8.1.2 Article court 252
8.1.3 Article long 257
8.2 Les champs de fond et les ondes gravitationnelles dans l'inflation DBI multichamp (article) 274
8.2.1 Motivations et résultats 274
8.2.2 Article 275
8.3 Non-gaussianités locales et équilatérales combinées dans l'inflation DBI multichamp (article) 299
8.3.1 Motivations et résultats 299
8.3.2 Article 300
8.4 Autres travaux 335

V À la recherche des non-gaussianités primordiales 337

9 À la recherche des non-gaussianités primordiales 339
9.1 Comment sonder les non-gaussianités primordiales ? 339
9.1.1 Le fond diffus cosmologique 340
9.1.2 Les grandes structures de l'univers 341
9.2 Le bispectre du fond diffus cosmologique : formalisme et détection 342
9.2.1 Un échauffement : du spectre primordial au spectre angulaire 343
9.2.2 Du bispectre primordial au bispectre angulaire 344
9.2.3 Estimateurs des $f_{NL}^{(i)}$ 345
9.2.4 Mise en pratique et séparabilité 348
9.3 Contraintes actuelles et perspectives 350

Conclusions et Perspectives 353

Bibliographie 355

Introduction

Les deux dernières décennies ont été marquées en cosmologie par une accélération formidable du rythme des découvertes scientifiques, au point qu'on nomme souvent la période actuelle l'âge d'or de la cosmologie. Par ceci, nous voulons dire que cette science, auparavant pauvre en observations, est passée dans une ère de précision dans laquelle des données fines et nombreuses peuvent maintenant être comparées aux modèles théoriques. Ajoutée aux progrès de l'astrophysique, un modèle dit de concordance en a émergé, réussissant le tour de force de rendre compte avec une poignée de paramètres d'observations aussi diverses que celles des anisotropies du fond diffus cosmologique, de la distribution des amas de galaxies ou de l'abondance des éléments légers dans l'univers. Selon ce paradigme, les structures de l'univers tel que nous les connaissons aujourd'hui sont le résultat de l'effondrement gravitationnel de "graines" primordiales générées dans une phase d'expansion accélérée de l'univers au cours de ses premiers instants : l'inflation cosmologique. La densité d'énergie mise en jeu pendant l'ère inflationnaire est, cependant, bien supérieure à la limite de validité du modèle standard de la physique des particules, et bien supérieure à ce que toute expérience humaine peut actuellement atteindre, y compris le LHC. En résumé, l'inflation est un paradigme qui n'a pas, encore, de fondements dans une théorie de physique des hautes énergies ; il offre cependant, par les observations cosmologiques, une opportunité unique de mise à jour des lois physiques fondamentales. À cet égard, la principale théorie actuelle candidate à la description des interactions fondamentales est la théorie des cordes. Il est donc extrêmement naturel d'essayer de décrire l'inflation cosmologique en son sein. Il est cependant très difficile d'assurer dans ce cadre – et dans tout cadre réaliste – les conditions nécessaires au scénario d'inflation le plus simple, celui faisant intervenir un unique champ scalaire en roulement lent. D'une part, ceci nécessite un potentiel inflationnaire artificiellement plat. D'autre part, plusieurs champs scalaires jouent de manière générique un rôle non-trivial dans la dynamique de l'inflation. La théorie des cordes motive par contre des scénarios dans lesquels l'action de certains champs scalaires est de type non-standard, et même des alternatives à l'inflation cosmologique.

D'un point de vue observationnel, cependant, il s'avère extrêmement difficile de différencier les différents modèles d'univers primordiaux construits par les théoriciens. Une raison en est la petitesse observée des fluctuations primordiales. Celle ci implique qu'un traitement linéaire dans la théorie des perturbations est suffisant à les décrire en première approximation, auquel cas on peut considérer qu'elles obéissent à une statistique gaussienne, uniquement caractérisée par sa variance. Ceci constitue évidemment une compression drastique des informations décrivant la dynamique de l'univers primordial. Les

progrès récents spectaculaires de la cosmologie observationnelle, et de l'observation du fond diffus cosmologique en particulier, permettent toutefois maintenant de sonder avec une précision intéressante les déviations à la gaussianité des perturbations de densité primordiales, ce que l'on appelle les non-gaussianités. Celles-ci étant sensibles aux *interactions* du (ou des) champ générant les fluctuations cosmologiques, contrairement à la théorie linéaire gaussienne, il devient par conséquent possible de différencier des modèles autrement presque indistinguables, ouvrant une fenêtre complètement nouvelle sur la physique de l'univers primordial. Le satellite WMAP fournit déjà à cet égard des contraintes quantitatives intéressantes sur les non-gaussianités primordiales, contraintes qui devraient s'affiner de manière extrêmement importantes avec le satellite Planck, actuellement en prise de données, et dont les premiers résultats sont attendus avant la fin de l'année 2012. La recherche d'effets si fins dans les données cosmologiques nécessite cependant des prédictions précises de la part des théoriciens. Or, si les signatures non-gaussiennes des modèles les plus simples sont bien connues, ce n'est pas le cas des modèles plus complexes, motivés par la physique des hautes énergies, comme ceux présentant plusieurs champs scalaires ou/et des actions de type non standard. C'est dans ce cadre que se situe le travail de thèse présenté dans ce mémoire. Ce dernier s'articule en cinq grandes parties.

Dans la première partie, nous exposons les bases du modèle cosmologique standard, conceptuelles et techniques, qui nous seront utiles par la suite. Nous présentons dans le chapitre 1 des éléments de cosmologie homogène du modèle du Big Bang chaud ainsi que les problèmes conceptuels de celui-ci. Dans le chapitre 2, nous nous intéressons à la description, dans le cadre de la relativité générale, des inhomogénéités de l'univers. Nous traitons en particulier du problème de jauge et de la construction de variables invariantes de jauge. Nous montrons l'utilité à cet égard de l'approche dite active, en particulier au delà de l'approximation linéaire. Nous étudions ensuite la dynamique linéaire des perturbations cosmologiques avant de définir les outils statistiques utilisés couramment pour leur description. Nous complétons enfin notre présentation du modèle cosmologique de concordance en donnant les contraintes observationnelles actuelles sur l'univers homogène dans l'approximation linéaire.

La partie II est consacrée à la présentation du paradigme de l'inflation. Nous expliquons tout d'abord dans le chapitre 3 comment une phase inflationnaire résout les problèmes du modèle du Big Bang chaud et nous décrivons le scénario le plus simple faisant intervenir un champ scalaire en roulement lent. Nous détaillons ensuite le mécanisme de genèse des fluctuations primordiales, scalaires et tensorielles, dans l'inflation à un champ canonique puis avec une action non-standard. Nous traitons enfin la question de la sélection, sur des bases observationnelles et théoriques, d'un modèle d'inflation. Le chapitre 4 étend l'étude des fluctuations cosmologiques, dans l'approximation linéaire, à une phase d'inflation où plusieurs champs scalaires sont dynamiquement importants, dans le cadre canonique puis dans celui de l'inflation multichamp dite généralisée, où l'action est de type non standard. Ce dernier travail, effectué en collaboration avec D. Langlois, a fait l'objet d'une publication dans *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*.

La partie III débute avec un chapitre général sur les non-gaussianités primordiales. Nous y exposons les principaux outils utilisés pour déterminer les propriétés non-gaussiennes des perturbations primordiales, le formalisme δN et celui de Keldysh-Schwinger, en illustrant nos propos par la présentation détaillée de deux grands types de non-gaussianités, les

non-gaussianités locales et celles équilatérales. Nous dressons enfin un bref panorama des modèles d'univers primordiaux générant d'importantes non-gaussianités en les classant selon le type de celles-ci. Le chapitre 6 s'intéresse, lui, à l'application d'un formalisme, dit covariant, à l'étude des non-gaussianités locales générées dans les modèles primordiaux multichamps. Après une brève présentation du formalisme lui-même, nous exposons des résultats, déterminés avec G. Tasinato, et publiés dans *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, quant à l'évolution des fluctuations dans l'inflation multichamp généralisée au second ordre dans la théorie des perturbations. Nous nous intéressons ensuite aux modèles ekpyrotiques, des scénarios d'univers primordiaux dans lesquels l'inflation est remplacée par une phase de contraction lente avant le Big Bang. Motivés par le calcul de leurs propriétés non-gaussiennes au delà de l'ordre dominant, nous déterminons les équations d'évolution des perturbations cosmologiques dans des modèles à deux champs au troisième ordre dans la théorie des perturbations. Ce travail, réalisé en collaboration avec J.L. Lehners, a donné lieu à une publication dans *Physical Review D*.

La partie IV de ce mémoire s'intéresse à une réalisation particulièrement intéressante du mécanisme inflationnaire inspirée par la théorie des cordes : l'inflation dite Dirac-Born-Infeld (DBI par la suite), ainsi nommée d'après la forme non-standard de l'action correspondante. Après avoir présenté le cadre théorique dans lequel ce type de modèle est considéré, nous expliquons dans le chapitre 7 l'état de l'art en la matière avant ce travail de thèse. Nous décrivons en particulier la signature non-gaussienne spécifique des scénarios DBI à un champ considérés jusque là, ainsi que les difficultés à concilier leur description dans un cadre cordiste cohérent d'une part, et les observations cosmologiques d'autre part. Comme nous l'expliquons au chapitre 8, les scénarios d'inflation DBI font cependant naturellement intervenir plusieurs champs scalaires. Nous montrons que ceci a d'importantes conséquences observationnelles, en particulier pour les non-gaussianités générées dans ce type de modèle, offrant la possibilité de réconcilier dans ce cadre considérations théoriques et observations cosmologiques. Nous avons développé pour cela un formalisme, étendant celui de l'inflation multichamp généralisée, pour traiter des fluctuations cosmologiques générées dans tout scénario d'inflation multichamp invariant de Lorentz. Ces travaux, effectués en collaboration avec D. Langlois, D.A. Steer et Takahiro Tanaka, ont fait l'objet de deux publications, dans *Physical Review Letters* et *Physical Review D*. Les scénarios d'inflation multichamp d'action non-standard, et l'inflation DBI multichamp en particulier, ont motivé depuis lors beaucoup d'études. Nous présentons par la suite celles dans lesquelles nous avons été impliquées, l'une réalisée en collaboration avec D. Langlois et D.A. Steer, l'autre réalisée seul, toutes deux publiées dans *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*. Nous mentionnons enfin les travaux d'autres auteurs sur le même sujet.

La cinquième partie est plus observationnelle. Nous y expliquons les principales méthodes et observables avec lesquelles les non-gaussianités primordiales sont recherchées, détaillant en particulier la construction d'estimateurs statistiques du bispectre primordial avec les données des fluctuations de température du fond diffus cosmologique.

Première partie

Quelques éléments du modèle cosmologique standard

Chapitre 1

L'univers homogène

Sommaire

1.1 Le modèle du Big Bang chaud 19
1.1.1 Principe cosmologique et espace-temps de FLRW 19
1.1.2 Cinématique : temps conforme et horizon des particules 21
1.1.3 Dynamique : relativité générale, tenseur énergie impulsion et équations de Friedmann 22
1.1.4 Équation d'état de la matière et évolution de l'univers 23
1.1.5 Le modèle de concordance 24
1.2 Les problèmes du modèle du Big Bang chaud 27
1.2.1 Le problème de l'horizon 27
1.2.2 Le problème de la platitude 27
1.2.3 Le problème des reliques 28
1.2.4 Le problème de l'origine des structures 28
1.2.5 Sur le problème des conditions initiales 29

1.1 Le modèle du Big Bang chaud

Nous rappelons dans cette section les concepts fondamentaux de la cosmologie et les éléments de cosmologie homogène que nous utiliserons tout au long de ce mémoire. Nous décrivons enfin la succession d'étapes, ou *ères* du modèle du Big Bang chaud.

1.1.1 Principe cosmologique et espace-temps de FLRW

La cosmologie étudie la structure et le contenu matériel de l'univers aux plus grandes échelles observables. Sa structure est décrite par une variété lorentzienne quadridimensionnelle ou espace-temps, son contenu matériel est décrit par des champs vivants sur cette variété et le lien entre les deux est fourni par la relativité générale d'Einstein. Des hypothèses de symétrie, érigées en principe, sont de plus généralement employées : l'hypothèse d'homogénéité et celle d'isotropie, qui impliquent que certaines hypersurfaces spatiales

sont privilégiées, amenant à une séparation entre l'espace et le temps. Une description mathématique rigoureuse peut être trouvée dans la référence [409] mais intuitivement, un espace est homogène quand il est invariant par translation, ce qui signifie qu'à chaque instant, tout point de l'espace est semblable à un autre, tandis qu'un espace isotrope est invariant par rotation, autrement dit identique dans toutes les directions. La répartition des galaxies autour de nous semble isotrope, ainsi que le fond diffus cosmologique [1], ce qui motive le principe d'isotropie. Si on y ajoute le principe copernicien, qui suppose que la Terre n'occupe pas une place privilégiée dans l'univers, nous sommes amenés à considérer un espace partout isotrope. On se convainc facilement qu'un tel espace est nécessairement homogène [2]. La conjonction du principe d'homogénéité et de celui d'isotropie constitue le principe cosmologique. Il est important de rappeler que ce principe est à considérer statistiquement, c'est-à-dire pour un univers lissé sur des distances supérieures aux plus grandes structures le constituant. La description des structures elles-mêmes, qui constituera l'objet du chapitre 2, est réalisée en considérant de petites inhomogénéités sur cet espace de fond idéalisé, homogène et isotrope [3].

A grande échelle donc, on peut montrer [416, 409, 331] que le principe cosmologique impose à la métrique $g_{\mu\nu}$ d'être du type Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker (FLRW)

$$ds^2 \equiv g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu = -dt^2 + a^2(t)\left[d\chi^2 + f_K^2(\chi)(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2)\right] , \tag{1.1}$$

où $a(t)$, caractérisant la taille relative des hypersurfaces spatiales à différents temps, est appelé *facteur d'échelle*, et où χ est une coordonnée radiale. La constante K décrit la géométrie des sections spatiales de l'espace-temps : l'espace est fermé pour $K > 0$, plat pour $K = 0$ et ouvert pour $K < 0$. La fonction f_K, qui est telle que la surface d'une sphère de rayon χ est donnée par $S(\chi) = 4\pi f_K^2(\chi)$, prend la forme

$$f_K(\chi) = \begin{cases} K^{-1/2}\sin\left(\sqrt{K}\chi\right) & \text{si} \quad K > 0 \\ \chi & \text{si} \quad K = 0 \\ (-K)^{-1/2}\sinh\left(\sqrt{-K}\chi\right) & \text{si} \quad K < 0. \end{cases} \tag{1.2}$$

La métrique (1.1) use de coordonnées dites comobiles : sans forces agissant sur eux, c'est-à-dire en absence de vitesse propre, les observateurs/galaxies ont des coordonnées χ, θ, ϕ constantes. La distance physique correspondante R est obtenue en multipliant par le facteur d'échelle a : $R = a(t)f_K^2(\chi)$. L'évolution temporelle de l'espace FLRW (1.1) est entièrement décrite par la fonction $a(t)$, et une quantité déduite particulièrement importante est le taux d'expansion

$$H \equiv \frac{\dot{a}}{a} \tag{1.3}$$

où un point désigne une dérivée par rapport au temps physique t. H est appelé *paramètre de Hubble* et est homogène à l'inverse d'un temps, de telle sorte que le temps caractéristique

1. *Cosmic Microwave Background* en anglais, d'où l'utilisation fréquente, même dans un contexte francophone, de l'acronyme CMB.

2. Un espace partout isotrope est nécessairement homogène mais le contraire n'est pas vrai. Par exemple un espace doté d'un champ électrique uniforme est invariant par translation mais pas par rotation, donc homogène mais pas isotrope.

3. Notons enfin que l'univers que nous essayons de décrire est l'univers observable. L'univers à plus grande échelle pourrait tout à fait être très inhomogène, comme suggéré par le concept d'inflation éternelle.

de l'univers homogène FLRW est $t \sim H^{-1}$ et que sa taille caractéristique, ou distance de Hubble, est $d \sim H^{-1}$ (dans notre système d'unités où $c = 1$). Dans la suite, on normalise $a(t)$ de telle sorte qu'aujourd'hui $a \equiv a_0 = 1$ (nous noterons avec un indice $_0$ la valeur de toute quantité évaluée aujourd'hui).

1.1.2 Cinématique : temps conforme et horizon des particules

Après avoir décrit la métrique des espaces FLRW, nous décrivons ici les propriétés de la propagation de la lumière dans ces espaces, et donc leur structure causale.

Temps conforme et géodésiques de genre lumière

La structure causale de l'univers est déterminée par la propagation de la lumière dans la métrique (1.1). Les photons – de masse nulle – suivent des géodésiques telles que $\mathrm{d}s^2 = 0$. Ces trajectoires sont analysées plus facilement à l'aide du temps conforme

$$\tau = \int \frac{\mathrm{d}t}{a(t)}\,, \tag{1.4}$$

avec lequel la métrique (1.1) s'écrit

$$\mathrm{d}s^2 = a(\tau)^2 \left[-\mathrm{d}\tau^2 + \left(\mathrm{d}\chi^2 + f_K^2(\chi)(\mathrm{d}\theta^2 + \sin^2\theta \mathrm{d}\phi^2)\right)\right]\,. \tag{1.5}$$

On peut sans perte de généralité considérer une trajectoire radiale pour laquelle

$$\mathrm{d}s^2 = a(\tau)^2 \left[-\mathrm{d}\tau^2 + \mathrm{d}\chi^2\right]\,. \tag{1.6}$$

Ces géodésiques de genre lumière vérifient donc

$$\chi(\tau) = \pm\tau + \text{const.}\,, \tag{1.7}$$

c'est-à-dire qu'elles sont représentées par des lignes droites à $\pm 45°$ dans le plan χ–τ (voir la figure 3.2 pour le diagramme conforme de l'univers dans le modèle du Big Bang).

L'horizon des particules

D'après l'équation (1.7), la distance comobile maximale franchie par la lumière entre un temps initial t_i et un temps ultérieur t est

$$\chi_p(\tau) = \tau - \tau_\mathrm{i} = \int_{t_\mathrm{i}}^{t} \frac{\mathrm{d}t}{a(t)}\,. \tag{1.8}$$

Ceci est appelé l'horizon comobile des particules. Nous verrons que le modèle standard du Big Bang chaud présente une singularité initiale, *i.e.* le facteur d'échelle s'annule à un temps fini dans le passé. Par conséquent, le temps initial t_i est souvent pris à l' "origine de l'univers", $t_\mathrm{i} \equiv 0$, définie par la singularité initiale $a(t_\mathrm{i} \equiv 0) \equiv 0$. La taille physique de l'horizon des particules est

$$d_p(t) = a(t)\chi_p\,. \tag{1.9}$$

Le fait qu'il soit fini à tout instant dans le modèle du Big Bang chaud limite les distances sur lesquelles des régions de l'espace temps aient pu être en contact causal. Ceci constitue un des problèmes du modèle du Big Bang chaud que l'inflation cosmologique résout.

1.1.3 Dynamique : relativité générale, tenseur énergie impulsion et équations de Friedmann

Action d'Einstein-Hilbert et équations d'Einstein

En relativité générale, la dynamique de l'espace-temps couplé à la matière est gouvernée par l'action

$$S = \int \mathrm{d}^4x\sqrt{-g}\left[\frac{R}{16\pi G} + \mathcal{L}_{\mathrm{mat}}\right] = S_{\mathrm{EH}} + S_{\mathrm{mat}}\,, \tag{1.10}$$

somme de l'action d'Einstein-Hilbert S_{EH} et de l'action de la matière. G est la constante de gravitation reliée à la masse de Planck par $M_p^2 = (8\pi G)^{-1}$ et R est la courbure scalaire de la métrique d'espace-temps. La variation de l'action (3.12) par rapport à la métrique donne les équations d'Einstein

$$G_{\mu\nu} = 8\pi G\, T_{\mu\nu}\,, \tag{1.11}$$

où $G_{\mu\nu}$ désigne le tenseur d'Einstein (voir la référence [409] par exemple pour des rappels géométriques) et $T_{\mu\nu}$ le tenseur énergie-impulsion défini par

$$T_{\mu\nu} \equiv -\frac{2}{\sqrt{-g}}\frac{\delta\left(\mathcal{L}_{\mathrm{mat}}\sqrt{-g}\right)}{\delta g^{\mu\nu}} = g_{\mu\nu}\mathcal{L}_{\mathrm{mat}} - 2\frac{\delta\mathcal{L}_{\mathrm{mat}}}{\delta g^{\mu\nu}}. \tag{1.12}$$

Celui-ci est conservé au sens où

$$\nabla_\nu T^{\mu\nu} = 0 \tag{1.13}$$

en vertu des identités de Bianchi. Dans la suite nous suivrons parfois la pratique courante en cosmologie d'utiliser des unités telles que $8\pi G \equiv 1$.

Tenseur énergie-impulsion

Pour obtenir la signification physique du tenseur énergie-impulsion, il convient d'introduire un jeu d'observateurs, dits fondamentaux, définis par le champ de vecteur de genre temps tangent à leurs lignes d'univers, u^μ, normalisé tel que $g_{\mu\nu}u^\mu u^\nu = -1$. Le tenseur $h_{\mu\nu} \equiv g_{\mu\nu} + u_\mu u_\nu$ est alors un tenseur de projection orthogonale à la quadrivitesse u^μ. Par rapport aux observateurs fondamentaux, le tenseur énergie-impulsion se décompose selon

$$T_{\mu\nu} = (\rho + p)u_\mu u_\nu + q_\mu u_\nu + u_\mu q_\nu + g_{\mu\nu}p + \pi_{\mu\nu}, \tag{1.14}$$

où

$$\rho \equiv T_{\mu\nu}u^\mu u^\nu, \tag{1.15}$$

$$p \equiv \frac{1}{3}h^{\mu\rho}T_{\mu\nu}h^\nu_{\ \rho}, \tag{1.16}$$

$$q_\mu \equiv -u^\nu T_{\nu\rho}h^\rho_{\ \mu}, \tag{1.17}$$

$$\pi_{\mu\nu} \equiv h^\rho_{\ \mu}T_{\rho\lambda}h^\lambda_{\ \nu} - p h_{\mu\nu} \tag{1.18}$$

désignent respectivement la densité d'énergie, la pression (isotrope), la densité d'impulsion et le tenseur de pression anisotrope mesurés par les observateurs fondamentaux. Si les

observateurs sont comobiles avec le fluide, *i.e.* u^μ est choisi pour coïncider avec la quadrivitesse de la matière, alors $q_\mu = 0$ [4]. De plus, si le fluide est parfait, son tenseur de pression anisotrope s'annule, auquel cas le fluide est uniquement caractérisé par sa densité d'énergie et sa pression propres, *i.e.* dans son référentiel au repos.

Équations de Friedmann

Dans l'espace de fond de FLRW (1.1), l'homogénéité et l'isotropie imposent au tenseur énergie-impulsion d'être celui d'un fluide parfait de vitesse $\bar{u}^\mu = \delta^\mu_0/a$ (en temps conforme). Les équations d'Einstein (1.11) appliquées à la métrique (1.1) et à un tel fluide permettent d'obtenir les équations dites *de Friedmann* [5]

$$H^2 \equiv \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{1}{3}\rho - \frac{K}{a^2} \tag{1.19}$$

et

$$\dot{H} + H^2 = \frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{1}{6}(\rho + 3p)\,, \tag{1.20}$$

reliant le facteur d'échelle à la densité et à la pression de la matière. Ce sont les équations clés de la cosmologie sur lesquelles est basé le modèle du Big Bang chaud. Elles peuvent être combinées pour donner l'équation dite de continuité, ou de conservation de l'énergie

$$\dot{\rho} + 3H(\rho + p) = 0\,. \tag{1.21}$$

Dans un univers rempli de matière ordinaire, (c'est-à-dire de matière satisfaisant la condition d'énergie forte $\rho + 3p \geq 0$), l'équation (1.20) implique que l'univers est nécessairement en décélération, $\ddot{a} \leq 0$. Dans un univers en expansion, $\dot{a} > 0$, cela implique l'existence d'une singularité initiale à un temps fini dans le passé $a(t_i \equiv 0) = 0$. Cette conclusion repose bien entendu sur les hypothèses que la relativité générale est applicable au voisinage de telles singularités et que la matière n'est pas sous une forme exotique. On verra que l'inflation cosmologique "résout", ou plutôt décale, ce problème de la singularité initiale en fournissant un exemple de matière "exotique".

1.1.4 Équation d'état de la matière et évolution de l'univers

Il est commode d'introduire le paramètre d'état

$$w \equiv \frac{p}{\rho} \tag{1.22}$$

qui est constant pour les formes ordinaires de matière. Dans ce cas, l'équation (1.21) s'intègre facilement pour donner

$$\rho \propto a^{-3(1+w)}\,. \tag{1.23}$$

4. La quadrivitesse comobile $u^\mu_{\rm com}$ peut être définie comme le vecteur propre du tenseur énergie impulsion de valeur propre $-$ la densité d'énergie propre, ou comobile : $T^\mu_\nu u^\nu_{\rm com} = -\rho_{\rm com} u^\mu_{\rm com}$ [214]. La définition (1.17) donne alors $q^{\rm com}_\mu = 0$.

5. On appelle parfois la première de ces équations l'équation de Friedmann et la seconde l'équation de Raychaudhuri.

L'équation de Friedmann (1.19) fournit alors l'évolution du facteur d'échelle

$$a(t) \propto \begin{cases} (t-\bar{t})^{2/3(1+w)} & w \neq -1\,, \\ e^{Ht} & w = -1\,, \end{cases} \tag{1.24}$$

i.e. $a(t) \propto (t-\bar{t})^{2/3}$, $a(t) \propto (t-\bar{t})^{1/2}$ et $a(t) \propto \exp(Ht)$, pour le facteur d'échelle d'un univers plat ($K = 0$) dominé par la matière non-relativiste ($w = 0$), la radiation ou la matière relativiste ($w = \frac{1}{3}$), et une constante cosmologique ($w = -1$), respectivement, et où $\bar{t}$ correspond au début de l'ère considérée. Pour $w = -1$, l'univers est en expansion accélérée et correspond à un espace de de Sitter avec un taux d'expansion H et une densité d'énergie ρ constants.

Si plusieurs types de matière (photons, neutrinos, baryons, matière noire, énergie sombre, etc.) contribuent de manière significative à la densité d'énergie et à la pression, ρ et p désignent la somme de tous les constituants

$$\rho \equiv \sum_i \rho_i\,, \qquad p \equiv \sum_i p_i\,. \tag{1.25}$$

Pour chaque fluide "i", on définit le rapport entre la densité d'énergie actuelle et la densité d'énergie critique $\rho_{\rm crit} \equiv 3H_0^2$

$$\Omega_i \equiv \frac{\rho_0^i}{\rho_{\rm crit}}\,, \tag{1.26}$$

et l'équation d'état correspondante

$$w_i \equiv \frac{p_i}{\rho_i}\,. \tag{1.27}$$

L'équation de Friedmann (1.19) peut alors être mise sous la forme

$$\left(\frac{H}{H_0}\right)^2 = \sum_i \Omega_i a^{-3(1+w_i)} + \Omega_K a^{-2}, \tag{1.28}$$

où $\Omega_k \equiv -K/a_0^2 H_0^2$. L'équation (1.28) évaluée aujourd'hui à $t = t_0$ (rappelons que $a(t_0) \equiv 1$) implique la relation de cohérence

$$\sum_i \Omega_i + \Omega_k = 1\,. \tag{1.29}$$

Enfin, la seconde équation de Friedmann (1.20) évaluée à $t = t_0$ implique

$$\frac{1}{a_0 H_0^2}\frac{d^2 a_0}{dt^2} = -\frac{1}{2}\sum_i \Omega_i(1+3w_i)\,, \tag{1.30}$$

ce qui donne les conditions pour avoir une expansion accélérée aujourd'hui.

1.1.5 Le modèle de concordance

Les progrès récents de la cosmologie observationnelle ont permis de construire un modèle, dit de concordance, ou modèle cosmologique standard, qui résume les résultats de nombreuses observations à quelques chiffres indiquant la géométrie et la composition de

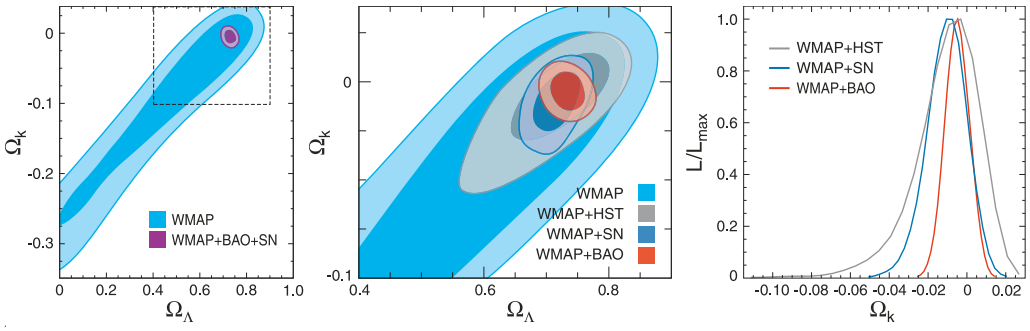

FIGURE 1.1 – Les observations conjointes du CMB et des grandes structures montrent que la géométrie spatiale de l'univers est plate. Les contours indiquent les niveaux de confiance à 68 et 95 %. Figure extraite de [221].

l'univers. Les observations du fond diffus cosmologique et des grandes structures de l'univers en particulier indiquent que l'univers est plat (voir Fig. 1.1)

$$\Omega_k \sim 0 \tag{1.31}$$

et composé de 4% d'atomes (ou baryons, "b"), 23% de matière noire froide (matière non-relativiste de nature encore inconnue, "cdm" pour *cold dark matter* en anglais), 73% d'énergie noire (Λ) (voir Fig. 1.2) d'équation d'état compatible avec une constante cosmologique $w_\Lambda \approx -1$, et d'une petite fraction de radiation :

$$\Omega_\gamma \simeq 5 \times 10^{-5}\,, \Omega_b = 0.04\,, \quad \Omega_{cdm} = 0.23\,, \quad \Omega_\Lambda = 0.72\,. \tag{1.32}$$

En accord avec le résultat (1.31), nous considérerons par la suite un espace plat, hormis pour expliquer le problème de la platitude, à la sous-section 1.2.2 , et comment l'inflation le résout, à la sous-section 3.1.1.

Du Big Bang à nos jours

La loi d'évolution de la densité d'énergie (1.23) suffit à donner une image qualitative de l'évolution de l'univers même quand celui-ci est constitué d'un mélange de différents types de fluides. On en déduit en effet que l'histoire de l'univers peut se décomposer en une succession d'étapes, encore appelées *ères*, où chaque type de fluide, correspondant à une équation d'état donnée, domine tour à tour le contenu énergétique de l'univers à mesure que le facteur d'échelle croît ; il s'agit du modèle du Big Bang chaud :

- la première phase est l'*ère de radiation*, dominée par le rayonnement (photons et neutrinos). Cette phase, durant laquelle se déroule la nucléosynthèse primordiale, dure jusqu'à l'égalité matière-rayonnement à $a_{eq}^{-1} \simeq 3600$.

- L'*ère de matière* est dominée par la matière noire. À $a_{dec}^{-1} \simeq 1100$ a lieu le découplage entre les photons et les baryons, dû à la recombinaison des protons et des électrons libres qui s'assemblent pour former des atomes neutres. Après le découplage, les photons peuvent se propager librement dans l'Univers ; leur observation sous la forme

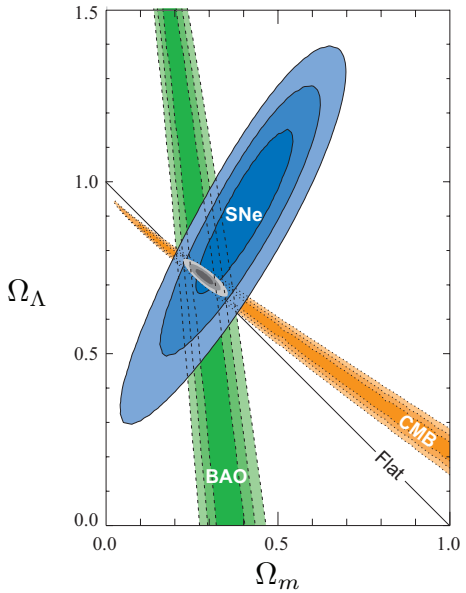

FIGURE 1.2 – Les observations du fond diffus cosmologique (CMB), des supernovae (SNe) et des oscillations baryons-photons (BAO) sont cohérentes entre elles et montrent que l'univers est actuellement en expansion accélérée. $\Omega_m = \Omega_b + \Omega_{cdm}$. Figure extraite de [224].

du fond diffus cosmologique joua un rôle déterminant dans l'acceptation du modèle du Big Bang chaud par la communauté cosmologique (voir par exemple la référence [384]).

– Enfin, les observations récentes du CMB, des supernovae et des oscillations baryons-photons indiquent que l'Univers est entré récemment dans une phase d'expansion accélérée, telle que $w \simeq -1$.

L'univers inhomogène

Au-delà de l'approximation d'un univers homogène et isotrope, les observations cosmologiques ont montré l'existence de petites fluctuations de densité, dites primordiales, au début de l'ère de radiation [221]. Selon le paradigme actuel, ces perturbations primordiales se sont effondrées sous l'effet de la gravité durant l'ère de la matière pour former les grandes structures que l'on observe aujourd'hui dans l'univers – galaxies et amas de galaxies. Cependant, dans le modèle du Big Bang chaud décrit plus haut, l'origine de ces fluctuations reste inexpliquée. On verra que l'inflation cosmologique propose une solution élégante à ce problème, de même qu'elle résout ceux du Big Bang chaud que nous exposons dans la section suivante.

1.2 Les problèmes du modèle du Big Bang chaud

Le modèle de concordance possède plusieurs problèmes, de nature et de complexité différentes. Un problème de taille est celui du secteur sombre : 95 % de la matière cosmique – matière noire froide et énergie noire – est de nature inconnue, non baryonique. La validité de la théorie classique de la relativité générale aux échelles d'énergie présente dans l'univers primordial n'a également rien d'évidente, des effets de gravitation quantique étant génériquement attendus. Ici, on se concentre sur les problèmes inhérents au modèle du Big Bang chaud : on va voir que l'état initial de l'univers dans le cadre de ce modèle requiert un degré d'ajustement fin [6] très important.

1.2.1 Le problème de l'horizon

Nous avons défini l'horizon comobile des particules (1.8) comme la distance maximale que la lumière peut parcourir entre le temps 0 et le temps t :

$$\tau \equiv \int_0^t \frac{\mathrm{d}t'}{a(t')} = \int_0^a \frac{\mathrm{d}a'}{H(a')a'^2} = \int_0^a \mathrm{d}\ln a' \left(\frac{1}{a'H(a')}\right) , \tag{1.33}$$

où nous avons exprimé ici l'horizon comobile comme une intégrale sur le *rayon de Hubble comobile*, $(aH)^{-1}$ (on note aussi souvent $\mathcal{H} \equiv aH$).

Dans un univers dominé par un fluide d'équation d'état w constante, on a

$$(aH)^{-1} = H_0^{-1} a^{\frac{1}{2}(1+3w)} \tag{1.34}$$

et

$$\tau = 2/(1+3w) H_0^{-1} a^{\frac{1}{2}(1+3w)} . \tag{1.35}$$

Pendant les phases conventionnelles du modèle du Big Bang ($w \gtrsim 0$), $(aH)^{-1}$ croît de manière monotone ainsi donc que l'horizon comobile. Ceci implique que les échelles comobiles (indépendantes du temps par définition) qui rentrent sous l'horizon actuellement étaient largement hors de l'horizon à l'époque du découplage. Plus précisément, on peut montrer [331] que les régions en contact causal à cette époque sont vues actuellement sous un angle d'environ 1°. Cependant, la température du fond diffus cosmologique est quasi-homogène sur toute la surface du ciel. L'univers dans le modèle du Big Bang était donc extrêmement homogène à l'époque du découplage sur des échelles recouvrant beaucoup de régions à priori causalement indépendantes ! Ceci constitue le problème de l'horizon.

1.2.2 Le problème de la platitude

L'équation de Friedmann (1.19) peut se réécrire sous la forme

$$1 - \Omega(a) = \frac{-K}{(aH)^2} \tag{1.36}$$

où

$$\Omega(a) \equiv \frac{\rho(a)}{\rho_{\mathrm{crit}}(a)} \tag{1.37}$$

6. *Finetuning* en anglais

et

$$\rho_{\rm crit}(a) \equiv 3H(a)^2 \,. \tag{1.38}$$

Dans la cosmologie standard, le rayon de Hubble comobile $(aH)^{-1}$ croît avec le temps (1.34) et donc $|\Omega - 1|$ également d'après l'équation (1.36). La quasi-platitude de l'espace observée aujourd'hui (1.31), $\Omega(a_0) \sim 1$, nécessite donc un ajustement fin de la courbure spatiale au début de l'univers. De manière quantitative, en dérivant par rapport au temps l'équation (1.36) et en utilisant l'équation de continuité (1.21), on obtient

$$\frac{d(\Omega - 1)}{d\ln a} = (1 + 3w)\Omega(\Omega - 1) \,. \tag{1.39}$$

Pour expliquer la petitesse de la courbure aujourd'hui, $|\Omega(a_0) - 1| \leq 0.1$, la déviation à la platitude à l'époque de l'égalité matière-rayonnement et à l'époque de Planck par exemple doivent vérifier les conditions très restrictives [331, 264] :

$$|\Omega(a_{\rm eg}) - 1| \lesssim 3 \times 10^{-5} \,, \tag{1.40}$$

$$|\Omega(a_{\rm pl}) - 1| \lesssim \mathcal{O}(10^{-61}) \,. \tag{1.41}$$

Le fait que l'univers observé n'émerge dans le modèle du Big Bang qu'à partir de ces conditions initiales très restrictives constitue le problème de la platitude.

ll est clair d'après l'équation (1.39) que le point $\Omega = 1$ est un point fixe instable si et seulement si la condition d'énergie forte $1+3w > 0$ est vérifiée. Rappelons que le comportement qualitatif du rayon de Hubble comobile dépend également du signe de $(1+3w)$ (1.34). Ceci laisse donc entrevoir une solution commune aux problèmes de la platitude et de l'horizon.

1.2.3 Le problème des reliques

Selon le paradigme moderne de la physique des particules, les lois de la nature étaient unifiées dans le passé avant que certaines symétries de jauge ne soient brisées. Lors de ces transitions de phase, des défauts topologiques ont pu se former, comme des monopoles ou des cordes cosmiques [269]. Toute théorie de grande unification basée sur un groupe de Lie simple en particulier produit des monopoles. La théorie des cordes prédit également l'existence de particules supersymétriques comme des gravitinos ou des particules de Kaluza-Klein. La densité d'énergie de ces particules massives décroît comme a^{-3} quand la température devient inférieure à leur masse. Comme la densité d'énergie de la radiation décroît comme a^{-4}, ces reliques peuvent, si leur durée de vie est suffisamment longue et selon leur densité initiale, dominer le contenu matériel de l'univers et contredire de nombreuses observations cosmologiques comme celles de l'abondance des éléments. Ce problème est connu sous le nom de problème des reliques ou problème des monopoles.

1.2.4 Le problème de l'origine des structures

Le modèle du Big Bang chaud basé sur le principe cosmologique décrit un espace de FLRW homogène et isotrope. La présence de structures dans l'univers – galaxies, amas de galaxies – ne peut donc pas être expliquée dans ce cadre. Cependant, même complété par la théorie des perturbations cosmologiques (*c.f.* le chapitre suivant), le modèle n'est

pas satisfaisant. En effet, les observations du fond diffus cosmologique ont mis en évidence la présence de fluctuations primordiales qui sont cohérentes sur des échelles plus grandes que celles de l'horizon à l'époque du découplage [385], et qui ne peuvent donc avoir été engendrées par un mécanisme causal dans le modèle du Big Bang. Ce problème de l'origine des structures peut donc être vu comme une manifestation du problème de l'horizon 1.2.1 au niveau des perturbations cosmologiques.

1.2.5 Sur le problème des conditions initiales

Il semble important de préciser que les problèmes de l'horizon, de la platitude et de l'origine des structures ne sont pas strictement incompatibles avec le modèle cosmologique standard. Si on suppose que l'univers a débuté avec une valeur de Ω suffisamment petite (1.41) et qu'il était homogène sur des distances plus grandes que celle de l'horizon (mais avec précisément le degré d'inhomogénéité requis pour expliquer la formation des structures), le modèle ne rentre pas en conflit avec les observations. Les problèmes du Big Bang chaud sont donc plutôt à considérer comme un manque de pouvoir explicatif du modèle, dans le sens où il requiert des conditions initiales très particulières pour expliquer l'état actuel de l'univers. Le succès de l'inflation cosmologique est que l'univers observé y émerge à partir de conditions initiales génériques.

Chapitre 2

L'univers inhomogène et la théorie des perturbations cosmologiques

Sommaire

2.1 Généralités **32**
2.1.1 La décomposition Scalaire Vecteur Tenseur 32
2.1.2 Perturbations de la géométrie et de la matière 36
2.2 Transformations de jauge **38**
2.2.1 Le problème de jauge 38
2.2.2 Approches active et passive des transformations de jauge 39
2.2.3 Variables invariantes de jauge 43
2.3 Dynamique **45**
2.3.1 Perturbations scalaires au premier ordre 45
2.3.2 Perturbations vectorielles et tensorielles au premier ordre 48
2.3.3 Perturbations adiabatiques et entropiques 49
2.4 Statistiques des perturbations cosmologiques **52**
2.4.1 Motivations et conventions 52
2.4.2 Spectres de puissance 53
2.4.3 Contraintes observationnelles sur l'univers inhomogène 55

Pour décrire les structures de l'univers, il faut dépasser sa description en termes d'un univers homogène et isotrope et considérer la théorie des perturbations cosmologiques. Quand la taille des perturbations est plus petite que la taille caractéristique de l'univers observable, le rayon de Hubble, on peut négliger la courbure de l'univers et appliquer la théorie newtonienne. On verra cependant que les échelles cosmologiques observables aujourd'hui étaient plus grandes que le rayon de Hubble au début de l'ère de radiation. Pour les décrire, on doit donc faire appel à la relativité générale, qui amène une complication de taille, l'invariance de jauge. Ceci a été résolu au niveau linéaire de la théorie des perturbations par Bardeen [30] qui a construit des variables dites invariantes de jauge. Celles-ci sont en général exhibées et on peut vérifier *à posteriori* leur caractère invariant. Motivés par l'étude des non-gaussianités primordiales et de la dynamique non linéaire de l'univers,

nous allons montrer une méthode pratique efficace pour construire des variables invariantes de jauge à un ordre perturbatif donné. Nous l'illustrerons à la sous-section 2.2.3 à l'ordre linéaire par simplicité mais les articles [345] et [253] reproduits dans ce mémoire l'utiliseront au second et au troisième ordre de la théorie des perturbations. Dans la suite, nous introduisons seulement les concepts et les outils nécessaires à la compréhension du travail mené dans cette thèse. Notre but n'est donc pas une présentation exhaustive de la théorie des perturbations cosmologiques pour laquelle on se référera utilement à la revue [291] dont notre présentation est inspirée.

Dans la suite, nous séparons les quantités physiques en une composante de fond, homogène, et une perturbation inhomogène, et ce par rapport à l'espace de fond plat de FLRW introduit au chapitre précédent (au chapitre 6, on verra une autre approche, dite covariante, dans laquelle les quantités physiques sont définies directement dans l'espace réel). Un tenseur $\mathbf{T}$ quelconque se décompose donc selon

$$\mathbf{T}(\tau, x^i) = \mathbf{T}_0(\tau) + \delta\mathbf{T}(\tau, x^i)\,, \tag{2.1}$$

où τ désigne le temps conforme (1.4) et x^i les coordonnées spatiales comobiles. La perturbation $\delta\mathbf{T}$ est ensuite développée perturbativement

$$\delta\mathbf{T}(\tau, x^i) = \sum_{n=1}^{\infty} \epsilon^n \delta\mathbf{T}_n(\tau, x^i)\,, \tag{2.2}$$

où nous incluons explicitement un petit paramètre ϵ et où l'indice n indique l'ordre perturbatif correspondant. La théorie linéaire correspond à ne considérer que les termes d'ordre ϵ^1, en négligeant leur carrés par exemple, d'ordre ϵ^2. Dès que possible, on omet le petit paramètre ϵ et l'indice 1 indiquant la théorie linéaire afin de ne pas surcharger les équations. On note également souvent la partie homogène avec une barre, *i.e.* on utilise indifféremment la notation $\mathbf{T}_0$ ou $\bar{\mathbf{T}}$, ou même $\mathbf{T}$ si le contexte est non-ambigu.

2.1 Généralités

2.1.1 La décomposition Scalaire Vecteur Tenseur

Hélicité et décomposition SVT en espace de Fourier

Il est d'usage courant en théorie des perturbations cosmologiques de travailler en espace de Fourier, et non en espace réel. A toute perturbation $\delta Q(\tau, \mathbf{x})$ sont donc associés ses modes de Fourier selon (voir la section 2.4 pour les conventions utilisées)

$$\delta Q(\tau, \mathbf{k}) = \int \mathrm{d}^3\mathbf{x}\, \delta Q(\tau, \mathbf{x}) e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}\,. \tag{2.3}$$

L'utilité de travailler dans cet espace réside dans le fait que différents modes de Fourier, *i.e.* différents nombres d'onde k, évoluent indépendamment, et ce en vertu du principe d'invariance par translation. Une preuve, très générale et très simple, qu'on peut trouver dans la référence [42], est la suivante.

Indépendance des différents modes de Fourier au niveau linéaire

Considérons l'évolution de N perturbations δQ_I, $I = 1, \ldots, N$ dans le régime linéaire, d'un temps initial τ_1 à un temps final τ_2

$$\delta Q_I(\tau_2, \mathbf{k}) = \sum_{J=1}^{N} \int \mathrm{d}^3\bar{\mathbf{k}}\; T_{IJ}(\tau_2, \tau_1, \mathbf{k}, \bar{\mathbf{k}}) \delta Q_J(\tau_1, \bar{\mathbf{k}})\,, \tag{2.4}$$

où $T_{IJ}(\tau_2, \tau_1, \mathbf{k}, \bar{\mathbf{k}})$ est une matrice de transfert et où nous avons autorisé le couplage de différents modes k. Considérons alors une transformation de coordonnées

$$\mathbf{x}' = \mathbf{x} + \Delta\mathbf{x}\,, \qquad \text{avec} \quad \Delta\mathbf{x} = \text{const.} \tag{2.5}$$

Sous cette transformation, les modes de Fourier acquièrent une phase

$$\delta Q'_I(\tau, \mathbf{k}) = e^{-i\mathbf{k}\cdot\Delta\mathbf{x}} \delta Q_I(\tau, \mathbf{k})\,. \tag{2.6}$$

La relation (2.4) peut donc se réécrire sous la forme

$$\delta Q'_I(\tau_2, \mathbf{k}) = \sum_{J=1}^{N} \int \mathrm{d}^3\bar{\mathbf{k}}\; e^{-i\mathbf{k}\cdot\Delta\mathbf{x}} T_{IJ}(\tau_2, \tau_1, \mathbf{k}, \bar{\mathbf{k}}) e^{i\bar{\mathbf{k}}\cdot\Delta\mathbf{x}}\, \delta Q'_J(\tau_1, \bar{\mathbf{k}}) \tag{2.7}$$

$$\equiv \sum_{J=1}^{N} \int \mathrm{d}^3\bar{\mathbf{k}}\; T'_{IJ}(\tau_2, \tau_1, \mathbf{k}, \bar{\mathbf{k}}) \delta Q'_J(\tau_1, \bar{\mathbf{k}})\,. \tag{2.8}$$

où T'_{IJ} désigne la matrice de transfert dans le système de coordonnées $'$. Par invariance par translation, celle-ci doit être identique à la matrice de transfert dans le système de coordonnées initial

$$T_{IJ}(\tau_2, \tau_1, \mathbf{k}, \bar{\mathbf{k}}) = e^{i(\bar{\mathbf{k}}-\mathbf{k})\cdot\Delta\mathbf{x}} T_{IJ}(\tau_2, \tau_1, \mathbf{k}, \bar{\mathbf{k}})\,, \tag{2.9}$$

et ce pour tout $\Delta\mathbf{x}$. Ainsi, soit $\bar{\mathbf{k}} = \mathbf{k}$ soit $T_{IJ}(t_2, t_1; \mathbf{k}, \bar{\mathbf{k}}) = 0$, *i.e.* à l'ordre linéaire, il n'y a pas de couplage entre différents modes de Fourier.

La décomposition des perturbations en composantes scalaires, vectorielles et tensorielles est ensuite facilement exprimée en espace de Fourier. Considérons une rotation d'angle ψ autour d'un axe parallèle au vecteur d'onde $\mathbf{k}$. Une perturbation est dite d'hélicité m si elle est multipliée par $e^{im\psi}$ sous l'effet d'une telle rotation. Les scalaires, vecteurs et tenseurs sont alors définis comme les états d'hélicité 0, ± 1, ± 2, respectivement.

Considérons un mode de Fourier de vecteur d'onde $\mathbf{k}$, qu'on peut supposer sans perte de généralité de la forme $\mathbf{k} = (0, 0, k)$. Dans la base

$$\mathbf{e}_\pm \equiv \frac{\mathbf{e}_1 \pm i\mathbf{e}_2}{\sqrt{2}}\,, \qquad \mathbf{e}_3\,, \tag{2.10}$$

où $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ est la base cartésienne, une rotation d'angle ψ autour de l'axe 3 a l'effet

$$\mathbf{e}'_\pm = e^{\pm i\psi}\mathbf{e}_\pm\,, \qquad \mathbf{e}'_3 = \mathbf{e}_3\,. \tag{2.11}$$

Les composantes contravariantes d'un tenseur de rang n quelconque $T_{i_1 i_2 \ldots i_n}$ se transforment selon

$$T'_{i_1 i_2 \ldots i_n} = e^{i(n_+ - n_-)\psi} T_{i_1 i_2 \ldots i_n} \equiv e^{im\psi} T_{i_1 i_2 \ldots i_n} \tag{2.12}$$

où n_+ et n_- comptent respectivement le nombre d'indices + et − dans $i_1 \ldots i_n$. L'hélicité est alors définie comme la différence $m \equiv n_+ - n_-$.

Dans la base d'hélicité $\{\mathbf{e}_\pm, \mathbf{e}_3\}$, un 3-scalaire α a une seule composante sans indices et est donc d'hélicité 0 ; un 3-vecteur β_i a 3 composantes $\beta_+, \beta_-, \beta_3$ d'hélicité ± 1 et 0 ; un 3-tenseur symétrique et de trace nulle γ_{ij} a 5 composantes $\gamma_{--}, \gamma_{++}, \gamma_{-3}, \gamma_{+3}, \gamma_{33}$ (la condition de trace nulle rend γ_{-+} redondant), d'hélicité ± 2, ± 1 et 0.

De la même façon que l'invariance par translation implique que différents modes de Fourier évoluent indépendamment, l'invariance par rotation implique que les scalaires, vecteurs et tenseurs d'hélicité évoluent indépendamment. Une preuve, très générale et très simple, qu'on peut trouver dans la référence [42], est la suivante.

Indépendance des différents modes d'hélicité au niveau linéaire

Considérons N perturbations δQ_I, $I = 1, \ldots, N$ d'hélicité m_I, dont l'évolution temporelle est donnée par la matrice de transfert $T_{IJ}(t_2, t_1, \mathbf{k})$ selon

$$\delta Q_I(t_2, \mathbf{k}) = \sum_{J=1}^{N} T_{IJ}(t_2, t_1, \mathbf{k}) \delta Q_J(t_1, \mathbf{k}) \,, \tag{2.13}$$

Sous l'effet d'une rotation de type explicité plus haut, les perturbations se transforment selon

$$\delta Q'_I(t, \mathbf{k}) = e^{im_I\psi} \delta Q_I(t, \mathbf{k}) \tag{2.14}$$

et on obtient

$$\delta Q'_I(t_2, \mathbf{k}) = \sum_{J=1}^{N} e^{im_I\psi}\, T_{IJ}(t_2, t_1, \mathbf{k})\, e^{-im_J\psi} \delta Q'_J(t_1, \mathbf{k}) \,. \tag{2.15}$$

L'invariance par rotation implique donc que

$$T_{IJ}(t_2, t_1, \mathbf{k}) = e^{i(m_I - m_J)\psi} T_{IJ}(t_2, t_1, \mathbf{k}) \,, \tag{2.16}$$

et ce pour tout angle ψ. Ainsi, $m_I = m_J$, *i.e.* δQ_I et δQ_J ont la même hélicité ou bien $T_{IJ}(t_2, t_1, \mathbf{k}) = 0$. Des modes d'hélicités différentes ne sont donc pas couplés au niveau linéaire.

Décomposition SVT en espace réel

On vient de voir que les 3-scalaires sont des scalaires d'hélicité, que les 3-vecteurs se décomposent en scalaires et vecteurs d'hélicité, et que les 3-tenseurs symétriques et de trace nulle se décomposent en scalaires, vecteurs et tenseurs d'hélicité. Nous reprenons ici cette décomposition en suivant une approche plus commune.

Un 3-scalaire est évidemment également un scalaire d'hélicité $\alpha = \alpha^S$. On peut montrer qu'un 3-scalaire β_i peut être décomposé en une partie longitudinale et une partie transverse (il s'agit du théorème d'Helmholtz)

$$\beta_i = \beta_i^S + \beta_i^V \,, \tag{2.17}$$

avec

$$\beta_i^S = \nabla_i \hat{\beta} \,, \qquad \nabla^i \beta_i^V = 0 \,, \tag{2.18}$$

ou encore, en espace de Fourier,

$$\beta_i^S = -\frac{ik_i}{k}\beta \,, \qquad k^i \beta_i^V = 0 \,. \tag{2.19}$$

Il est alors clair que β_i^S et β_i^V sont alors respectivement scalaire et vecteur d'hélicité au sens défini précédemment. Notons également que le vecteur β_i^V contient $3 - 1 = 2$ degrés de liberté suite à la contrainte de transversalité. La notation V indiquera par la suite un vecteur dans la terminologie des perturbations cosmologiques, *i.e.* un 3-vecteur de divergence nulle.

De manière similaire, un 3-tenseur symétrique et de trace nulle peut être décomposé selon

$$\gamma_{ij} = \gamma_{ij}^S + \gamma_{ij}^V + \gamma_{ij}^T \,, \tag{2.20}$$

avec

$$\gamma_{ij}^S = \left(\nabla_i \nabla_j - \frac{1}{3}\delta_{ij}\nabla^2\right)\hat{\gamma} \tag{2.21}$$

$$\gamma_{ij}^V = \frac{1}{2}\left(\nabla_i \hat{\gamma}_j^V + \nabla_j \hat{\gamma}_i^V\right) \,, \quad \nabla^i \hat{\gamma}_i^V = 0 \tag{2.22}$$

$$\nabla^i \gamma_{ij}^T = = 0 \tag{2.23}$$

ou, en espace de Fourier,

$$\gamma_{ij}^S = \left(-\frac{k_i k_j}{k^2} + \frac{1}{3}\delta_{ij}\right)\gamma \tag{2.24}$$

$$\gamma_{ij}^V = -\frac{i}{2k}\left(k_i \gamma_j^V + k_j \gamma_i^V\right) \,, \quad k^i \gamma_i^V = 0 \tag{2.25}$$

$$k^i \gamma_{ij}^T = = 0 \tag{2.26}$$

où nous avons défini $\gamma \equiv k^2 \hat{\gamma}$ et $\gamma_i^V \equiv k \hat{\gamma}_i^V$. Les quantités γ_{ij}^S, γ_{ij}^V et γ_{ij}^T sont alors respectivement scalaire, vecteur et tenseur d'hélicité. Notons que le tenseur symétrique γ_{ij}^T, de trace nulle et soumis aux conditions de transversalité, contient $3 \times 2 - 1 - 3 = 2$ degrés de liberté.

La décomposition, dite SVT (Scalaire Vecteur Tenseur), présentée dans cette sous-section est d'usage courant en cosmologie et sera utilisée constamment dans la suite de ce mémoire.

2.1.2 Perturbations de la géométrie et de la matière

Perturbations de la géométrie

L'espace de fond que nous considérons, homogène et isotrope, est décrit par la métrique d'un univers plat de FLRW

$$ds^2 = a^2 \left[-d\tau^2 + \delta_{ij} dx^i dx^j\right] , \tag{2.27}$$

où τ est le temps conforme et $a = a(\tau)$ le facteur d'échelle. La forme la plus générale de métrique perturbée autour d'un tel espace est

$$\mathrm{d}s^2 = a^2 \left[-(1+2A)\mathrm{d}\tau^2 + 2B_i \mathrm{d}x^i \mathrm{d}\tau + ((1-2\psi)\delta_{ij} + 2C_{ij})\mathrm{d}x^i \mathrm{d}x^j\right] \tag{2.28}$$

où ψ est un 3-scalaire appelé perturbation de courbure spatiale et C_{ij} est un 3-tenseur dit de cisaillement [1] symétrique et de trace nulle, $C^i_i \equiv \delta^{ij} C_{ij} = 0$. Les hypersurfaces de temps constant τ sont appelés feuilletages [2] et les courbes de coordonnées spatiales x^i constantes mais de temps τ variable sont appelées fils [3].

Suivant la décomposition SVT 2.1.1, nous écrivons

$$B_i = B_{,i} - S^V_i , \tag{2.29}$$

$$C_{ij} = E_{,ij} + F^V_{(i,j)} + \frac{1}{2} h_{ij} \tag{2.30}$$

où nous avons absorbé la partie en $\nabla^2 E \delta_{ij}$ du scalaire d'hélicité C^S_{ij} dans $\psi\delta_{ij}$. Les 10 degrés de liberté de la métrique perturbée ont ainsi été décomposés en

- 4 scalaires : A, B, ψ et E, correspondant à 4 degrés de liberté,
- 2 vecteurs : S^V_i et F^V_i, correspondant à $2 \times 2 = 4$ degrés de liberté,
- 1 tenseur : h_{ij}, correspondant à 2 degrés de liberté.

Dans la suite, nous montons et descendons les indices spatiaux des perturbations vectorielles et tensorielles avec la métrique spatiale de fond comobile, δ_{ij}, en accord avec le fait que les perturbations vivent dans l'espace de fond (voir l'article [73] par exemple pour une justification mathématique de cette assertion).

Perturbations de la matière

Dans le cadre de cette thèse, nous utilisons une description du contenu matériel de l'univers en terme d'un fluide [4]. Comme décrit à la sous-section 1.1.3, son tenseur énergie impulsion est caractérisé par sa quadrivitesse u^μ ainsi que la densité d'énergie ρ, la pression p et le tenseur de pression anisotrope $\pi_{\mu\nu}$ mesurés dans son référentiel au repos, selon

$$T_{\mu\nu} = (\rho + p)\, u_\mu u_\nu + p g_{\mu\nu} + \pi_{\mu\nu} , \tag{2.31}$$

où la densité d'énergie et la pression sont séparés en parties homogènes et parties perturbées

$$\rho = \bar{\rho} + \delta\rho , \qquad p = \bar{p} + \delta p . \tag{2.32}$$

1. *Shear* en anglais
2. *Slices* en anglais
3. *Threads* en anglais
4. Cette approche doit parfois être remplacée par une description statistique, notamment pour la radiation dans le régime de couplage faible.

Dans l'espace de fond, la quadrivitesse du fluide est donnée par $\bar{u}^\mu = a^{-1}\delta_0^\mu$ mais sa partie spatiale est en général non-nulle dans l'espace perturbé :

$$u^i \equiv \frac{v^i}{a}\,. \tag{2.33}$$

Comme la quadrivitesse comobile u^μ est soumise à la condition de normalisation $u_\mu u^\mu = -1$, la composante temporelle u^0 est entièrement déterminée en fonction de la partie spatiale v^i et des composantes de la métrique. Le 3-vecteur v^i est ensuite décomposé en sa partie scalaire (souvent appelée potentiel scalaire de vitesse) et sa partie vectorielle selon

$$v^i \equiv \delta^{ij} v_{,j} + v^{Vi}\,, \tag{2.34}$$

alors que le tenseur de pression anisotrope s'écrit sous la forme

$$\pi_{ij} = a^2 \left[\Pi_{,ij} - \frac{1}{3}\nabla^2 \Pi \delta_{ij} + \frac{1}{2}\left(\Pi^V_{i,j} + \Pi^V_{j,i}\right) + \Pi_{ij} \right]\,. \tag{2.35}$$

en suivant la décomposition générale (2.20).

Notons que nous n'avons pas fait usage de la notion d'ordre de perturbation dans la description de la métrique perturbée (2.28) ainsi que dans celle du tenseur énergie impulsion (2.31). Ces descriptions sont donc valables au-delà de l'approximation linéaire.

Liens avec d'autres approches à l'ordre linéaire

Dans les articles utilisant seulement la théorie linéaire des perturbations cosmologiques, on *définit* souvent

$$\delta\rho \equiv -\delta T^0_0 \quad \delta p \equiv \frac{1}{3}\delta T^i_i\,, \quad \delta q_i = \delta T^0_i\,. \tag{2.36}$$

On peut vérifier que les symboles $\delta\rho$ et δp ainsi définis coïncident bien à l'ordre linéaire avec les perturbations linéaires de la densité d'énergie propre et de la pression propre. On peut également montrer que les perturbations de densité d'énergie et de pression mesurées dans le référentiel défini par un vecteur u^μ quelconque, $\delta\rho^{(u)} \equiv \delta\left(T_{\mu\nu}u^\mu u^\nu\right)$ (1.15), et $\delta p^{(u)} \equiv \delta\left(\frac{1}{3}h^{\mu\rho}T_{\mu\nu}h^\nu_\rho\right)$, (1.16), ne dépendent pas de u^μ à l'ordre linéaire (et donc coïncident avec les valeurs mesurées dans le référentiel au repos). Aucun de ces résultats ne subsiste par contre au-delà de l'approximation linéaire et dans la suite, les perturbations de densité d'énergie et de pression sont définies par les équations (2.31)-(2.32).

A l'ordre linéaire, δT^0_i ne coïncide pas avec les composantes spatiales de la densité d'impulsion mesurée dans le référentiel au repos par rapport au fluide car dans ce référentiel, $q_\mu = 0$ par définition ! Par contre, pour le choix spécifique $a\,u^i_1 = -B^i_1$ (ou de manière équivalente $u_{i1} = 0$), les composantes spatiales de la perturbation de densité d'impulsion mesurée dans le référentiel défini par u^μ, $\delta q_i \equiv \delta\left(-u^\nu T_{\nu\rho}h^\rho_i\right)$, (1.17), coïncident avec δT^0_i où 0 fait référence au temps cosmique.

Dans l'approche que nous utilisons, q^μ est identiquement nul donc on peut sans risque de confusion utiliser le vecteur spatial δq_i défini plus haut (2.36), qu'on sépare en utilisant la décomposition SVT en sa partie scalaire, le potentiel d'impulsion, et sa partie vectorielle :

$$\delta q_i \equiv \delta T^0_i = \nabla_i \delta q + q^V_i\,, \qquad \nabla^i q^V_i = 0\,. \tag{2.37}$$

A l'ordre linéaire, on obtient [5]

$$\delta q_1 = (\bar{\rho}+\bar{p})(v_1+B_1)\,, \tag{2.38}$$
$$q^V_{i1} = (\bar{\rho}+\bar{p})(v^V_{i1}-S^V_{i1})\,. \tag{2.39}$$

Exemple des champs scalaires

Motivés par l'inflation multichamp , considérons N champs scalaires ϕ^I avec des termes cinétiques standard de Lagrangien

$$\mathcal{L}_{\rm mat} = -\frac{1}{2}\delta_{IJ}\partial_\mu\phi^I\partial^\mu\phi^J - V(\phi^I) \tag{2.40}$$

où $V(\phi^I)$ est un potentiel et nous plaçons les indices I, J relatifs aux champs scalaires indifféremment en haut ou en bas. Le tenseur énergie impulsion correspondant est donné par

$$T_{\mu\nu} = \partial_\mu\phi_I\partial_\nu\phi^I - g_{\mu\nu}\left(\frac{1}{2}\partial^\rho\phi_I\partial_\rho\phi^I + V\right)\,. \tag{2.41}$$

Dans l'univers de fond de FLRW (1.1), le tenseur énergie-impulsion (2.41) prend la forme de celui d'un fluide parfait de densités d'énergie et de pression données par :

$$\bar{\rho} = \frac{1}{2}\dot{\phi}_I\dot{\phi}^I + V\,, \tag{2.42}$$
$$\bar{p} = \frac{1}{2}\dot{\phi}_I\dot{\phi}^I - V\,. \tag{2.43}$$

Dans l'univers inhomogène, $\phi^I(t,\mathbf{x}) = \bar{\phi}^I(t) + \delta\phi^I(t,\mathbf{x})$, on obtient au niveau linéaire

$$\delta\rho_1 = \dot{\phi}^I(\delta\dot{\phi}_I - \dot{\phi}_I A) + V_{,I}\delta\phi^I\,, \tag{2.44}$$
$$\delta p_1 = \dot{\phi}^I(\delta\dot{\phi}_I - \dot{\phi}_I A) - V_{,I}\delta\phi^I\,, \tag{2.45}$$
$$\delta q_1 = -\frac{1}{a}\dot{\phi}_I\delta\phi^I \tag{2.46}$$

où on a omis par simplicité la barre $^-$ sur les quantités homogènes. Il n'y a évidemment aucun degré de liberté de type vectoriel en présence uniquement de champs scalaires et $q^V_{i1} = 0$.

2.2 Transformations de jauge

2.2.1 Le problème de jauge

Une subtilité importante dans la théorie des perturbations cosmologiques réside dans ce que l'on appelle le problème de jauge. Nous avons par exemple décomposé, sans nous poser de questions, la densité d'énergie ρ en sa partie homogène $\bar{\rho}$ et sa perturbation $\delta\rho$ dans l'équation (2.32). Or, $\bar{\rho}$ est une quantité définie sur l'espace de fond, une variété

5. Nous avons défini ici δq_i par l'équation (2.37) en temps conforme τ. La même définition en utilisant le temps cosmique t amène à une normalisation différente, telle que, avec des notations évidentes, $\delta q_t = a\delta q_\tau$. Dans l'article reproduit à la section 4.3 par exemple, nous utilisons le temps cosmique. On passe facilement d'une définition à une autre.

quadridimensionnelle $\bar{\mathcal{M}}$, en l'occurrence, un espace plat de FLRW, alors que $\delta\rho$ est définie sur un autre espace, l'espace physique, perturbé, $\mathcal{M}$. Pour pouvoir comparer ces deux quantités, et plus généralement deux tenseurs définis sur deux espaces différents, il faut d'une façon ou d'une autre procéder à une identification entre les points de ces deux espaces – ainsi qu'entre leurs espaces tangents et cotangents sur lesquels sont définis les tenseurs : ce choix, le choix d'une application bijective i de $\bar{\mathcal{M}}$ sur $\mathcal{M}$, est appelé un choix de jauge. Il est clair qu'une telle identification est purement géométrique et est donc indépendante d'un quelconque système de coordonnées, sur l'espace de fond $\bar{\mathcal{M}}$ comme sur l'espace physique $\mathcal{M}$. En particulier, pour une jauge donnée, on peut effectuer un changement de coordonnées, de manière cohérente sur les deux espaces dont les points sont identifiés, mais ceci n'a rien à voir avec un changement de jauge. La pratique souvent rencontrée de parler indifféremment de choix de jauge ou de choix de coordonnées réside dans le fait suivant : on identifie le plus souvent les points d'un espace à l'aide d'un système de coordonnées. Si un tel système est donné pour l'espace de fond $\bar{\mathcal{M}}$ — il en existe de très naturels étant donné ses symétries — on peut le transporter sur $\mathcal{M}$ via l'identification i. Deux choix de jauge différents, i_1 et i_2, définissent donc naturellement deux systèmes de coordonnées différents sur $\mathcal{M}$, et un changement de jauge peut dans ce sens être interprété comme un changement de coordonnées sur $\mathcal{M}$, à coordonnées fixes sur $\bar{\mathcal{M}}$.

2.2.2 Approches active et passive des transformations de jauge

Dans la suite de ce mémoire, et dans certains des articles qui y sont reproduits en particulier, nous utilisons l'approche dite *active* des transformations de jauge. Dans cette approche, un vecteur ξ^μ génère une transformation de jauge qui est *définie* par la loi de transformation de tout tenseur

$$\widetilde{\mathbf{T}} = e^{\pounds_\xi}\mathbf{T}\,, \tag{2.47}$$

où $\pounds_\xi$ désigne la dérivée de Lie par rapport à ξ^μ (voir la référence [409] par exemple pour des rappels géométriques). La loi de transformation des fonctions coordonnées n'est alors qu'un cas particulier de cette relation générale. Dans l'autre approche communément utilisée, dite *passive*, on donne d'abord la relation entre deux systèmes de coordonnées et on calcule ensuite comment les perturbations de différentes quantités se transforment sous l'effet de cette transformation de coordonnées. Les deux approches sont équivalentes mais leur mise en pratique diffère et l'approche active nécessite moins de calculs au-delà de l'approximation linéaire. Nous les décrivons maintenant brièvement avant de discuter dans la sous-section 2.2.3 la construction de quantités invariantes sous l'effet de transformations de jauge. Dans les équations suivantes, nous gardons à la fois l'indice qui indique l'ordre de perturbation ainsi que le paramètre infinitésimal ϵ.

Approche active

Le point de départ de l'approche active est la loi de transformation des tenseurs (2.47) où ξ^μ est le champ de vecteur générateur de la transformation. Celui-ci peut être décomposé perturbativement,

$$\xi^\mu \equiv \epsilon\xi_1^\mu + \frac{1}{2}\epsilon^2\xi_2^\mu + \frac{1}{3!}\epsilon^3\xi_3^\mu + O(\epsilon^4)\,, \tag{2.48}$$

où nous avons poussé le développement jusqu'à l'ordre 3 en accord avec l'usage fait dans ce mémoire[6]. Développant en série la fonction exponentielle ainsi que le tenseur $\mathbf{T}$ comme indiqué par la relation (2.2), on trouve les lois de transformations suivantes pour les parties homogène, linéaire, quadratique et cubique de tout tenseur [73, 297]

$$\widetilde{\mathbf{T}_0} = \mathbf{T}_0\,, \tag{2.49}$$

$$\widetilde{\delta\mathbf{T}_1} = \delta\mathbf{T}_1 + \pounds_{\xi_1}\mathbf{T}_0\,, \tag{2.50}$$

$$\widetilde{\delta\mathbf{T}_2} = \delta\mathbf{T}_2 + \pounds_{\xi_1}\delta\mathbf{T}_1 + \frac{1}{2}\left(\pounds_{\xi_2} + \pounds^2_{\xi_1}\right)\mathbf{T}_0\,, \tag{2.51}$$

$$\widetilde{\delta\mathbf{T}_3} = \delta\mathbf{T}_3 + \pounds_{\xi_1}\delta\mathbf{T}_2 + \frac{1}{2}\left(\pounds_{\xi_2} + \pounds^2_{\xi_1}\right)\delta\mathbf{T}_1 + \frac{1}{6}\left(\pounds_{\xi_3} + 3\pounds_{\xi_1}\pounds_{\xi_2} + \pounds^3_{\xi_1}\right)\mathbf{T}_0\,. \tag{2.52}$$

Notons que les quantités homogènes ne sont évidemment pas affectées par le changement de jauge.

En appliquant la relation (2.47) à la fonction coordonnée x^μ (à μ fixé, il s'agit d'une fonction scalaire), on obtient la relation entre les coordonnées du point image q et celles de son antécédent p :

$$x^\mu(q) = e^{\xi^\lambda \frac{\partial}{\partial x^\lambda}\big|_p}\, x^\mu(p)\,, \tag{2.53}$$

où nous avons utilisé le fait que la dérivée de Lie d'un scalaire est une dérivée ordinaire, $\pounds_\xi = \xi^\mu(\partial/\partial x^\mu)$. On peut ensuite développer l'équation (2.53) au second ordre par exemple, obtenant

$$x^\mu(q) = x^\mu(p) + \epsilon\xi_1^\mu(p) + \frac{1}{2}\epsilon^2\left(\xi^\mu_{1,\nu}(p)\xi_1{}^\nu(p) + \xi_2^\mu(p)\right) + O(\epsilon^2)\,. \tag{2.54}$$

Rappelons néanmoins que nous n'avons pas besoin des relations (2.53)-(2.54) pour déterminer comment les perturbations se transforment sous l'effet d'une transformation de jauge.

Approche passive

L'approche passive, plus connue, est beaucoup utilisée à l'ordre linéaire, dans l'article original de Bardeen par exemple [30] et dans les articles de revue de Kodama et Sasaki [214], et de Mukhanov, Feldman, et Brandenberger [315]. Dans cette approche, on spécifie la relation entre deux systèmes de coordonnées, infinitésimalement proches, puis on calcule les changements induits pour les différentes quantités d'intérêt, métrique et variables décrivant la matière. La relation fonctionnelle entre les deux systèmes peut prendre une forme arbitraire mais pour relier les deux approches, nous allons considérer une transformation de la forme (2.54), que nous allons réexprimer dans l'approche passive, *i.e.* plutôt que d'écrire la coordonnée du point q en fonction de la coordonnée du point p dans un système de coordonnées donné, Eq. (2.54), nous allons déterminer le changement de coordonnées $x^\mu \to \widetilde{x^\mu}$ tel que la nouvelle coordonnée du point image q coïncide avec l'ancienne

6. Notons qu'une transformation de jauge fait passer d'un choix d'identification i_1, défini par un vecteur ξ^1, à un autre choix d'identification i_2, défini par un vecteur ξ^2. On peut donc exprimer le vecteur résultant ξ en fonction de ξ^1 et ξ^2. On verra à la sous-section 2.2.3 qu'en pratique, on peut se passer de cette relation pour passer explicitement d'une jauge à une autre. Pour plus de détails, et une approche rigoureuse mathématiquement, on peut se référer à [73, 386, 289].

coordonnée du point p, $\widetilde{x^\mu}(q) = x^\mu(p)$. À partir de (2.54), on obtient

$$\widetilde{x^\mu}(q) = x^\mu(q) - \epsilon\xi_1^\mu(p) - \frac{1}{2}\epsilon^2\left(\xi_{1,\nu}^\mu(p){\xi_1}^\nu(p) + \xi_2^\mu(p)\right) + O(\epsilon^2)\,, \tag{2.55}$$

et comme

$$x^\mu(p) = x^\mu(q) - \epsilon\xi_1^\mu(p) + O(\epsilon) = x^\mu(q) - \epsilon\xi_1^\mu(q) + O(\epsilon)\,, \tag{2.56}$$

on peut exprimer le membre de droite de (2.55) en fonction de quantités évaluées au point q [73, 289]

$$\widetilde{x^\mu}(q) = x^\mu(q) - \epsilon\xi_1^\mu(q) + \epsilon^2\frac{1}{2}\left(\xi_1^\mu(q)_{,\nu}{\xi_1}^\nu(q) - \xi_2^\mu(q)\right) + O(\epsilon^2)\,, \tag{2.57}$$

les termes négligés étant d'ordre supérieur. Ceci constitue, au second ordre, le point de départ de l'interprétation passive de la transformation de jauge active (2.47)-(2.57). Le travail consiste ensuite à identifier une quantité invariante qui permette de relier les quantités à évaluer dans les deux systèmes de coordonnées.

Pour illustrer la démarche, déterminons la loi de transformation sous le changement de coordonnées (2.57), jusqu'au second ordre dans la théorie des perturbations, d'un quadriscalaire, la densité d'énergie ρ par exemple. En sa qualité de quadriscalaire, il est invariant sous l'effet d'un changement de coordonnées, *i.e.*

$$\tilde{\rho}(\tilde{x}^\mu) = \rho(x^\mu)\,, \tag{2.58}$$

mais ce n'est évidemment pas le cas de sa partie perturbée. Les développement des membres de droite et de gauche de (2.58) s'écrivent respectivement

$$\rho(x^\mu) = \rho_0(x^0) + \epsilon\delta\rho_1(x^\mu) + \frac{\epsilon^2}{2}\delta\rho_2(x^\mu) + O(\epsilon^3) \tag{2.59}$$

$$\tag{2.60}$$

et

$$\widetilde{\rho}(\tilde{x}^\mu) = \rho_0\left(\widetilde{x^0}\right) + \epsilon\widetilde{\delta\rho_1}\left(\widetilde{x^\mu}\right) + \frac{\epsilon^2}{2}\widetilde{\delta\rho_2}\left(\widetilde{x^\mu}\right) + O(\epsilon^3)\,. \tag{2.61}$$

En utilisant (2.57), on obtient

$$\begin{aligned}\widetilde{\rho}(\tilde{x}^\mu) &= \rho_0 + \epsilon\left(-\rho_0'\xi_1^0 + \widetilde{\delta\rho_1}\right) \\ &+ \frac{\epsilon^2}{2}\left(\rho_0'\left(\xi_{1,\nu}^0\xi_1^\nu - \xi_2^0\right) + \rho_0''\left(\xi_1^0\right)^2 - 2\widetilde{\delta\rho_{1,\nu}}\xi_1^\nu + \widetilde{\delta\rho_2}\right) + O(\epsilon^3)\,.\end{aligned} \tag{2.62}$$

où toutes les quantités du membre de droite sont évaluées en x^μ. On obtient ainsi successivement la loi de transformation au premier ordre

$$\widetilde{\delta\rho_1} = \delta\rho_1 + \rho_0'\xi_1^0 \tag{2.63}$$

et au second ordre

$$\widetilde{\delta\rho_2} = \delta\rho_2 + \rho_0'\left(\xi_{1,\mu}^0\xi_1^\mu + \xi_2^0\right) + \rho_0''\left(\xi_1^0\right)^2 + 2\delta\rho_{1,\mu}\xi_1^\mu\,. \tag{2.64}$$

Par comparaison, ces lois de transformations sont obtenues de manière immédiate dans l'approche active en appliquant les relations (2.50) et (2.51). Ceci démontre, dans le cas pourtant très simple d'un quadriscalaire, l'avantage pratique décisif de l'approche active. Notons enfin, par soucis d'exhaustivité, que les lois de transformations de la métrique peuvent être obtenues de manière similaire dans l'approche passive en utilisant l'invariance de l'élément de longueur :

$$ds^2 = \tilde{g}_{\mu\nu} d\tilde{x}^\mu d\tilde{x}^\nu = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \,. \tag{2.65}$$

Dans la suite, nous utiliserons une décomposition SVT du vecteur générateur de la transformation ξ ordre par ordre. Ainsi, sa partie linéaire se décompose selon

$$\xi_1^\mu = \left(\alpha_1, \beta_{1,}{}^i + \gamma_1^{Vi}\right) \,, \tag{2.66}$$

et similairement pour les ordres supérieurs. Le choix des deux fonctions scalaires α_1 et β_1 (et de leurs homologues aux ordres supérieurs $\alpha_2\,, \beta_2 \ldots$) représente respectivement différents choix de feuilletage et de filage.

Transformation des composantes de la métrique et de la matière à l'ordre linéaire

Nous donnons ici les lois de transformation à l'ordre linéaire des composantes scalaires, vectorielles et tensorielles de la métrique. Elles découlent sans difficultés de la relation (2.50) appliquée au tenseur métrique et on peut en trouver des démonstrations dans la référence [291].

On obtient pour les scalaires

$$\widetilde{A_1} = A_1 + \mathcal{H}\alpha_1 + \alpha_1' \,, \tag{2.67}$$
$$\widetilde{\psi_1} = \psi_1 - \mathcal{H}\alpha_1 \,, \tag{2.68}$$
$$\widetilde{B_1} = B_1 - \alpha_1 + \beta_1' \,, \tag{2.69}$$
$$\widetilde{E_1} = E_1 + \beta_1 \,, \tag{2.70}$$

et

$$\widetilde{S_1^{Vi}} = S_1^{Vi} - \left(\gamma_1^{Vi}\right)' \,, \tag{2.71}$$
$$\widetilde{F_1^{Vi}} = F_1^{Vi} + \gamma_1^{Vi} \,. \tag{2.72}$$

pour les perturbations vectorielles (on rappelle que $\mathcal{H} = aH$). La perturbation tensorielle h_{1ij} est, elle, indépendante de la jauge choisie en accord avec le fait que le générateur de la transformation est un quadrivecteur, donc ne contient pas de composantes tensorielles, et qu'on travaille à l'ordre linéaire.

Pour la matière, la loi de transformations des quadriscalaires ρ et p a déjà été donnée (2.63)-(2.64). Quant à sa vitesse (2.33), ses parties scalaire et vectorielle (2.34) se transforment à l'ordre linéaire selon

$$\widetilde{v_1} = v_1 - \beta_1' \,, \tag{2.73}$$
$$\widetilde{v_1^{Vi}} = v_1^{Vi} - \left(\gamma_1^{Vi}\right)' \,. \tag{2.74}$$

2.2.3 Variables invariantes de jauge

La liberté dans le choix de jauge peut mener à des confusions, avec des comportements différents pour les mêmes quantités évaluées dans des jauges différentes. Afin d'éviter ces confusions, une solution consiste à utiliser des variables invariantes de jauge – en pratique jusqu'à un certain ordre de la théorie des perturbations – *i.e.* des variables dont la valeur est indépendante de la jauge choisie. Ainsi, on peut facilement comparer différents calculs menés dans des jauges différentes. Mieux, d'après la covariance générale des équations d'Einstein $G_{\mu\nu} - 8\pi G T_{\mu\nu} = 0$, on sait que leur développement ne fera intervenir que des quantités invariantes de jauge. On peut donc utiliser la liberté de jauge pour simplifier les calculs intermédiaires en travaillant dans une jauge donnée, et en remplaçant à la fin du calcul toutes les quantités par leur définition invariante de jauge, *i.e.* les variable invariantes de jauge qui se réduisent, dans la jauge donnée, aux quantités considérées.

Nous détaillons maintenant la construction à l'ordre linéaire, suivant cette démarche, de différentes quantités invariantes de jauge, et présentons par la même occasion des variables et jauges utilisées couramment dans la suite de ce mémoire.

Jauge longitudinale

Nous n'utiliserons pas la jauge longitudinale [315], encore appelée jauge newtonienne, dans la suite de cette thèse mais sa présentation est l'occasion de détailler le mécanisme de construction de variables invariantes de jauge, en l'occurrence les fameux potentiels de Bardeen [30] qui sont d'usage courant en cosmologie. Cette jauge est définie, partiellement, par le fait que le potentiel de cisaillement

$$\sigma_1 \equiv E_1' - B_1 \,, \tag{2.75}$$

y soit nul. D'après les équations (2.69),(2.70), il se transforme selon $\widetilde{\sigma_1} = \sigma_1 + \alpha_1$. Ainsi, pour obtenir les perturbations dans la jauge longitudinale à partir d'une jauge arbitraire, il faut procéder à une transformation telle que

$$\alpha_{1\ell} = -\sigma_1 = B_1 - E_1' \,. \tag{2.76}$$

La jauge longitudinale est complètement fixée en requérant de plus $\widetilde{E_{1\ell}} = 0$ [et donc $\widetilde{B_{1\ell}} = 0$ d'après (2.76)]. Les deux autres perturbations scalaires de la métrique, A_1, et ψ_1, sont, elles, données d'après les équations (2.67) et (2.68) par

$$\Phi \equiv \widetilde{A_{1\ell}} = A_1 + \mathcal{H}(B_1 - E_1') + (B_1 - E_1')' \,, \tag{2.77}$$

$$\Psi \equiv \widetilde{\psi_{1\ell}} = \psi_1 - \mathcal{H}\left(B_1 - E_1'\right) \,. \tag{2.78}$$

Ces deux variables — les potentiels de Bardeen — sont par construction invariantes de jauge et se réduisent aux perturbations de métrique A_1 et ψ_1 dans la jauge longitudinale.

Jauge plate

Une autre jauge, que nous allons particulièrement utiliser pour traiter l'inflation multi-champ, est la jauge plate dans laquelle les hypersurfaces spatiales ne sont pas affectées par

les perturbations scalaires et vectorielles, *i.e.* $\widetilde{\psi_1} = \widetilde{E_1} = 0$ et $\widetilde{F_1^V}_i = \mathbf{0}$. D'après les équations (2.68), (2.70) et (2.72), cela correspond à une transformation de jauge de paramètre ξ_1 (2.66) tel que

$$\alpha_{1\text{plat}} = \frac{\psi_1}{\mathcal{H}}\,, \qquad \beta_{1\text{plat}} = -E_1\,, \qquad \gamma^{Vi}_{1\text{plat}} = -F_1^{Vi}\,. \tag{2.79}$$

Les perturbations de quantités scalaires dans la jauge plate, comme celles de champs scalaires ϕ^I par exemple, ont, d'après l'équation (2.63), la définition invariante de jauge

$$\widetilde{\delta\varphi^I_{1\text{plat}}} \equiv \delta\varphi^I_1 + \varphi_0^{I\prime}\frac{\psi_1}{\mathcal{H}}\,. \tag{2.80}$$

Jauge comobile

Une jauge comobile est une jauge qui suit le mouvement d'ensemble de la matière, *i.e.* dans cette jauge, la densité d'impulsion $q_i \equiv T_i^0$ (2.37) est nulle. A l'ordre linéaire, cela correspond d'après les équations (2.38)-(2.39) à imposer

$$\widetilde{v_1} + \widetilde{B_1} = 0\,, \tag{2.81}$$

$$\widetilde{v^V_{i1}} - \widetilde{S^V_{i1}} = 0\,. \tag{2.82}$$

D'après les lois de transformations (2.69) et (2.73), la densité scalaire d'impulsion s'annule sous l'effet d'une transformation de jauge telle que

$$\alpha_{1\text{com}} = v_1 + B_1\,. \tag{2.83}$$

Par contre, d'après les relations (2.71)-(2.74), la densité vectorielle d'impulsion $v_i^V - S_i^V$ est invariante de jauge à l'ordre linéaire. Si elle est non-nulle — ce n'est pas le cas pour un univers dominé par des champs scalaires comme on l'a vu à la sous-section 2.1.2 — ceci manifeste la présence de vorticité dans le fluide cosmique. Il n'est donc pas possible en général de se placer dans la jauge comobile définie plus haut. Par conséquent, la notion de jauge comobile est souvent employée dans la littérature au sens plus restreint d'annulation de la densité scalaire d'impulsion. Ceci ne fixe néanmoins pas complètement la jauge, même au niveau scalaire, le paramètre β_1 pouvant prendre n'importe quelle valeur, de telle façon à annuler par exemple les perturbations scalaires de la métrique B_1 ou E_1.

En appliquant la transformation (2.83), on peut écrire la définition invariante de jauge de la perturbation de courbure ψ_1 dans la jauge comobile

$$\begin{aligned} \mathcal{R} \equiv \widetilde{\psi_{1\text{com}}} &= \psi_1 - \mathcal{H}\,(v_1 + B_1) \\ &= \psi_1 - \mathcal{H}\frac{\delta q_1}{\rho_0 + p_0} \end{aligned} \tag{2.84}$$

où la seconde ligne vient de l'équation (2.38). Cette quantité jouera un rôle central pendant notre étude de l'inflation. Une autre variable invariante de jauge d'intérêt est la perturbation de densité dans la jauge comobile, communément appelée perturbation de densité comobile [7]

$$\begin{aligned} \delta\epsilon \equiv \widetilde{\delta\rho_{1\text{com}}} &= \delta\rho_1 + \rho_0'\,(v_1 + B_1) \\ &= \delta\rho_1 - 3\mathcal{H}\delta q_1\,. \end{aligned} \tag{2.85}$$

7. La notation $\delta\epsilon$ est d'usage courant et n'a évidemment rien à voir avec le paramètre perturbatif (2.2) ou le paramètre de variation lente (3.6).

Jauge de densité d'énergie uniforme

La dernière jauge qui nous sera particulièrement utile est la jauge de densité d'énergie uniforme dans laquelle on impose que la perturbation de densité soit nulle. D'après l'équation (2.63), $\widetilde{\delta\rho_1} = 0$ est obtenu par le choix de feuilletage à l'ordre linéaire

$$\alpha_{1\delta\rho} = -\frac{\delta\rho_1}{\rho_0'}\,. \tag{2.86}$$

D'après (2.68), la perturbation de courbure sur les hypersurfaces de densité d'énergie uniforme a la définition invariante de jauge [119, 294]

$$-\zeta_1 \equiv \widetilde{\psi_{1\delta\rho}} = \psi_1 + \mathcal{H}\frac{\delta\rho_1}{\rho_0'} \tag{2.87}$$

où le signe est choisi pour que ζ_1 ainsi défini coïncide avec la définition de Bardeen [31]. On a encore la liberté de choisir la jauge spatiale, par exemple en choisissant β tel que $\tilde{B}$, $\tilde{E}$ ou $\tilde{v}$ s'annulent.

Nous avons montré dans cette sous-section une méthode de construction explicite de quantités invariantes de jauge à l'ordre linéaire. Évidemment, elle peut être appliquée aux ordres supérieurs de la théorie des perturbations, et c'est même là que résident son intérêt pratique et sa puissance, ce pour quoi on renvoie le lecteur à la revue [291] dans laquelle des résultats très généraux sont exposés. Nous appliquons cette méthode au cas d'un univers dominé par des champs scalaires au deuxième et au troisième ordre dans la théorie des perturbations dans les articles [345] et [253] respectivement, reproduits aux sections 6.2 et 6.3 de ce mémoire.

2.3 Dynamique

Après avoir décrit dans les sections précédentes les perturbations de métrique et de matière ainsi que la construction de variables invariantes de jauge, nous donnons ici les équations d'Einstein linéarisées autour d'un espace de fond plat de FLRW ainsi que la partie linéarisée des équations de conservation du tenseur énergie-impulsion – qui découlent des identités de Bianchi dans le cadre de la relativité générale d'Einstein –

$$\nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0\,. \tag{2.88}$$

Nous ne traitons ici que de la théorie linéaire. Sans confusion possible donc, et pour alléger les notations, nous omettons l'indice 1 dénotant l'ordre linéaire de la théorie des perturbations et l'indice 0 indiquant l'espace de fond. Nous avons également démontré à la sous-section 2.1.1 le découplage au niveau linéaire entre les scalaires, vecteurs et tenseurs au sens des perturbations cosmologiques, que nous traitons donc tour à tour.

2.3.1 Perturbations scalaires au premier ordre

Équations d'Einstein

La composante purement temporelle $0-0$ et la composante mixte $0-i$ des équations d'Einstein (1.11) donnent des équations différentielles du premier ordre en temps,

autrement dit des équations non-dynamiques, encore appelées équations de contrainte, respectivement d'énergie et d'impulsion [214, 315] :

$$3\mathcal{H}\left(\psi' + \mathcal{H}A\right) - \nabla^2\left[\psi + \mathcal{H}\sigma\right] = -4\pi G a^2 \delta\rho, \tag{2.89}$$

$$\psi' + \mathcal{H}A = -4\pi G a^2 \delta q \tag{2.90}$$

où nous rappelons que σ désigne le potentiel de cisaillement (2.75). On peut les réexprimer en termes invariants de jauge

$$\Psi' + \mathcal{H}\Phi - \frac{\mathcal{H}' - \mathcal{H}^2}{\mathcal{H}}\Psi - \frac{1}{3\mathcal{H}}\nabla^2\Psi = \frac{\mathcal{H}' - \mathcal{H}^2}{\mathcal{H}}\zeta\,, \tag{2.91}$$

$$\Psi' + \mathcal{H}\Phi - \frac{\mathcal{H}' - \mathcal{H}^2}{\mathcal{H}}\Psi = -\frac{\mathcal{H}' - \mathcal{H}^2}{\mathcal{H}}\mathcal{R}\,, \tag{2.92}$$

reliant ainsi les perturbations de courbure ζ et $\mathcal{R}$ aux potentiels de Bardeen. Ces équations peuvent également être combinées pour donner la généralisation invariante de jauge de l'équation de Poisson :

$$\nabla^2\Psi = -3\left(\mathcal{H}' - \mathcal{H}^2\right)(\zeta + \mathcal{R}) = 4\pi G a^2 \delta\epsilon\,, \tag{2.93}$$

reliant la perturbation de courbure dans la jauge longitudinale (2.78) à la perturbation de densité comobile (2.85). Celle-ci est donc supprimée aux grandes échelles par rapport à la perturbation de métrique Ψ, auquel cas ζ et $-\mathcal{R}$ coïncident.

Les autres composantes des équations d'Einstein donnent deux équations dynamiques

$$\psi'' + 2\mathcal{H}\psi' + \mathcal{H}A' + \left(2\mathcal{H}' + \mathcal{H}^2\right)A = 4\pi G a^2\left(\delta p + \frac{2}{3}\nabla^2\Pi\right)\,, \tag{2.94}$$

$$\sigma' + 2\mathcal{H}\sigma + \psi - A = 8\pi G a^2 \Pi\,, \tag{2.95}$$

où Π est la partie scalaire du tenseur de pression anisotrope (2.35). L'équation (2.95) est une équation d'évolution pour le potentiel de cisaillement mais elle peut également être interprétée comme une équation de contrainte entre les deux potentiels de Bardeen Φ (2.77) et Ψ (2.78) :

$$\Psi - \Phi = 8\pi G a^2 \Pi\,. \tag{2.96}$$

En particulier, en absence de pression anisotrope — c'est le cas pendant la majeure partie de l'évolution de l'univers — on a $\Psi = \Phi$, auquel cas l'équation (2.94) devient une équation du second ordre pour Ψ :

$$\Psi'' + 3\mathcal{H}\Psi' + \left(2\mathcal{H}' + \mathcal{H}^2\right)\Psi = 4\pi G a^2 \delta p\,. \tag{2.97}$$

Il est utile de séparer la perturbation de pression δp selon $\delta p = c_s^2\delta\rho + \delta p_{\rm nad}$ où

$$c_s^2 \equiv \frac{p'}{\rho'} \tag{2.98}$$

est appelé la vitesse du son adiabatique et

$$\delta p_{\rm nad} \equiv \delta p - \frac{p'}{\rho'}\delta\rho\,, \tag{2.99}$$

invariant de jauge d'après l'équation (2.63), est appelé perturbation de pression non-adiabatique. En utilisant la relation (2.89), on obtient alors

$$\Psi'' + 3(1+c_s^2)\mathcal{H}\Psi' + [2\mathcal{H}' + (1+3c_s^2)\mathcal{H}^2 - c_s^2\nabla^2]\Psi = 4\pi G a^2 \delta p_{\rm nad}\,. \tag{2.100}$$

En utilisant les équations de Friedmann, la vitesse du son adiabatique peut être exprimée en fonction du facteur d'échelle et de ses dérivées. Pour les modes de grandes longueurs d'onde et pour des perturbations adiabatiques ($\delta p_{\rm nad} = 0$), l'équation précédente peut alors être intégrée explicitement pour donner

$$\Psi = \frac{\mathcal{H}}{a^2}\left[a_1 \int \mathrm{d}\eta \frac{a^2(\mathcal{H}' - \mathcal{H}^2)}{\mathcal{H}^2} + a_2\right] \tag{2.101}$$

où a_1 et a_2 sont deux constantes d'intégration. Pour un facteur d'échelle évoluant en loi de puissance $a \propto t^p$, on obtient

$$\Psi = -\frac{\alpha}{p+1} + \beta p t^{-p-1}\,. \tag{2.102}$$

Il y a donc deux modes : l'un croissant (constant ici en fait) et l'autre décroissant. Dans une transition entre une phase pendant laquelle $a \propto t^{p_1}$ et une autre pendant laquelle $a \propto t^{p_2}$, la solution (2.102) permet de relier les valeurs asymptotiques de Ψ dans les deux phases (une fois que les modes décroissants sont devenus négligeables) :

$$\Psi_2 = \frac{p_1+1}{p_2+1}\Psi_1\,. \tag{2.103}$$

Ainsi, on obtient la fameuse relation

$$\Psi_{\rm mat} = \frac{9}{10}\Psi_{\rm rad} \tag{2.104}$$

qui relie la valeur du potentiel de Bardeen dans l'ère de radiation à sa valeur dans l'ère de la matière en absence de pression anisotrope (en négligeant les neutrinos en particulier) et pour des perturbations adiabatiques (voir la sous-section 2.3.3 pour plus de détails).

Conservation de l'énergie et de l'impulsion

La conservation du tenseur énergie-impulsion *total* est une conséquence des équations de Bianchi de la relativité générale. Les équations de perturbations correspondantes peuvent donc être obtenues par manipulations des équations d'Einstein. Cependant, plusieurs types de fluides coexistent en général dans l'univers et s'ils sont sans interactions (autres que gravitationnelles), le tenseur-énergie impulsion de *chacun* est conservé. Dans cet esprit, il est utile de considérer les conséquences pour les perturbations de la conservation du tenseur énergie-impulsion. De (2.88), on obtient l'équation de continuité et l'équation d'Euler :

$$\delta\rho' + 3\mathcal{H}\left(\delta\rho + \delta p\right) - 3\left(\rho + p\right)\psi' + (\rho + p)\nabla^2\left(V + \sigma\right) = 0\,, \tag{2.105}$$

$$V' + (1 - 3c_{\rm s}^2)\mathcal{H}V + A + \frac{1}{\rho + P}\left(\delta p + \frac{2}{3}\nabla^2\Pi\right) = 0\,, \tag{2.106}$$

où

$$V \equiv v + B = \frac{\delta q}{\rho + p} \tag{2.107}$$

est souvent appelé la perturbation covariante de vitesse. En réécrivant l'équation de conservation de l'énergie (2.105) en terme de la perturbation de courbure sur les hypersurfaces de densité d'énergie uniforme ζ, on obtient le résultat important [413] :

$$\zeta' = -\mathcal{H}\frac{\delta p_{\rm nad}}{\rho + p} - \Sigma\,, \tag{2.108}$$

où $\delta p_{\rm nad}$ est la perturbation de pression non-adiabatique (2.99) et où Σ désigne la divergence de la vitesse dans la jauge longitudinale, ou de manière équivalente le potentiel de cisaillement le long des lignes d'univers comobiles [284]

$$\Sigma \equiv \frac{1}{3}\nabla^2\left(V + \sigma\right) = \frac{1}{3}\nabla^2\widetilde{v_\ell}\,. \tag{2.109}$$

En utilisant les définitions de ζ (2.87) et Ψ (2.78) ainsi que l'équation de Poisson généralisée (2.93), on obtient

$$\frac{\Sigma}{\mathcal{H}} = \frac{\nabla^2}{3\mathcal{H}^2}\left(\zeta + \Psi\right) + \frac{2\rho}{3(\rho + p)}\left(\frac{\nabla^2}{\mathcal{H}^2}\right)^2\Psi\,. \tag{2.110}$$

Ainsi, ζ est constant pour des perturbations adiabatiques ($\delta p_{\rm nad} = 0$) sur des échelles super-Hubble ($k/\mathcal{H} \ll 1$) tant que Ψ reste fini. Ceci en fait une variable de choix (avec la perturbation de courbure comobile (2.84)) pour décrire les perturbations de densité primordiales sur des échelles super-Hubble, pendant l'inflation et les ères de radiation et de matière. Par exemple, dans un univers dominé par un fluide d'équation d'état w constante, la relation (2.92) s'écrit, pour le mode constant de Ψ

$$\mathcal{R} = \frac{5 + 3w}{3(1 + w)}\Psi\,, \tag{2.111}$$

de telle façon que la constance de $\mathcal{R}$ dans le cas adiabatique permet de retrouver sans effort le résultat (2.104). Elle permet également de s'affranchir d'une description précise de la phase de réchauffement (voir la sous-section 3.2.3) à la fin de l'inflation un champ, pour lesquelles les perturbations sont de type adiabatique (voir la sous-section 2.3.3). Dans des situations plus générales, comme l'inflation multichamp, l'équation (2.108) indique comment une perturbation de pression non-adiabatique modifie ζ sur des échelles super-Hubble [310, 158, 271].

Il est important d'insister sur le fait que l'équation (2.108) découle uniquement de la conservation locale du tenseur énergie-impulsion. Elle est donc valable pour tout fluide dont le tenseur énergie-impulsion est conservé, et même pour une théorie autre que la relativité générale [413, 390, 64, 90].

2.3.2 Perturbations vectorielles et tensorielles au premier ordre

Perturbations vectorielles

La partie vectorielle de la densité d'impulsion (2.39)

$$\delta q_i^V = (\rho + p)(v_i^V - S_i^V)\,, \tag{2.112}$$

vérifie l'équation de conservation

$$\delta q_i^{V\prime} + 4\mathcal{H}\delta q_i^V = -\nabla^2 \Pi_i^V \tag{2.113}$$

où la partie vectorielle du tenseur de pression anisotrope (2.35) est donnée par $a^2\partial_{(i}\Pi_{j)}^V$. Enfin, la perturbation vectorielle de métrique invariant de jauge est reliée à δq_i^V par l'équation de contrainte

$$\nabla^2 \left(F_i^{V\prime} + S_i^V \right) = -16\pi G a^2 \delta q_i^V \,. \tag{2.114}$$

Ainsi, quand l'univers est dominé par des champs scalaires, pour lesquels la densité vectorielle d'impulsion est nulle à l'ordre linéaire, toutes les perturbations vectorielles sont nulles. Dans le cas général, à moins d'être alimentées par la pression anisotrope, il découle de (2.113) que les perturbations vectorielles décroissent rapidement dans un univers en expansion. Pour cette raison, les perturbations vectorielles sont en général négligées en cosmologie, ce que nous ferons dans la suite de ce mémoire, sauf dans l'article [236] reproduit à la section 8.2 où des sources actives de perturbations vectorielles sont présentes.

Perturbations tensorielles

Contrairement aux perturbations scalaires et vectorielles, il n'y a pas d'équations de contrainte pour les perturbations tensorielles. Ce sont des degrés de liberté libres, d'où leur autre nom, *ondes gravitationnelles*. L'équation d'onde correspondante est obtenue à partir de la partie spatiale des équations d'Einstein

$$h_{ij}'' + 2\mathcal{H}h_{ij}' - \nabla^2 h_{ij} = 8\pi G a^2 \Pi_{ij} \tag{2.115}$$

où Π_{ij} est la partie transverse et de trace nulle du tenseur de pression anisotrope (2.35). On peut décomposer h_{ij} en espace de Fourier selon

$$h_{ij} = \int \frac{\mathrm{d}^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \sum_{s=+,\times} \epsilon_{ij}^s(k) h_{\mathbf{k}}^s(\tau) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \,, \tag{2.116}$$

où les deux tenseurs de polarisation ϵ_{ij}^s vérifient $\epsilon_i^i = k^i\epsilon_{ij} = 0$ et $\epsilon_{ij}^s(k)\epsilon^{ijs'}(k) = 2\delta_{ss'}$. En absence de pression anisotrope – en présence uniquement de champs scalaires ou de fluides parfaits par exemple – l'amplitude commune $h_{\mathbf{k}}$ des deux états de polarisation vérifie l'équation d'onde d'un champ scalaire de masse nulle dans un espace de fond de FLRW :

$$h_{\mathbf{k}}'' + 2\mathcal{H}h_{\mathbf{k}}' + k^2 h_{\mathbf{k}} = 0 \,. \tag{2.117}$$

2.3.3 Perturbations adiabatiques et entropiques

Après avoir donné les équations gouvernant la dynamique des perturbations scalaires, Sec. 2.3.1, il faut spécifier les conditions initiales de ces perturbations, ce qui est fait aux premiers temps du modèle du Big-Bang chaud, c'est-à-dire au début de l'ère de radiation, et plus précisément à la fin de la nucléosynthèse primordiale ($T \simeq 10^{10}K$). Les contraintes observationnelles sur l'abondance des éléments permettent en effet d'obtenir de fortes contraintes sur le contenu matériel de l'univers à cette époque, que nous supposons

rempli de photons, neutrinos, baryons et de matière noire froide[8]. De plus, on peut se restreindre à prescrire les conditions initiales uniquement pour des modes super-Hubble, étant donné que toutes les échelles cosmologiques observables aujourd'hui étaient à l'époque largement hors du rayon de Hubble.

Les perturbations des différents fluides ($i = 1 \dots n$) sont caractérisées par leur perturbation de densité $\delta\rho_i$ et les perturbations de courbure invariante de jauge associées – perturbation de courbure sur les hypersurfaces de i-densité constante –

$$-\zeta_i \equiv \psi + \frac{\mathcal{H}}{\rho_i'}\delta\rho_i \tag{2.118}$$

Si les différents types de fluide interagissent seulement gravitationnellement – ce dont on fait l'hypothèse – on déduit du résultat général (2.108) associé au fait que chaque fluide a une équation d'état w_i constante que chaque ζ_i est constant aux échelles super-Hubble. On peut donc décrire l'état primordial de l'univers par les $\zeta_i, i = 1 \dots n$, sans plus de précision sur l'instant auquel on fait référence. En pratique, plutôt que de spécifier les n différentes perturbations de densité, on les décompose généralement en la perturbation de densité totale et $n-1$ perturbations de densité relatives entre les différents fluides, *i.e.*, en termes invariants de jauge :

$$\zeta \equiv -\psi - \frac{\mathcal{H}}{\rho'}\delta\rho = \sum_i \frac{\rho_i'}{\rho'}\zeta_i \tag{2.119}$$

et

$$\mathcal{S}_i = 3(\zeta_i - \zeta_\gamma) \tag{2.120}$$

où il est d'usage de prendre comme fluide de référence la radiation. Au début de l'ère de radiation, $\zeta \approx \zeta_\gamma$ est constant mais l'évolution de la densité d'énergie des différents fluides entraîne une évolution temporelle ultérieure de ζ en général (voir plus bas). Les $\mathcal{S}_i$ sont, eux, constants pour les grandes longueurs d'onde du fait de la conservation de chaque ζ_i.

En utilisant l'équation de continuité pour chaque fluide

$$\rho_i' + 3\mathcal{H}(1+w_i)\rho_i = 0\,, \tag{2.121}$$

on peut réécrire

$$\mathcal{S}_i = \frac{1}{1+w_i}\frac{\delta\rho_i}{\rho_i} - \frac{3}{4}\frac{\delta\rho_\gamma}{\rho_\gamma}\,. \tag{2.122}$$

Enfin, pour tous les fluides considérés, de paramètre d'état w_i constant, la densité d'énergie est reliée à la densité de particules n_i par $\rho_i \propto n_i^{1+w_i}$, d'où

$$\mathcal{S}_i = \delta\left(n_i/n_\gamma\right)\,. \tag{2.123}$$

En thermodynamique, le rapport n_i/n_j entre les densités de particules i et j s'appelle l'entropie de i par rapport à j. Ainsi, les $\mathcal{S}_i$, qui mesurent les variations locales de la composition du fluide cosmique, sont appelés perturbations d'entropie relative, ou perturbations entropiques[9].

8. On peut également probablement ajouter une certaine forme d'énergie sombre.

9. Les références [202] et [245] traitent de l'extension de la définition des perturbations d'entropie relative entre deux fluides au-delà de l'approximation linéaire.

En utilisant l'équation de continuité de chaque fluide et du fluide total, l'expression (2.119) peut se réécrire sous la forme

$$\zeta = \sum_i \frac{(1+w_i)\rho_i}{(1+w)\rho}\zeta_i \,. \tag{2.124}$$

La perturbation de courbure ζ peut donc être vue comme une moyenne pondérée des ζ_i, constants, avec des coefficients dépendant du temps. Dans le cas particulier de fluctuations entropiques nulles, $\mathcal{S}_i = 0\,\forall i$, tous les ζ_i sont égaux et ζ est constant. Or, nous avons vu (2.108) que sa variation aux grandes échelles est reliée à la perturbation de pression non-adiabatique (2.99). On doit donc pouvoir relier celle-ci aux perturbations entropiques. En effet, on montre facilement que (voir [291] pour une expression générale dans le cas de fluides imparfaits) :

$$\delta p_{\rm nad} = \frac{1}{\rho(1+w)}\sum_{i,j}\rho_i\rho_j(1+w_i)(1+w_j)(w_i-w_j)\mathcal{S}_i \,. \tag{2.125}$$

De manière générale, $\delta p_{\rm nad} = \delta p - \frac{p'}{\rho'}\delta\rho$ et les $\mathcal{S}_i = -3\mathcal{H}\left(\frac{\delta\rho_i}{\rho_i'} - \frac{\delta\rho_\gamma}{\rho_\gamma'}\right)$ mesurent chacun à leur façon la déviation à un état, dit *adiabatique*, où pour toutes quantités physiques x et y, les quantités (invariantes de jauge)

$$\Gamma_{xy} \equiv \frac{\delta x}{\dot{x}} - \frac{\delta y}{\dot{y}} \tag{2.126}$$

sont nulles. Intuitivement, cela correspond à un système dont les perturbations suivent l'évolution homogène, $\delta x/\dot{x} = $ cte, et qui ne contiennent donc qu'un seul degré de liberté qu'on peut considérer comme le paramètre temps. Au contraire, on parlera de perturbations non-adiabatiques, ou entropiques, quand une quantité Γ_{xy} est non-nulle. Il est important de remarquer que si des perturbations sont adiabatiques à un instant donné, elles le resteront puisqu'elles suivent l'évolution de fond [413, 282].

Avec ces définitions, tout système de conditions initiales au début de l'ère de la radiation peut être décomposé en un mode *adiabatique* et des modes *isocourbes* : le mode adiabatique correspond à une absence de variation locale de composition, $\mathcal{S}_i = 0$, et une perturbation de courbure ζ constante à priori non-nulle, alors que les modes isocourbes sont caractérisés par l'annulation de la perturbation de courbure $\zeta = 0$ au prix d'une possible variation locale des rapports de densité de particules $\mathcal{S}_i \neq 0$ [10]. Notons que des perturbations primordiales entropiques (*i.e.* avec un i tel que $\mathcal{S}_i \neq 0$) ne sont pas en général isocourbes (*i.e.*, on peut avoir $\zeta \neq 0$). En pratique, on utilise fréquemment indifféremment les qualificatifs isocourbes ou entropiques pour désigner des perturbations non-adiabatiques.

La structure des anisotropies du fond diffus cosmologique est particulièrement sensible aux types des perturbations primordiales (voir par exemple les références [130] ou [91]). Considérant seulement des perturbations isocourbes de matière noire par simplicité, on

10. Nous avons simplifié la discussion en caractérisant chaque fluide simplement par sa perturbation de densité. Ceci est cohérent pour un fluide unique car la perturbation de vitesse est alors reliée à la perturbation de densité. Dans un cadre plus réaliste, il existe un mode isocourbe supplémentaire, dit mode de vitesse isocourbe des neutrinos.

peut montrer par exemple qu'aux grandes échelles, les fluctuations de température du CMB sont données par [232]

$$\frac{\delta T}{T} \approx -\frac{1}{5}(\zeta + 2S)\,. \tag{2.127}$$

Aux échelles angulaires plus petites, des perturbations adiabatiques génèrent un mode oscillant en cosinus dans le fluide photon-baryon, résultant en un premier pic acoustique à $l \approx 220$, tandis qu'un mode isocourbe génère un mode en sinus avec un premier pic à $l \approx 330$. L'observation non-ambiguë du premier pic à $l \approx 220$ indique donc que les perturbations primordiales sont majoritairement adiabatiques, avec des contraintes sur les modes isocourbes primordiaux dépendant de leur type mais dont la contribution est de moins de 10% (voir la sous-section 2.4.3).

2.4 Statistiques des perturbations cosmologiques

2.4.1 Motivations et conventions

Nous introduisons ici les notions statistiques utilisées couramment en cosmologie : fonctions de corrélation, spectres de puissance, indices spectraux..., puis, munis de ces outils, nous donnons les contraintes observationnelles actuelles sur différentes quantités définies dans les sections précédentes, complétant ainsi le modèle de concordance exposé à la sous-section 1.1.5.

Tout d'abord, il convient d'expliquer l'utilité d'outils statistiques en cosmologie. Naïvement, on pourrait penser que la cosmologie a pour but de prédire la valeur de différentes quantités en tous les points de l'espace, la température dans une galaxie, la densité de photons à un autre endroit ... Du fait que la cosmologie s'intéresse à l'univers sur des échelles plus grandes que les structures qui le constituent, il n'en est rien, et l'approche mentionnée plus haut relève plutôt de l'astrophysique. Les cosmologistes envisagent plutôt l'univers, tout du moins au niveau inhomogène, comme une réalisation de processus aléatoires dont les lois statistiques sont à déterminer, typiquement la loi de probabilité de la surdensité de matière noire dans une boîte en fonction de la taille de cette boîte. Comment déterminer cette loi de probabilité à l'aide d'une seule réalisation du processus aléatoire correspondant, l'univers ? En utilisant l'hypothèse ergodique : identifier la valeur moyenne d'ensemble, statistique, à la valeur moyenne sur différentes boîtes de même taille dans l'univers [11]. Nous noterons par la suite cette valeur moyenne d'ensemble par le symbole $\langle\rangle$.

Facteurs de 2π...

Malheureusement, différentes conventions pour la normalisation des transformées de Fourier sont utilisées dans la littérature. Les définitions

$$\mathcal{R}_{\mathbf{k}} = A \int \mathrm{d}^3x\, \mathcal{R}(\mathbf{x})\, \mathrm{e}^{-\mathbf{i}\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}\,, \tag{2.128}$$

$$\mathcal{R}(\mathbf{x}) = B \int \mathrm{d}^3k\, \mathcal{R}_{\mathbf{k}}\, e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}\,, \tag{2.129}$$

11. Si la taille considérée est comparable à celle de l'univers, on ne dispose que de peu de boîtes différentes sur lesquelles moyenner les observables et la valeur moyenne ainsi obtenue peut différer substantiellement de la moyenne d'ensemble statistique. Il s'agit du problème dit de la *variance cosmique*.

impliquent que la distribution de Dirac est donnée par

$$\delta(\mathbf{x}) = AB \int \mathrm{d}^3\mathbf{k}\, e^{\pm i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \,. \tag{2.130}$$

Ainsi, A et B peuvent être quelconques tant que $AB = 1/(2\pi)^3$. Dans le corps de ce mémoire, nous utilisons $A = 1$, $B = 1/(2\pi)^3$ mais, dans certains des articles reproduits, on utilise également $A = B = 1/(2\pi)^{3/2}$. Nous gardons A et B généraux dans cette section afin de pouvoir comparer facilement différentes conventions... et repérer d'éventuelles erreurs.

2.4.2 Spectres de puissance

Fonction de corrélation à deux points, spectre de puissance et variance

Pour tout champ stochastique homogène et isotrope, comme $\mathcal{R}$, on peut définir sa fonction de corrélation à deux points

$$\xi_{\mathcal{R}}(r) \equiv \langle \mathcal{R}(\mathbf{x})\mathcal{R}(\mathbf{x}+\mathbf{r})\rangle \tag{2.131}$$

où, par isotropie, ξ ne dépend que la distance $r \equiv |\mathbf{r}|$ et non de l'orientation entre les deux points. Le spectre de puissance est ensuite défini comme la transformée de Fourier de la fonction de corrélation à deux points :

$$P_{\mathcal{R}}(k) \equiv A \int \mathrm{d}^3 r\, \xi_{\mathcal{R}}(r)\, e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \,. \tag{2.132}$$

Comme

$$\langle \mathcal{R}_{\mathbf{k}}\, \mathcal{R}_{\mathbf{k}'}\rangle = A^2 \int \mathrm{d}^3 x\, e^{-i(\mathbf{k}+\mathbf{k}')\mathbf{x}} \int \mathrm{d}^3 r\, \xi_{\mathcal{R}}(r) e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}} \tag{2.133}$$

$$= \frac{A}{B}\delta(\mathbf{k}+\mathbf{k}') \int \mathrm{d}^3 r\, \xi_{\mathcal{R}}(r) e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}} \,, \tag{2.134}$$

on obtient

$$\langle \mathcal{R}_{\mathbf{k}}\, \mathcal{R}_{\mathbf{k}'}\rangle = \frac{1}{B} P_{\mathcal{R}}(k)\delta(\mathbf{k}+\mathbf{k}') \,. \tag{2.135}$$

Si on tient à respecter l'autre usage courant par lequel le spectre de puissance est défini par

$$\langle \mathcal{R}_{\mathbf{k}}\, \mathcal{R}_{\mathbf{k}'}\rangle = (2\pi)^3 P_{\mathcal{R}}(k)\delta(\mathbf{k}+\mathbf{k}') \,, \tag{2.136}$$

on en déduit qu'on doit utiliser la convention $B = 1/(2\pi)^3$ pour la transformée de Fourier.

Un autre spectre de puissance, dit renormalisé, $\mathcal{P}_{\mathcal{R}}(k)$, est souvent défini par

$$\langle \mathcal{R}^2(x)\rangle \equiv \int \mathrm{d}\ln k\, \mathcal{P}_{\mathcal{R}}(k) \,. \tag{2.137}$$

De

$$\langle \mathcal{R}^2(x)\rangle = \xi_{\mathcal{R}}(0) = B \int \mathrm{d}^3 k\, P_{\mathcal{R}}(k) \,, \tag{2.138}$$

on en déduit

$$\mathcal{P}_{\mathcal{R}}(k) \equiv 4\pi B\, k^3 P_{\mathcal{R}}(k) \,, \tag{2.139}$$

c'est-a-dire

$$\mathcal{P}_{\mathcal{R}}(k) \equiv \frac{k^3}{2\pi^2} P_{\mathcal{R}}(k) \tag{2.140}$$

dans la convention de Fourier $B = 1/(2\pi)^3$.

Dépendance d'échelle

La dépendance d'échelle du spectre de puissance renormalisé $\mathcal{P}_\mathcal{R}(k)$ est quantifiée par l'indice spectral (des fluctuations scalaires dans le cas de $\mathcal{R}$)

$$n_\mathrm{s} - 1 \equiv \frac{d\ln \mathcal{P}_\mathcal{R}}{d\ln k}\,. \tag{2.141}$$

On désigne par invariant d'échelle un spectre tel que $n_\mathrm{s} = 1$, ce qui correspond au fait que chaque intervalle logarithmique en k contribue de manière identique à la variance de $\mathcal{R}$ (2.137). On peut également définir la variation de l'indice spectral

$$\alpha_\mathrm{s} \equiv \frac{dn_\mathrm{s}}{d\ln k}\,. \tag{2.142}$$

Autour d'une échelle de référence, dite pivot, $k = k_\star$, on peut approximer le spectre de puissance selon

$$\mathcal{P}_\mathcal{R}(k) = A_\mathrm{s}(k_\star)\left(\frac{k}{k_\star}\right)^{n_\mathrm{s}(k_\star)-1+\frac{1}{2}\alpha_\mathrm{s}(k_\star)\ln(k/k_\star)}\,. \tag{2.143}$$

Par la suite, on utilisera $k_\star = 0.002\,\mathrm{Mpc}^{-1}$ [221].

Perturbations tensorielles

Le spectre de puissance des deux modes de polarisation des perturbations tensorielles, *i.e.* $h \equiv h^+, h^\times$ (2.116), est défini de manière identique au cas scalaire

$$\langle h_\mathbf{k} h_{\mathbf{k}'}\rangle = (2\pi)^3\,\delta(\mathbf{k}+\mathbf{k}')\,P_h(k)\,, \qquad \mathcal{P}_h(k) = \frac{k^3}{2\pi^2}P_h(k)\,. \tag{2.144}$$

Le spectre de puissance des perturbations tensorielles est ensuite *défini* comme la somme des spectres de puissances des deux polarisations

$$\mathcal{P}_\mathrm{t} \equiv 2\mathcal{P}_h\,. \tag{2.145}$$

Sa dépendance d'échelle est définie de façon analogue à (2.141) mais pour des raisons historiques sans -1 :

$$n_\mathrm{t} \equiv \frac{d\ln \mathcal{P}_\mathrm{t}}{d\ln k}\,, \tag{2.146}$$

i.e.

$$\mathcal{P}_\mathrm{t}(k) = A_\mathrm{t}(k_\star)\left(\frac{k}{k_\star}\right)^{n_\mathrm{t}(k_\star)}\,. \tag{2.147}$$

On mentionne en fait rarement l'amplitude intrinsèque des fluctuations tensorielles mais plutôt sa valeur normalisée à celle (mesurée) des fluctuations scalaires. On définit donc le *rapport tenseur sur scalaire*

$$r \equiv \frac{\mathcal{P}_\mathrm{t}(k)}{\mathcal{P}_\mathcal{R}(k)}\,. \tag{2.148}$$

Perturbations isocourbes

Comme on l'a vu à la sous-section 2.3.3, le fluide cosmique primordial peut présenter des fluctuations locales de composition sans que la courbure totale soit affectée, auquel cas on doit prendre en compte différentes perturbations de type isocourbe. On se concentre ici sur la perturbation isocourbe de matière noire

$$\mathcal{S}_{\rm cdm} = \frac{\delta\rho_{\rm cdm}}{\rho_{\rm cdm}} - \frac{3}{4}\frac{\delta\rho_\gamma}{\rho_\gamma} \tag{2.149}$$

qu'on note $\mathcal{S}$ par la suite. Son amplitude relativement aux perturbations scalaires est en général caractérisée par le coefficient α tel que

$$\frac{\mathcal{P}_{\mathcal{S}}(k_\star)}{\mathcal{P}_{\mathcal{R}}(k_\star)} \equiv \frac{\alpha}{1-\alpha}\,. \tag{2.150}$$

Enfin, la perturbation isocourbe $\mathcal{S}$ est en général corrélée avec la perturbation de courbure $\mathcal{R}$ [232, 239], ce qu'on mesure par l'introduction de

$$\sin\Theta \equiv \frac{\mathcal{C}_{\mathcal{SR}}(k_\star)}{\sqrt{\mathcal{P}_{\mathcal{S}}(k_\star)\mathcal{P}_{\mathcal{R}}(k_\star)}} \tag{2.151}$$

où

$$\langle \mathcal{R}_{\mathbf{k}}\,\mathcal{S}_{\mathbf{k}'}\rangle = (2\pi)^3\frac{2\pi^2}{k^3}\mathcal{C}_{\mathcal{RS}}(k)\delta(\mathbf{k}+\mathbf{k}')\,. \tag{2.152}$$

2.4.3 Contraintes observationnelles sur l'univers inhomogène

Nous donnons ici les contraintes observationnelles, toujours données avec un niveau de confiance de 95 %, sur les quantités définies à la sous-section précédente. Le détail des contraintes dépend des données prises en compte ainsi que des hypothèses sur le nombre de paramètres libres à estimer mais les caractéristiques générales demeurent (pour plus de détails, voir la référence [222] dont sont extraites les valeurs données ici) : les perturbations primordiales scalaires sont en bonne approximation adiabatiques et invariantes d'échelle (et gaussiennes comme on le verra au chapitre 5) tandis qu'il n'y a pas d'indices de perturbations tensorielles.

Plus en détail, l'amplitude des fluctuations scalaires (2.143) et l'indice scalaire (2.141) sont donnés respectivement par

$$A_s = (2.441^{+0.088}_{-0.092})\times 10^{-9} \tag{2.153}$$

et (en supposant $r = 0$)

$$n_s = 0.963 \pm 0.012 \tag{2.154}$$

tandis que les données cosmologiques n'indiquent pas de variation de l'indice spectral scalaire (2.142)

$$-0.061 < \alpha_s < 0.017\,. \tag{2.155}$$

Il est ainsi maintenant globalement admis qu'un spectre d'Harrison Zel'dovich – ainsi nomme on un spectre exactement invariant d'échelle, comme proposé dans les années 70 par Edward Harrison et Yakov Zel'dovich pour expliquer la distribution de la matière dans

l'univers – est exclu par les données cosmologiques (voir cependant [325] pour un point de vue plus conservatif).

Les contraintes sur l'amplitude des perturbations isocourbes α (2.150) dépendent de leur type – on se concentre ici sur la matière noire – mais aussi de leur corrélation Θ (2.151) avec la perturbation de courbure. Elles sont données par $\alpha < 0.077$ et $\alpha < 0.0047$ dans les cas respectivement décorrélé ($\cos\Theta = 0$) et completement anti-corrélé ($\cos\Theta = -1$).

Enfin, la borne supérieure actuelle sur le rapport tenseur sur scalaire est

$$r < 0.24\,. \tag{2.156}$$

Atteindre la sensibilité $r \approx 0.01$– et pourquoi pas détecter des ondes gravitationnelles primordiales ! – est un enjeu majeur de la cosmologie (voir la sous-section 3.5.2 et la référence [47] pour plus de détails).

Notons enfin que nombre d'autres paramètres ou effets non-mentionnés ici – cosmologiques ou pas – sont contraints par les observations cosmologiques comme le nombre d'espèces relativistes après l'égalité matière-rayonnement, la masse des neutrinos ou encore une violation de la parité [222].

Deuxième partie

L'inflation cosmologique

Chapitre 3

L'inflation à un champ

Sommaire

3.1 Le mécanisme de l'inflation 60
3.1.1 La décroissance du rayon de Hubble comobile 60
3.1.2 Les conditions de l'inflation 62
3.1.3 La structure causale de l'univers inflationnaire 63
3.2 Dynamique homogène de l'inflation canonique à un champ . . 64
3.2.1 Dynamique d'un champ scalaire couplé à la gravité 65
3.2.2 L'inflation de roulement lent 66
3.2.3 Le réchauffement 69
3.3 Les fluctuations quantiques pendant l'inflation canonique à un champ 70
3.3.1 Un bref aperçu 70
3.3.2 Calcul de l'action quadratique 72
3.3.3 Quantification et évolution des perturbations scalaires 76
3.3.4 Quantification et évolution des perturbations tensorielles 80
3.3.5 Spectres primordiaux 81
3.4 L'inflation à un champ avec des termes cinétiques non standard ou "k-inflation" 82
3.5 Quel modèle d'inflation ? 85
3.5.1 Reconstruction locale du potentiel inflationnaire 85
3.5.2 Ondes gravitationnelles et physique des hautes énergies 86
3.5.3 Une description microphysique de l'inflation ? 87

Dans ce chapitre, nous introduisons l'inflation comme solution aux problèmes conceptuels du modèle du Big Bang chaud (section 3.1). Nous détaillons la dynamique homogène de l'inflation soutenue par un champ scalaire canonique (section 3.2) puis étudions la genèse des fluctuations primordiales dans ce type de modèle (section 3.3). Nous étendons ce calcul au cas d'un champ scalaire d'action invariante de Lorentz quelconque à la section 3.4 avant de considérer la question du choix, observationnel et théorique, d'un modèle d'inflation (section 3.5).

Beaucoup de revues intéressantes complètent utilement cette présentation de l'inflation qui ne vise pas à l'exhaustivité. La référence [234] détaille les fondements du mécanisme de l'inflation et de la genèse des fluctuations primordiales. La revue [50] constitue une courte introduction intéressante tandis que le cours général [42], dont nous nous sommes grandement inspiré, est très pédagogique. Pour des revues plus spécialisées, on peut consulter la référence [40] pour les aspects multichamp de l'inflation (présentés au chapitre 4) et la théorie du réchauffement. La revue [47] détaille, elle, les aspects théoriques et observationnels des ondes gravitationnelles produites dans l'inflation tandis qu'on peut se référer à la revue [279], complétée utilement par la publication plus récente [299], pour des revues des modèles inflationnaires inspirés par la physique des particules. Il existe enfin de nombreuses revues traitant du lien entre l'inflation et la théorie des cordes et, plus généralement, du lien entre cosmologie et théorie des cordes [300, 77, 199, 108, 181, 49].

Enfin, il est toujours intéressant de revenir aux articles fondateurs, ceux de Guth [173], Linde [270] et Albrecht et Steinhardt [10] posant les bases du concept d'inflation, et ceux de Guth et Pi [174], Bardeen, Steinhardt et Turner [31], Hawking [179] et Starobinsky [388] traitant du mécanisme de genèse des fluctuations.

3.1 Le mécanisme de l'inflation

3.1.1 La décroissance du rayon de Hubble comobile

Nous avons montré aux sous-sections 1.2.1 et 1.2.2 que les problèmes du modèle du Big Bang chaud, hormis le problème des reliques, ont tous la même origine : le rayon de Hubble comobile $(aH)^{-1}$ croît en cosmologie traditionnelle. Ceci suggère que l'existence d'une phase primordiale de l'univers avant l'ère de radiation pendant laquelle le rayon de Hubble comobile décroît suffisamment est à même de résoudre ces problèmes. Nous allons montrer à la sous-section 3.1.2 que la décroissance du rayon de Hubble comobile est équivalente dans un univers en expansion au fait que celle-ci soit accélérée, d'où le nom communément employé pour désigner une telle phase : *l'inflation cosmologique*.

Horizon et rayon de Hubble

Bien que les deux concepts soient reliés, il est important de différencier l'horizon comobile (ou temps conforme) et le rayon de Hubble comobile [127]. Le premier est défini comme l'intégrale logarithmique du second (1.33) :

$$\tau = \int_0^a \mathrm{d}\ln a' \, \frac{1}{a' H(a')} \, . \tag{3.1}$$

Des particules séparées par des distances plus grandes que τ n'ont *jamais* été en contact causal depuis la naissance de l'univers alors que des particules séparées par des distances plus grandes que le rayon de Hubble comobile $(aH)^{-1}$ ne sont pas en contact causal *à cette période*. Dans le modèle du Big Bang chaud, l'univers pendant l'ère de la radiation a toujours été dominé par celle-ci. D'après les équations (1.34) et (1.35), l'horizon des particules et le rayon de Hubble comobile coïncident alors mais cette conclusion n'est pas générale. Si le rayon de Hubble comobile au début de l'univers est suffisamment grand pour que τ soit supérieur à $(aH)^{-1}$, disons à l'égalité matière-rayonnement, des particules hors du rayon

de Hubble à cette période ont néanmoins déjà été en contact causal depuis la naissance de l'univers. Il est maintenant aisé de comprendre comment une période d'inflation cosmologique résout les problèmes du modèle du Big Bang chaud. Avec ces mises en garde, nous utilisons par la suite les termes horizon ou rayon de Hubble de manière interchangeables, suivant un usage abusif devenu courant.

Les solutions aux problèmes du Big Bang chaud

Il est clair d'après l'équation de Friedmann

$$|\Omega(a) - 1| = \frac{|K|}{(aH)^2} \,. \tag{3.2}$$

que le point $\Omega = 1$ est un attracteur durant l'inflation, *i.e.* pendant que l'horizon de Hubble comobile décroît. Le problème de la platitude est donc résolu si l'inflation dure suffisamment longtemps pour que la petite valeur de $|\Omega(a) - 1|$ à la fin de l'inflation ne soit pas compensée par sa dérive ultérieure pendant les ères du Big Bang chaud. Pour quantifier la durée de l'inflation, on utilise la quantité, nommée nombre de "e-folds" d'inflation [1] :

$$N_{\rm inf} \equiv \ln\left(\frac{a_{\rm f}}{a_{\rm i}}\right) \tag{3.3}$$

où $a_{\rm i}$ et $a_{\rm f}$ désignent respectivement les valeurs du facteur d'échelle au début et à la fin de l'inflation. Si on veut, par exemple, que $|\Omega(a_{\rm f}) - 1| \leq 10^{-60}$ en partant d'un état initial générique $|\Omega(a_{\rm i}) - 1| \simeq O(1)$, la relation

$$\left|\frac{\Omega(a_{\rm f}) - 1}{\Omega(a_{\rm i}) - 1}\right| = \left(\frac{a_i}{a_f}\right)^2 = e^{-2N_{\rm inf}} \tag{3.4}$$

indique que l'inflation doit durer au moins 70 e-folds.

Si l'horizon comobile décroît suffisamment pendant l'inflation, les plus grandes échelles observables, qui entrent sous l'horizon à l'heure actuelle, étaient déjà sous l'horizon pendant l'inflation (voir la figure 3.1.1). Tout l'univers observable émerge alors d'une même région causale de telle sorte que l'uniformité du fond diffus cosmologique ne pose plus de problèmes conceptuels. Quantitativement, on peut montrer [264] que la résolution du problème de l'horizon impose au nombre de e-folds d'inflation d'être au minimum de l'ordre de $50 - 70$, selon l'échelle d'énergie à la fin de l'inflation. On retient en général comme critère approximatif qu'un modèle d'inflation résout les problèmes du Big Bang chaud s'il dure plus de 60 e-folds. Parmi eux, il est important d'avoir en tête que les échelles cosmologiques observables traversent le rayon de Hubble pendant seulement les 10 premiers e-folds, dont 4 pour les échelles observables avec le CMB.

Pendant l'inflation, la densité d'énergie de l'univers décroît beaucoup moins rapidement que celle des particules massives comme les monopoles. Ainsi, la contribution de ces particules devient vite négligeable, résolvant ainsi le problème des monopoles si les transitions de

1. Nous utilisons le terme anglais *e-fold* en raison de son usage très courant, y compris dans un contexte francophone.

phase les générant ont lieu suffisamment tôt pendant l'inflation. Il faut néanmoins prendre garde à la possible production de particules massives *après* l'inflation qui ruinerait ce que la phase inflationnaire vient d'accomplir. On considère généralement que, si la température à la fin de l'inflation est suffisamment basse, la production de reliques comme les gravitinos peut être évitée [201, 311].

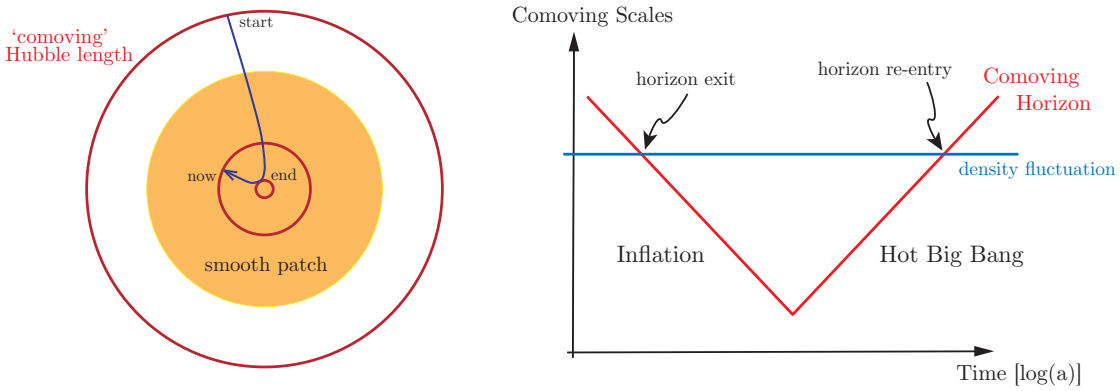

FIGURE 3.1 – *Gauche :* le rayon de Hubble comobile décroît pendant l'inflation puis croît pendant les ères de la radiation et de la matière. L'inflation agit ainsi comme une "loupe" qui permet d'avoir accès à une région initialement sub-Hubble. *Droite :* une échelle comobile donnée est initialement sous le rayon de Hubble, le traverse pendant l'inflation puis rentre à nouveau dessous dans l'ère de la radiation ou de la matière. Figure extraite de [42].

3.1.2 Les conditions de l'inflation

L'inflation cosmologique peut être définie de trois façons différentes :

- **La décroissance de l'horizon comobile :** motivés par la résolution des problèmes de l'horizon et de la platitude, nous avons défini l'inflation cosmologique comme une période pendant laquelle le rayon de Hubble comobile $(aH)^{-1}$ diminue. Nous en donnons ici deux autres définitions équivalentes communément employées.

- **L'expansion accélérée :** de

$$\frac{d}{dt}(aH)^{-1} = \frac{-\ddot{a}}{(aH)^2}\,, \tag{3.5}$$

on en déduit que l'inflation cosmologique peut être définie comme une période d'expansion accélérée. Comme

$$\frac{\ddot{a}}{a} = H^2(1-\epsilon)\,, \qquad \text{avec} \quad \epsilon \equiv -\frac{\dot{H}}{H^2}\,, \tag{3.6}$$

ceci correspond également à imposer

$$\epsilon = -\frac{\dot{H}}{H^2} = -\frac{d\ln H}{dN} < 1 \tag{3.7}$$

où nous avons défini $\mathrm{d}N = H\mathrm{d}t = \mathrm{d}\ln a$ qui mesure le nombre de e-folds N d'inflation [2]. L'équation (3.7) indique que la variation fractionnaire du paramètre de Hubble par e-fold est petit. Le paramètre ϵ est souvent appelé – contre-intuitivement pendant l'inflation ! – paramètre de décélération, du fait qu'il quantifie la décélération de l'expansion dans les ères traditionnelles du modèle du Big Bang.

– **Violation de la condition d'énergie forte :** d'après la seconde équation de Friedmann (1.20), l'accélération $\ddot{a} > 0$ nécessite un contenu matériel de l'univers vérifiant

$$p < -\frac{1}{3}\rho \;\Leftrightarrow\; w < -\frac{1}{3}\,, \tag{3.8}$$

c'est-à-dire la violation de la condition d'énergie forte, et donc une pression négative en particulier. Nous allons voir à la sous-section 3.2.1 que le respect de cette condition n'a rien d'absolu et que des systèmes physiques simples satisfont à l'équation (3.8). Notons que ϵ (3.7) est relié au paramètre d'état w par

$$\epsilon = \frac{3}{2}(1+w)\,. \tag{3.9}$$

Dans le raisonnement précédent, en identifiant le rayon de Hubble comobile à $(aH)^{-1}$, nous avons supposé de manière implicite que l'univers est en expansion $\dot{a} > 0$. Si on admet la possibilité que l'univers ait pu subir une phase de contraction $\dot{a} < 0$, et qu'on considère, à juste titre, que la propriété fondamentale qui permet la résolution des problèmes du Big Bang chaud est la décroissance du rayon de Hubble comobile avant l'ère de radiation, on peut envisager une alternative à l'inflation cosmologique : une phase pendant laquelle l'univers se contracte sous l'effet d'une matière d'équation d'état $w > 1$. C'est le mécanisme employé par les scénarios ekpyrotiques/cycliques [207, 250] sur lesquels nous reviendrons à la section 6.3. Il est néanmoins difficile de relier une telle phase de contraction aux phases d'expansion du modèle du Big Bang chaud.

3.1.3 La structure causale de l'univers inflationnaire

Nous avons vu que le modèle du Big Bang chaud dans lequel l'univers est dominé initialement par la radiation ($a(\tau) \propto \tau$) présente une singularité initiale $a \equiv 0$ à $\tau = 0$. Le problème de l'horizon est alors clairement visible sur le diagramme conforme de l'univers (Fig. 3.2), *i.e.* le plan χ-τ où les géodésiques de genre lumière sont représentées par des lignes à $\pm 45°$: le cône de lumière passé des deux points représentés sur la surface de dernière diffusion ne s'intersectent pas dans le passé. Ils n'ont donc jamais été en contact causal et l'uniformité de température du CMB ne peut être qu'une coïncidence.

Dans un univers inflationnaire, le temps conforme est étendu à des valeurs négatives de telle façon que le facteur d'échelle pendant l'inflation est donné par

$$a(\tau) = -\frac{1}{H\tau} \tag{3.10}$$

2. Avec cette définition, N augmente pendant l'inflation et a une origine arbitraire. On note souvent par le même symbole N le nombre de e-folds restant avant la fin de l'inflation, $N \equiv \ln\left(\frac{a_\mathrm{f}}{a}\right)$. N ainsi défini diminue et s'annule à la fin de l'inflation. Suivant l'usage en cosmologie, nous utiliserons ces deux définitions selon le contexte.

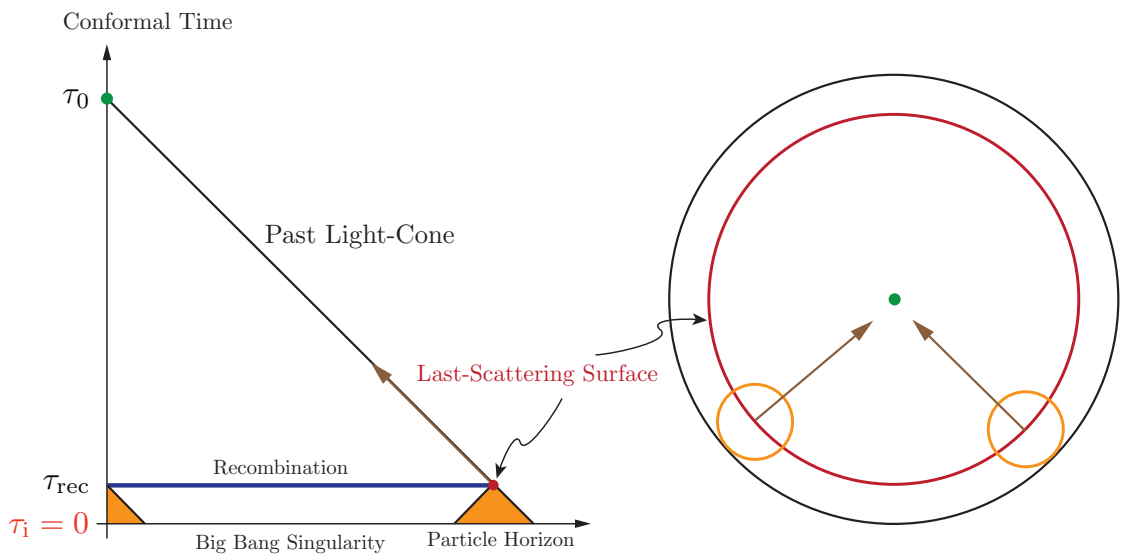

FIGURE 3.2 – Le diagramme conforme du modèle du Big Bang. On peut montrer que le CMB est alors constitué de 10^5 régions causalement indépendantes. Figure extraite de [42].

où H a été choisi constant par simplicité (rappelons que le taux de variation du paramètre de Hubble est petit pendant l'inflation d'après l'équation (3.7)). La singularité initiale est alors repoussée à l'infini passé $\tau_{\rm i} \to -\infty$. Notons que la divergence du facteur d'échelle à $\tau = 0$ n'est qu'un artefact venant du fait que nous avons considéré une phase strictement de Sitter pour laquelle l'inflation ne s'arrête jamais. En réalité, $\tau = 0$ correspond à la fin de l'inflation et au début du modèle du Big Bang. La figure 3.3 représente le diagramme conforme d'un univers avec inflation. On voit que si l'inflation dure suffisamment longtemps, tous les points de la surface de dernière diffusion étaient en contact causal au début de l'univers et le problème de l'horizon est résolu.

3.2 Dynamique homogène de l'inflation canonique à un champ

Nous avons vu à la section précédente que l'inflation peut être définie comme une période d'expansion accélérée $\epsilon < 1$. Reste à déterminer quel type de matière est susceptible de produire ce phénomène et sous quelles conditions. Dans la suite, nous nous concentrons sur l'inflation dite quasi-exponentielle, avec un taux d'expansion H quasi constant, autrement dit $\epsilon \ll 1$. Nous allons de plus supposer que

$$\eta \equiv \frac{\dot{\epsilon}}{H\epsilon} \tag{3.11}$$

est beaucoup plus petit que 1, $\eta \ll 1$, de telle façon que l'inflation dure suffisamment longtemps. Nous allons voir que ceci est compatible avec les observations cosmologiques dans le cadre du scénario inflationnaire le plus simple, dit de "roulement lent". L'introduction des petits paramètres ϵ et η, dits de variation lente, permet de plus une approche analytique approximative. Il convient cependant de toujours garder à l'esprit que $\epsilon < 1$ est la condition nécessaire et suffisante à l'inflation.

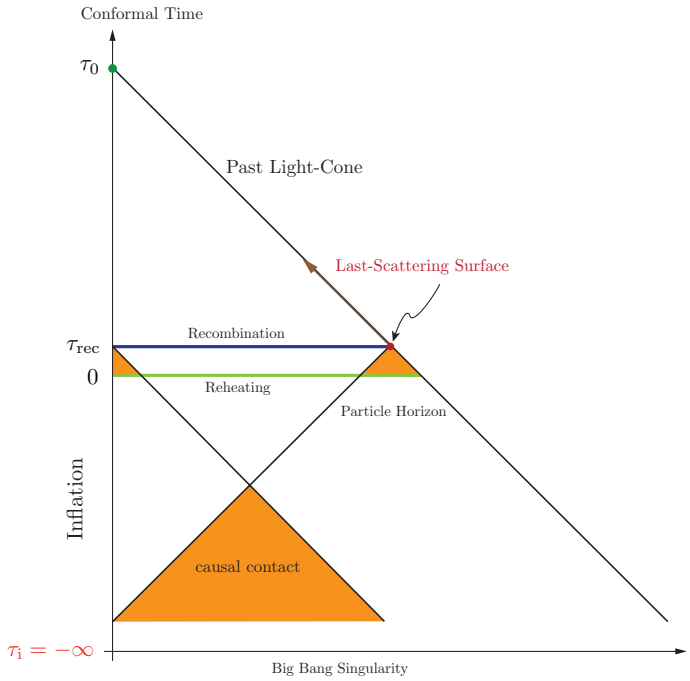

FIGURE 3.3 – Diagramme conforme de l'univers avec inflation. Tous les cônes de lumière passés des points de la surface de dernière diffusion s'intersectent si l'inflation dure au moins 60 e-folds. Figure extraite de [42].

3.2.1 Dynamique d'un champ scalaire couplé à la gravité

La réalisation la plus simple du processus inflationnaire repose sur l'introduction d'un champ scalaire ϕ, dit *inflaton*. Celui-ci peut être un champ scalaire fondamental aussi bien qu'un objet composite. Autrement dit, on ne précise en général pas la nature de l'inflaton. On le considère plutôt comme un paramètre, jouant le rôle d'une horloge, décrivant l'évolution de la densité d'énergie pendant l'inflation. Ceci est d'autant plus justifié qu'aucun champ scalaire fondamental n'a encore été identifié en physique des particules [3], ce qui peut être considéré comme une faiblesse de l'inflation mais aussi comme une formidable opportunité de découverte qu'elle ouvre.

Considérons donc l'action d'un champ scalaire minimalement couplé à la gravité d'Einstein :

$$S = \int \mathrm{d}^4x\sqrt{-g}\left[\frac{1}{2}R + \frac{1}{2}g^{\mu\nu}\partial_\mu\phi\,\partial_\nu\phi - V(\phi)\right] = S_{\rm EH} + S_\phi\,, \tag{3.12}$$

où le potentiel $V(\phi)$ décrit l'auto-interaction de l'inflaton. Le tenseur énergie-impulsion correspondant est donné par (*cf.* (2.41))

$$T^{(\phi)}_{\mu\nu} \equiv -\frac{2}{\sqrt{-g}}\frac{\delta S_\phi}{\delta g^{\mu\nu}} = \partial_\mu\phi\partial_\nu\phi - g_{\mu\nu}\left(\frac{1}{2}\partial^\sigma\phi\partial_\sigma\phi + V(\phi)\right) \tag{3.13}$$

3. Il existe bien un champ scalaire dans le modèle standard de la physique des particules, le boson de Higgs, mais celui-ci n'a pas encore été découvert (voir [65] pour un scénario inflationnaire utilisant le boson de Higgs comme inflaton).

et l'équation du mouvement de ϕ (obtenue par variation de l'action (3.12) par rapport à ϕ) est

$$\frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_\mu(\sqrt{-g}\partial^\mu\phi) + V_{,\phi} = 0\,, \tag{3.14}$$

où $V_{,\phi} \equiv \frac{dV}{d\phi}$. Dans un univers de fond de FLRW (1.1), les symétries de l'espace-temps imposent à tout champ scalaire d'être homogène, *i.e.* $\phi(t,\mathbf{x}) \equiv \phi(t)$. Le tenseur énergie-impulsion (3.13) prend alors la forme de celui d'un fluide parfait de densité d'énergie et de pression données par :

$$\rho_\phi = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + V(\phi)\,, \tag{3.15}$$

$$p_\phi = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 - V(\phi)\,. \tag{3.16}$$

L'équation d'état correspondante

$$w_\phi \equiv \frac{p_\phi}{\rho_\phi} = \frac{\frac{1}{2}\dot{\phi}^2 - V}{\frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + V} \tag{3.17}$$

montre donc qu'un champ scalaire est susceptible de nourrir une phase d'inflation si son énergie potentielle domine son énergie cinétique. La dynamique homogène couplée du champ scalaire ϕ et du facteur d'échelle est déterminée par

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} + V_{,\phi} = 0 \tag{3.18}$$

et

$$H^2 = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + V(\phi)\right)\,, \tag{3.19}$$

la seconde équation de Friedmann

$$\dot{H} = -\frac{1}{2}\dot{\phi}^2 \tag{3.20}$$

pouvant être vue comme une conséquence des deux équations précédentes.

3.2.2 L'inflation de roulement lent

Quantitativement, on déduit de

$$\epsilon \equiv -\frac{\dot{H}}{H^2} = \frac{1}{2}\frac{\dot{\phi}^2}{H^2} \tag{3.21}$$

et de (3.19) que, dans le régime de domination de l'énergie potentielle $\dot{\phi}^2 \ll V(\phi)$, l'inflation est de nature quasi-exponentielle $\epsilon \ll 1$. Pour que cette condition soit vérifiée suffisamment longtemps, on impose que

$$\eta \equiv \frac{\dot{\epsilon}}{H\epsilon} = 2\left(\epsilon + \frac{\ddot{\phi}}{H\dot{\phi}}\right) \ll 1\,, \tag{3.22}$$

auquel cas l'accélération du champ dans (3.18) est négligeable par rapport au terme de friction de Hubble $3H\dot{\phi}$. Les conditions, dites de roulement lent,

$$\dot{\phi}^2 \ll V(\phi)\,, \qquad |\ddot{\phi}| \ll |3H\dot{\phi}|\,, |V_{,\phi}| \tag{3.23}$$

assurent donc une période d'inflation prolongée dans le cas d'un univers dominé par un champ scalaire muni d'un terme cinétique standard. Le seul paramètre libre, ou plutôt fonction libre, qui détermine si un tel champ scalaire peut entrer dans ce régime de roulement lent est évidemment son potentiel. On peut donc réexprimer les conditions de roulement lent comme des contraintes sur la forme du potentiel inflationnaire. Introduisant

$$\epsilon_{\rm v}(\phi) \equiv \frac{M_{\rm pl}^2}{2}\left(\frac{V_{,\phi}}{V}\right)^2 , \tag{3.24}$$

et

$$\eta_{\rm v}(\phi) \equiv M_{\rm pl}^2 \frac{V_{,\phi\phi}}{V} , \tag{3.25}$$

où nous avons temporairement réintroduit la masse de Planck afin de rendre manifeste le caractère adimensionné de $\epsilon_{\rm v}$ et $\eta_{\rm v}$, il est facile de montrer que, dans l'approximation de roulement lent,

$$\epsilon \approx \epsilon_{\rm v} , \qquad \eta \approx \eta_{\rm v} - \epsilon_{\rm v} . \tag{3.26}$$

Ainsi, tout potentiel vérifiant $\epsilon_{\rm v}, |\eta_{\rm v}| \ll 1$ sustente une période d'inflation cosmologique. A l'ordre zéro dans les paramètres de variation lente ϵ et η, l'évolution homogène est décrite par

$$H^2 \approx \frac{1}{3}V(\phi) \approx \text{const.} , \tag{3.27}$$

$$\dot{\phi} \approx -\frac{V_{,\phi}}{3H} , \tag{3.28}$$

et l'espace-temps est dans cette limite un espace de de Sitter

$$a(t) \sim e^{Ht} . \tag{3.29}$$

Évidemment, cette description n'est valable que localement, typiquement pendant un nombre de e-folds donné par l'inverse des paramètres de variation lente, et l'inflation doit s'arrêter pour être suivie par l'ère de radiation du Big Bang chaud. Un potentiel strictement plat – une constante cosmologique – ne peut donc décrire un scénario d'inflation réaliste. La figure (3.4) donne un exemple de potentiel muni des bonnes propriétés : le potentiel est presque plat pendant l'inflation, celle-ci prend fin quand le potentiel devient trop abrupt, $\epsilon(\phi_{\rm f}) \equiv 1$, puis l'énergie de l'inflaton, correctement couplé à d'autres formes de matière, est convertie en radiation quand celui-ci oscille autour de son minimum pendant la phase dite de réchauffement (voir la sous-section 3.2.3).

Dans l'approximation de roulement lent, on peut exprimer le nombre de e-folds avant la fin de l'inflation

$$\begin{aligned} N(\phi) &\equiv \ln\frac{a_{\rm f}}{a} \\ &= \int_t^{t_{\rm f}} H{\rm d}t = \int_\phi^{\phi_{\rm f}} \frac{H}{\dot{\phi}}{\rm d}\phi \approx \int_{\phi_{\rm f}}^{\phi} \frac{V}{V_{,\phi}}{\rm d}\phi , \end{aligned} \tag{3.30}$$

où nous avons utilisé (3.27) et (3.28). Le résultat (3.30) peut être réécrit sous la forme

$$N(\phi) = \int_{\phi_{\rm f}}^{\phi} \frac{{\rm d}\phi}{\sqrt{2\epsilon}} \approx \int_{\phi_{\rm f}}^{\phi} \frac{{\rm d}\phi}{\sqrt{2\epsilon_{\rm v}}} . \tag{3.31}$$

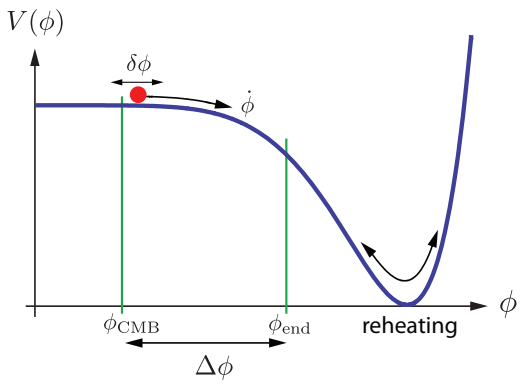

FIGURE 3.4 – Exemple de potentiel inflationnaire. L'inflation a lieu quand l'énergie potentielle $V(\phi)$ domine l'énergie cinétique $\frac{1}{2}\dot{\phi}^2$ du champ scalaire et s'arrête quand les deux deviennent comparables. Enfin, la densité d'énergie de l'inflaton est convertie en radiation pendant le phase de réchauffement (*reheating* en anglais). On verra que les fluctuations quantiques de l'inflaton $\delta\phi$ 60 e-folds avant la fin de l'inflation génèrent les fluctuations observées aux échelles du CMB. Figure extraite de [42].

Exemple : l'inflation en loi de puissance

Pour illustrer nos propos, considérons les modèles d'inflation en loi de puissance :

$$V(\phi) = \frac{\lambda}{p} M_p^4 \left(\frac{\phi}{M_p}\right)^p . \tag{3.32}$$

On calcule facilement

$$\epsilon_{\rm v}(\phi) = \frac{p^2}{2}\left(\frac{M_p}{\phi}\right)^2 , \quad \eta_{\rm v}(\phi) = p(p-1)\left(\frac{M_p}{\phi}\right)^2 . \tag{3.33}$$

Ainsi, les conditions de roulement lent sont satisfaites pour les valeurs super-Planckiennes de l'inflaton

$$\phi \gg \frac{p}{\sqrt{2}} M_p \equiv \phi_{\rm f} . \tag{3.34}$$

Après substitution du potentiel (3.32) dans les équations du mouvement en roulement lent (3.27)-(3.28), on trouve explicitement

$$\phi^{2-\frac{p}{2}} - \phi_i^{2-\frac{p}{2}} = -\frac{2}{4-p}\sqrt{\frac{p\lambda}{3}} M_p^{3-\frac{p}{2}} (t - t_i) \tag{3.35}$$

pour $t \neq 4$ et

$$\phi = \phi_i \exp\left[-\sqrt{\frac{4\lambda}{3}} M_p (t - t_i)\right] \tag{3.36}$$

pour $p = 4$. En utilisant $\mathrm{d}\ln a/\mathrm{d}\phi = H/\dot{\phi} \approx -\phi/(pM_p^2)$, on peut également exprimer le facteur d'échelle en fonction de la valeur du champ scalaire :

$$a = a_{\rm f} \exp\left[-\frac{\phi^2 - \phi_{\rm fin}^2}{2p\, M_p^2}\right] \tag{3.37}$$

et donc le nombre de e-folds d'inflation (qu'on peut également obtenir par la relation (3.31))

$$N(\phi) = \frac{\phi^2}{2p\, M_p^2} - \frac{p}{4}\,. \tag{3.38}$$

3.2.3 Le réchauffement

Le réchauffement est un sujet riche et complexe auquel rendre justice nécessiterait une très longue discussion. On se contente ici d'en esquisser les grandes lignes et on réfère le lecteur à la revue [40] pour plus de détails.

À la fin de l'inflation, l'univers est dans un état froid et toute son énergie est contenue dans l'inflaton, toutes les autres formes de matière ayant été diluées par 60 e-folds d'expansion. Il faut alors expliquer comment l'univers s'est réchauffé jusqu'aux températures très importantes requises par l'ère de radiation du modèle du Big Bang chaud et comment la matière ordinaire a émergé, *i.e.* expliquer la baryogénèse et la leptogénèse. Selon le paradigme standard, la quasi-totalité de la matière présente dans notre univers aurait été créée par un processus de production de particules au cours de la désintégration de l'inflaton. C'est ce qu'on appelle la théorie du (p)réchauffement.

Dans l'ancienne théorie du réchauffement [1, 129], l'inflaton est considéré, lors de ses oscillations autour de son minimum, comme une collection de particules scalaires indépendantes les unes des autres, chacune avec une probabilité finie de se désintégrer perturbativement en les particules plus légères à lesquelles l'inflaton est couplé. Le réchauffement se produit alors quand le paramètre de Hubble diminue jusqu'à $H \sim \Gamma$ où Γ désigne le taux de désintégration de l'inflaton (l'expansion de l'univers empêche l'instauration d'un état d'équilibre thermique quand $H > \Gamma$). L'énergie de l'inflaton est ainsi convertie en radiation, de densité d'énergie $\rho_{\rm rec} \sim T_{\rm rec}^4$ où $T_{\rm rec}$ est la température de réchauffement. Avec l'équation de Friedmann (1.19) $3H^2M_p^2 = \rho$, on en déduit

$$T_{\rm rec} \sim \sqrt{\Gamma M_p}\,. \tag{3.39}$$

Comme le taux de désintégration Γ dépend du type de couplage de l'inflaton aux différentes formes de matière, ceci permet de contraindre la structure de la théorie. On doit par exemple s'assurer que $T_{\rm rec} < 10^{16}$ GeV pour éviter de restaurer la symétrie de grande unification et donc la production de monopoles lors de se brisure ultérieure. Dans un contexte supersymétrique, on doit même imposer $T_{\rm rec} < 10^9$ GeV afin d'empêcher la production de gravitinos qui ruinerait le succès de la nucléosynthèse [138, 201, 312]. Notons enfin que le nombre d'oscillations nécessaire à la désintégration complète de l'inflaton est typiquement très grand dans ce type de réchauffement, $N_{\rm osc} \simeq 10^5, 10^{10}$.

Bien que relativement simple et intuitive, la théorie du réchauffement perturbatif a été progressivement remplacée par une théorie plus complexe, mais plus réaliste, celle du préchauffement [128, 377, 216, 377]. Les particules de l'univers sont alors produites plus tôt et typiquement beaucoup plus rapidement que dans la théorie du réchauffement, et ce de manière non perturbative. S'en suit alors une phase perturbative puis une phase de thermalisation des particules produites. Les résultats du préchauffement sont très dépendants des modèles mais l'aspect crucial dans chacun est la prise en compte que les masses effectives des particules couplées à l'inflaton sont en général dépendantes du temps. Si cette

masse effective varie de manière non-adiabatique [4] – c'est le cas chaque fois que l'inflaton passe au minimum de son potentiel par exemple –, le nombre d'occupation de certains modes de Fourier croît de manière exponentielle sous l'effet d'une résonance paramétrique, ce qu'on peut interpréter comme une production de particules. Il suffit alors de quelques oscillations de l'inflaton pour qu'il se désintègre complètement. Dans certains modèles, dit de préchauffement tachyonique [141], cette désintégration peut même avoir lieu avant que l'inflaton n'atteigne le minimum de son potentiel si la masse effective carrée des particules couplées à l'inflaton devient négative. La production de particules est alors très efficace et la phase de réchauffement est quasi-instantanée. Pour le lecteur intéressé, notons enfin l'existence d'un code numérique en libre accès, Latticeeasy [142], qui permet de simuler l'évolution de champs scalaires en interaction dans un espace temps en expansion.

Après avoir discuté du processus même du (p)réchauffement, une question naturelle est – quitte à anticiper sur certaines des notions présentées dans les sections et chapitres suivants : peut-il affecter les perturbations cosmologiques générées pendant l'inflation ? Non suite à l'inflation à un champ [417] car la perturbation de courbure ζ est alors conservée pour les échelles super-horizon (*c.f.* la sous-section 2.3.1). Oui par contre en présence de perturbations entropiques aux grandes échelles – et de perturbation de pression non-adiabatique en particulier – suite à l'inflation multichamp. Pour cette raison, les prédictions précises de tout modèle multichamp dans lequel des perturbations entropiques résiduelles subsistent à la fin de l'inflation dépendent du détail de la phase de réchauffement. Mentionnons enfin que les perturbations cosmologiques aux échelles plus petites, comme celles-qui traversent l'horizon au moment du réchauffement, peuvent, elles, être affectées par celui-ci, ce qui peut mener à la formation de trous noirs primordiaux [39, 146, 147, 165].

3.3 Les fluctuations quantiques pendant l'inflation canonique à un champ

Après avoir défini l'inflation et étudié sa dynamique homogène dans les sections précédentes, nous allons mettre à profit notre présentation de la théorie des perturbations cosmologiques au chapitre 2 pour montrer comment les fluctuations quantiques – microscopiques – de l'inflaton sont à même de produire les perturbations primordiales – macroscopiques – à l'origine du fond diffus cosmologique et des grandes structures que nous observons aujourd'hui. Avant de présenter en détail le calcul permettant de déterminer les spectres primordiaux des fluctuations scalaires, $P_{\mathcal{R}}(k)$, et gravitationnelles, $P_{\mathrm{t}}(k)$, il n'est pas inutile de donner un bref aperçu du mécanisme de genèse de ces fluctuations. Nous traitons ici de la théorie linéaire et repoussons l'étude des aspects non-linéaires à la partie III.

3.3.1 Un bref aperçu

La figure (3.5) est sans doute la plus importante pour comprendre la genèse des perturbations primordiales pendant l'inflation. La résolution du problème de l'horizon nous a poussé à définir l'inflation comme une période pendant laquelle le rayon de Hubble como-

4. Le qualificatif "adiabatique" fait références ici aux invariants adiabatiques mais n'a rien à voir avec la décomposition adiabatique/entropique.

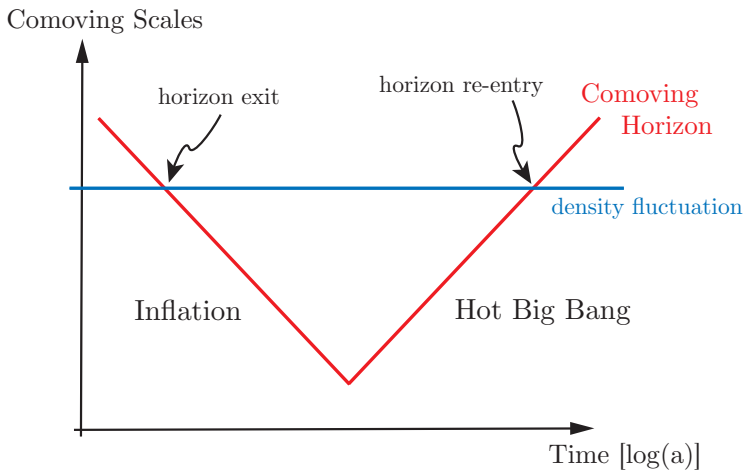

FIGURE 3.5 – Genèse et évolution des perturbations dans un univers inflationnaire : des fluctuations de nature quantique sont générées sous l'horizon, traversent l'horizon de Hubble pendant l'inflation avant de redevenir sub-Hubble pendant la période du Big Bang chaud. Comme $\mathcal{R}$ est constant hors de l'horizon pour l'inflation à un champ, il suffit de calculer son spectre de puissance à la traversée de l'horizon. Figure extraite de [42].

bile décroît, de telle façon que les échelles cosmologiques observables aujourd'hui vérifient initialement

$$k \gg aH \,. \tag{3.40}$$

D'après le principe d'équivalence, les fluctuations – de la métrique mais aussi de tout champ scalaire – ne sont pas sensibles à la courbure de l'espace-temps et "vivent" alors comme dans celui de Minkowski. La théorie quantique des champs nous enseigne comment quantifier ces fluctuations dans ce contexte. Advient ensuite la traversée du rayon de Hubble

$$k \approx aH \,, \tag{3.41}$$

pendant laquelle nous allons voir que le comportement des fluctuations dépend de leur masse effective. Qualitativement, on retient souvent que les fluctuations de tout champ scalaire léger ($m \lesssim H$) sont alors amplifiées tout en subissant un processus de décohérence : elles deviennent de nature classique, *i.e.* stochastique. Une fois que les perturbations sont devenues "super-Hubble"

$$k \ll aH \,, \tag{3.42}$$

on les caractérise souvent par la perturbation de courbure des sections spatiales qu'elles génèrent, $\mathcal{R}$ ou ζ. On sait, en effet, que pour des perturbations de type adiabatique – comme celles produites durant l'inflation à un champ – $\mathcal{R}$ (ou ζ) est constant aux échelles super-Hubble. Ceci permet de s'affranchir d'une description détaillée du processus de (p)réchauffement à la fin de l'inflation qui n'est pas encore bien compris. L'horizon de Hubble comobile croît ensuite après l'inflation de telle façon que toutes les fluctuations redeviennent sub-Hubble pendant l'ère de radiation ou l'ère de la matière.

Le calcul à effectuer est donc bien défini : il faut considérer les fluctuations linéaires du système couplé champ scalaire + gravitation, identifier les variables à quantifier et

déterminer leur équation d'évolution, puis calculer le spectre de puissance des perturbations de courbure et des perturbations gravitationnelles peu de temps après la traversée du rayon de Hubble.

3.3.2 Calcul de l'action quadratique

Pour effectuer la procédure de quantification des perturbations linéaires pendant l'inflation, il convient de calculer l'action correspondante, c'est-à-dire l'action quadratique dans les perturbations. Historiquement, ceci a d'abord été effectué en calculant l'action au second ordre puis en utilisant les équations de contrainte de la relativité générale pour simplifier l'action obtenue et l'exprimer en fonctions de variables invariantes de jauge [315]. Cette procédure est néanmoins très pénible et ne se prête pas facilement à une extension au-delà de l'approximation linéaire. Une méthode plus rapide consiste à exprimer les contraintes comme des équations de Hamilton-Jacobi dans le formalisme hamiltonien afin d'identifier les véritables degrés de liberté physiques [231, 13]). La méthode moderne enfin, introduite par Maldacena [286], consiste à écrire l'action dans le formalisme ADM (du nom de Arnowitt, Deser et Misner) [20] et à résoudre explicitement les équations de contraintes avant de développer l'action en termes de quantités invariantes de jauge. Par la suite, nous suivons cette procédure qui a le mérite de s'étendre facilement aux ordres supérieurs de la théorie des perturbations.

Le formalisme ADM et les contraintes

Dans le formalisme ADM, on écrit la métrique de l'espace-temps sous la forme

$$ds^2 = -N^2 dt^2 + h_{ij}(dx^i + N^i dt)(dx^j + N^j dt) \tag{3.43}$$

où N est appelé la fonction décalage [5] et N^i le vecteur déplacement [6]. Dans la suite, on emploie la notation P pour le Lagrangien de la matière $\mathcal{L}_{\text{mat}}$ (3.12). L'action couplée de la gravitation et de matière (3.12) s'écrit alors, dans des unités où $M_p = 1$,

$$S = \frac{1}{2}\int dt d^3x \sqrt{h} N (R^{(3)} + 2P) + \frac{1}{2}\int dt d^3x \frac{\sqrt{h}}{N}\left(E_{ij}E^{ij} - E^2\right) \tag{3.44}$$

où $R^{(3)}$ désigne la courbure scalaire de Ricci des sections spatiales de métrique h_{ij} et $h = \det(h_{ij})$. Enfin, le tenseur symétrique E_{ij} est donné par

$$E_{ij} \equiv \frac{1}{2}\dot{h}_{ij} - N_{(i|j)} \tag{3.45}$$

et $E \equiv E_i^i$ (les indices spatiaux sont montés et descendus avec la métrique spatiale h_{ij} de dérivée covariante désignée par le symbole $|$). La particularité de l'action (3.44) est que N et N_i y apparaissent de manière non-dynamique (c'est-à-dire sans dérivées temporelles). Ils constituent donc des multiplicateurs de Lagrange par rapport auxquels la variation de l'action donne des équations de contrainte, respectivement d'énergie et d'impulsion :

$$R^{(3)} + 2P + 2N\frac{\delta P}{\delta N} - \frac{1}{N^2}\left(E_{ij}E^{ij} - E^2\right) = 0\,, \tag{3.46}$$

5. *Lapse* en anglais.
6. *Shift* en anglais.

$$\left(\frac{1}{N}(E_i^j - E\delta_i^j)\right)_{|j} = h_{ik}\left(N\frac{\delta P}{\delta(N_{k|j})}\right)_{|j} . \tag{3.47}$$

On peut ensuite décomposer N_i en ses partie scalaire et vectorielle (voir la sous-section 2.1.1), $N_i = \tilde{N}_i + \partial_i\gamma$ où $\partial_i\tilde{N}^i = 0$, et développer N et N_i de manière perturbative [7].

$$\begin{aligned} N &= 1 + N_1 + N_2 + \cdots , \\ \tilde{N}_i &= \tilde{N}_i^{(1)} + \tilde{N}_i^{(2)} + \cdots , \\ \gamma &= \gamma_1 + \gamma_2 + \cdots . \end{aligned} \tag{3.48}$$

Les équations (3.46) et (3.47) peuvent alors être résolues algébriquement de manière itérative jusqu'à l'ordre souhaité, puis N et N_i substitués dans l'action (3.44). Une chose remarquable est alors la suivante : pour calculer l'action quadratique, il suffit de ne résoudre les contraintes qu'à l'ordre linéaire. Mieux, pour développer l'action à l'ordre (ϵ^n), $n \geq 3$, on peut ne substituer dans l'action les solutions pour les multiplicateurs de Lagrange que jusqu'à l'ordre (ϵ^{n-2}) seulement [286]. Ceci facilite grandement les calculs, en particulier pour traiter des perturbations cosmologiques au-delà de l'approximation linéaire (*cf.* la partie III). De plus, l'argument est suffisamment général pour être valable pour tout Lagrangien présentant des multiplicateurs de Lagrange. On en donne donc ici une preuve, basée sur la référence [100], mais qui a l'avantage de ne pas reposer sur la forme précise de l'action d'Einstein-Hilbert.

Notons de manière générique tout multiplicateur de Lagrange par N (dans le cas cosmologique, il s'agit de N et N_i). Son équation de contrainte est obtenue par variation de l'action par rapport à lui

$$\begin{aligned} \delta S = 0 &= \int d^4x\ \delta\mathcal{L}(\partial_i N, N) \\ &= \int d^4x \left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_i N)}\partial_i\delta N + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial N}\delta N\right] , \end{aligned} \tag{3.49}$$

où nous avons utilisé le fait que seul N et ses gradients *spatiaux* apparaissent. On note $N = N^{(0)} + \Delta N = N^{(0)} + N^{(1)} + N^{(2)} + \cdots$ de telle façon que

$$\begin{aligned} \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_i N)} &= \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_i N)}|_0 + \frac{\partial^2\mathcal{L}}{\partial(\partial_i N)\partial(\partial_j N)}|_0\partial_j\Delta N + \frac{\partial^2\mathcal{L}}{\partial(\partial_i N)\partial N}|_0\Delta N + \cdots , \\ \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial N} &= \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial N}|_0 + \frac{\partial^2\mathcal{L}}{\partial N^2}|_0\Delta N + \frac{\partial^2\mathcal{L}}{\partial(\partial_i N)\partial N}|_0\partial_i\Delta N + \cdots , \end{aligned} \tag{3.50}$$

où l'indice 0 signifie $\Delta N = 0$.

On peut vérifier dans le cas cosmologique que l'équation de Friedmann (1.19) est cohérente avec la contrainte d'énergie à l'ordre $\mathcal{O}(\epsilon^0)$, *i.e.* les termes d'ordre $\mathcal{O}(\epsilon^0)$ dans l'équation (3.49) :

$$\int d^4x \left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_i N)}|_{0,\epsilon^0}\partial_i\delta N + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial N}|_{0,\epsilon^0}\delta N\right] = \int d^4x\delta N \left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial N}|_{0,\epsilon^0} - \partial_i\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_i N)}|_{0,\epsilon^0}\right)\right] = 0 \tag{3.51}$$

7. Le développement perturbatif de N et N_i dépend évidemment de la jauge choisie pour mener les calculs. Pour l'inflation un champ par exemple, on peut travailler aussi bien dans la jauge de champ uniforme $\partial_i\phi = 0$, auquel cas N_n, $\tilde{N}_i^{(n)}$, $\gamma_n \simeq \mathcal{O}(\zeta^n)$, que dans la jauge de feuilletage plat auquel cas N_n, $\tilde{N}_i^{(n)}$, $\gamma_n \simeq \mathcal{O}(\phi^n)$. On note ici de manière générique N_n, $\tilde{N}_i^{(n)}$, $\gamma_n \simeq \mathcal{O}(\epsilon^n)$.

où on a effectué une intégration par parties. Les termes d'ordre $\mathcal{O}(\epsilon)$ dans (3.49) s'écrivent quant à eux

$$\int d^4x \left\{ \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_i N)}|_{0,\epsilon} + \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial(\partial_i N)\partial(\partial_j N)}|_{0,\epsilon^0} \partial_j N^{(1)} + \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial(\partial_i N)\partial N}|_{0,\epsilon^0} N^{(1)} \right] \partial_i \delta N \right.$$
$$\left. + \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial N}|_{0,\epsilon} + \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial N^2}|_{0,\epsilon^0} N^{(1)} + \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial(\partial_i N)\partial N}|_{0,\epsilon^0} \partial_i N^{(1)} \right] \delta N \right\} = 0 \ , \quad (3.52)$$

où l'indice ϵ ou ϵ^0 indique l'ordre dans la théorie des perturbations considéré dans chaque terme. Après intégration par partie, on obtient l'équation de contrainte déterminant ΔN à l'ordre $\mathcal{O}(\epsilon)$, *i.e.* $N^{(1)}$. La procédure s'étend de manière immédiate à la détermination de ΔN jusqu'à tout ordre.

Montrons maintenant qu'après substitution des multiplicateurs de Lagrange dans l'action et développement à l'ordre n, les termes contenant $N^{(n)}$, $n \geq 2$ et $N^{(n-1)}$, $n \geq 3$ disparaissent. Ces termes sont à priori contenus dans

$$\Delta S = \int d^4x \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_i N)}|_0 \partial_i \Delta N + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial(\partial_i N)\partial(\partial_j N)}|_0 (\partial_i \Delta N)(\partial_j \Delta N) \right.$$
$$\left. + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial N}|_0 \Delta N + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{(\partial N)^2}|_0 (\Delta N)^2 + \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial(\partial_i N)\partial N}|_0 (\partial_i \Delta N)\Delta N + \cdots \right\} \ . \quad (3.53)$$

Les termes en $N^{(n)}$ dans (3.53) sont

$$\int d^4x \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_i N)}|_{0,\epsilon^0} \partial_i N^{(n)} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial N}|_{0,\epsilon^0} N^{(n)} \right\} \ . \quad (3.54)$$

Après intégration par partie, on voit que $N^{(n)}$ multiplie un terme qui s'annule en vertu de l'équation de contrainte à l'ordre zéro (3.51). De même, les termes contenant $N^{(n-1)}$ ($n \geq 3$) dans l'équation (3.53),

$$\int d^4x \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial N}|_{0,\epsilon} N^{(n-1)} + \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial N^2}|_{0,\epsilon^0} N^{(n-1)} N^{(1)} + \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial(\partial_i N)\partial N}|_{0,\epsilon^0} \left(\partial_i N^{(n-1)} N^{(1)} + \partial_i N^{(1)} N^{(n-1)} \right) \right.$$
$$\left. + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_i N)}|_{0,\epsilon} \partial_i N^{(n-1)} + \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial(\partial_i N)\partial(\partial_j N)}|_{0,\epsilon^0} \partial_i N^{(n-1)} \partial_j N^{(1)} \right\} \quad (3.55)$$

s'annulent après intégration par partie car $N^{(n-1)}$ multiple alors un terme nul d'après l'équation de contrainte au premier ordre (3.52). Notons que ce schéma de démonstration ne se répète pas pour $N^{(n-2)}$, $n \geq 4$ (et au-delà) car l'action à l'ordre n contient des termes d'ordre $n-2$ multipliés par des termes linéaires au carré.

Choix de jauge

Revenons au problème du calcul de l'action au second ordre dans les fluctuations pour un champ scalaire couplé à la relativité générale (3.12). Comme expliqué à la sous-section 2.2.3, choisir une jauge particulière permet de simplifier les calculs sans sacrifier à la généralité si on exprime tous les résultats en fonction de quantités invariantes de jauges. Un choix de jauge possible dans le cas de l'inflation à un champ est d'utiliser un feuilletage

tel que l'inflaton soit homogène (en utilisant l'équation (2.63)) et un filage tel que $E = 0$ (en utilisant l'équation (2.70)) :

$$\phi = \phi_0(t)\,, \qquad h_{ij} \equiv g_{ij} = a^2[(1-2\psi)\delta_{ij} + h_{ij}]\,, \qquad \partial_i h_{ij} = h_i^i = 0\,. \tag{3.56}$$

Dans cette jauge, la densité scalaire d'impulsion est nulle (*cf.* (2.46)) si bien que ψ coïncide alors avec la perturbation de courbure comobile $\mathcal{R}$ (2.84). Cependant, un tel choix n'a pas d'extension naturelle au cas multichamp. Pour cette raison, nous utilisons la jauge plate (voir le paragraphe 2.2.3) dans laquelle les perturbations scalaires et vectorielles des composantes spatiales de la métrique sont nulles

$$\phi = \phi_0(t) + Q(t, x^i)\,, \qquad h_{ij} \equiv g_{ij} = a^2[\delta_{ij} + h_{ij}]\,, \qquad \partial_i h_{ij} = h_i^i = 0\,. \tag{3.57}$$

D'après les équations (2.84) et (2.46), la perturbation de courbure comobile linéaire s'écrit dans cette jauge

$$\mathcal{R} = \frac{H}{\dot\phi} Q\,. \tag{3.58}$$

A l'ordre linéaire de la théorie des perturbations, c'est-a-dire au niveau de l'action quadratique, on sait que les perturbations scalaires et vectorielles sont découplées (2.1.1). En pratique, on peut donc calculer l'action quadratique pour les fluctuations scalaires (respectivement tensorielles) en ne considérant que les fluctuations de l'inflaton, $h_{ij} = 0$ (respectivement que les fluctuations tensorielles, $Q = 0$).

L'action quadratique

La résolution des équations de contrainte (3.46) et (3.47) donne respectivement, à l'ordre linéaire :

$$N_1 = \frac{1}{2H}\dot\phi\, Q\,, \tag{3.59}$$

$$\partial^2\gamma_1 = \frac{a^2}{2H}\left[-\dot\phi\,\dot Q - V' Q - \frac{V}{H}\dot\phi\, Q\right] \tag{3.60}$$

et

$$\tilde N_i^{(1)} = 0\,, \tag{3.61}$$

le dernier résultat étant en accord avec le fait qu'un champ scalaire ne présente pas de degrés de liberté de type vectoriel. Substituant ces résultats dans l'action (3.12) et développant, on trouve l'action au second ordre

$$\begin{aligned} S_{(2)} &= \frac{1}{2}\int \mathrm{d}t\,\mathrm{d}^3x\, a^3 \left(\dot Q^2 - \frac{(\nabla Q)^2}{a^2} - \left[V'' - \frac{1}{a^3}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{a^3}{H}\dot\phi^2\right)\right] Q^2\right) \\ &+ \frac{1}{8}\int \mathrm{d}t\,\mathrm{d}^3x\, a^3 \left(\dot h_{ij}\dot h^{ij} - \frac{(\nabla h_{ij})\cdot(\nabla h^{ij})}{a^2}\right)\,. \end{aligned} \tag{3.62}$$

Nous étudions maintenant tour à tour les fluctuations scalaires et les fluctuations tensorielles.

3.3.3 Quantification et évolution des perturbations scalaires

Variable de Sasaki-Mukhanov

Sous l'horizon, le principe d'équivalence stipule que la physique doit être identique à celle dans un espace-temps de Minkowski. Il est donc naturel, pour procéder à la quantification des perturbations sous l'horizon, d'utiliser le temps conforme τ et la variable canoniquement normalisée associée

$$v = a\,Q \Leftrightarrow v = z\mathcal{R} \tag{3.63}$$

avec

$$z \equiv a\frac{\dot{\phi}}{H} = \pm a\sqrt{2\epsilon} \tag{3.64}$$

où l'équivalence découle de l'équation (3.58). Cette variable, et par extension toutes les variables canoniquement normalisées en temps conforme pendant l'inflation, sont souvent appelées variables de Sasaki-Mukhanov [353, 314]. L'action quadratique scalaire prend alors la forme très simple

$$S_{(2)s} = \frac{1}{2}\int \mathrm{d}\tau \mathrm{d}^3x \left[(v')^2 - (\nabla v)^2 + \frac{z''}{z}v^2\right]. \tag{3.65}$$

Les composantes de Fourier de v, définies par

$$v_{\mathbf{k}}(\tau) = \int \mathrm{d}^3\mathbf{x}\, v(\tau,\mathbf{x})e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}\,, \tag{3.66}$$

vérifient donc

$$v_k'' + \left(k^2 - \frac{z''}{z}\right)v_k = 0\,, \tag{3.67}$$

où nous notons $v_k \equiv v_{\mathbf{k}}$ par la suite car l'équation (3.67) ne dépend que de l'amplitude de $\mathbf{k}$ (c'est une conséquence générale de l'isotropie de la théorie). Comme attendu dans une théorie quadratique, *i.e.* de champ libre, le champ canoniquement normalisé obéit à une équation de type oscillateur harmonique, ici avec une masse dépendante du temps. Sauf cas particulier (l'inflation en loi de puissance par exemple, voir page 466 dans la référence [331]), on ne peut pas résoudre l'équation (3.67) exactement. On peut néanmoins obtenir une compréhension intuitive des solutions dans la limite de de Sitter, *i.e.* $\epsilon \to 0$. Le facteur d'échelle prend alors la forme (3.10), $a(\tau) = -\frac{1}{H\tau}$, si bien qu'on obtient

$$v_k'' + \left(k^2 - 2a^2H^2\right)v_k \simeq 0\,. \tag{3.68}$$

Largement sous l'horizon, $k \gg aH$, les solutions de (3.68) sont oscillantes et on va voir qu'on dispose d'un choix naturel pour fixer les conditions initiales correspondantes. Puis, à l'époque de la traversée de l'horizon, $k \simeq aH$, la pulsation effective devient imaginaire et les modes sont alors amplifiés. Hors de l'horizon, $k \ll aH$, on peut négliger le terme en k^2 dans l'équation (3.67), auquel cas il existe une solution évidente $v \propto z$, l'autre solution pouvant être obtenue par la méthode de variation de la constante. La solution générale dans ce régime est donc de la forme

$$v(\tau) = C_1 z(\tau) + C_2\int^{\tau}\frac{\mathrm{d}\tau'}{z^2(\tau')} \tag{3.69}$$

avec deux constantes C_1 et C_2 à déterminer. De (3.64), on déduit que terme en $\int^\tau \frac{\mathrm{d}\tau'}{z^2(\tau')}$ constitue – tout du moins dans le régime de variation lente – le mode décroissant et que le terme en $z(\tau)$ constitue le mode croissant. On pouvait l'anticiper en remarquant, à partir de (3.63), que la perturbation de courbure $\mathcal{R}$ est donnée par $\frac{v}{z}$. Or, on a montré de manière très générale (voir l'équation (2.108) et en dessous) que $\mathcal{R}$ est constant pour les modes super-Hubble dans le cas de perturbations adiabatiques, ce qui est le cas de l'inflation avec un champ scalaire. Ce qui reste à faire est alors clair : il faut raccorder le comportement sous l'horizon – déterminé par le processus de quantification – au comportement attendu hors de l'horizon – $\mathcal{R} = \text{cte}$ – en étudiant de manière précise l'amplification des modes à la traversée de l'horizon.

Quantification

Suivant la procédure standard de quantification en représentation d'Heisenberg [8], nous promouvons le champ v et son champ conjugué v' au rang d'opérateurs quantiques

$$v \quad \to \quad \hat{v}(\tau, \mathbf{x}) = \int \frac{\mathrm{d}\mathbf{k}^3}{(2\pi)^3} \left[v_k(\tau) \hat{a}_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} + v_k^*(\tau) \hat{a}_{\mathbf{k}}^\dagger e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \right] , \tag{3.70}$$

où de manière équivalente en espace de Fourier

$$v_{\mathbf{k}} \quad \to \quad \hat{v}_{\mathbf{k}}(\tau) = v_k(\tau) \hat{a}_{\mathbf{k}} + v_{-k}^*(\tau) \hat{a}_{-\mathbf{k}}^\dagger , \tag{3.71}$$

où les opérateurs de création et d'annihilation $\hat{a}_{-\mathbf{k}}^\dagger$ and $\hat{a}_{\mathbf{k}}$ satisfont la relation de commutation canonique

$$[\hat{a}_{\mathbf{k}}, \hat{a}_{\mathbf{k}'}^\dagger] = (2\pi)^3 \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}') , \tag{3.72}$$

et nous imposons la relation de commutation [9]

$$[\hat{v}(\tau, \mathbf{x}), \hat{v}'(\tau, \mathbf{x}')] = i\hbar \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') . \tag{3.73}$$

Il découle alors de (3.70), (4.14) et (3.73) que les fonctions $v_k(\tau)$ satisfont à la condition de normalisation [10]

$$\frac{i}{\hbar}(v_k^* v_k' - v_k^{*\prime} v_k) = 1 . \tag{3.74}$$

La condition (3.74) fournit une des conditions initiales permettant de déterminer la solution physique parmi l'espace vectoriel à deux dimensions des solutions de l'équation (3.67). L'autre condition correspond à effectuer un choix de vide quantique pour la théorie.

Le vide de Bunch-Davies

Le développement (3.70) en termes d'opérateurs création et annihilation est arbitraire dans le sens où on peut changer simultanément les fonctions $v_k(\tau)$ et les opérateurs $\hat{a}_{\mathbf{k}}$ en

8. En représentation de Heisenberg les opérateurs dépendent du temps alors que les états sont indépendants du temps.

9. Nous rétablissons momentanément les facteurs de $\hbar$ pour montrer le caractère familier de la condition (3.73).

10. v_k et v_k' sont solutions de l'équation (3.67) donc leur wronskien $v_k^* v_k' - v_k^{*\prime} v_k$ est indépendant du temps.

gardant l'opérateur $\hat{v}$ constant. Pour lever cette ambiguïté, on doit faire un choix d'état du vide pour les fluctuations

$$\hat{a}_{\mathbf{k}}|0\rangle = 0 \tag{3.75}$$

ou, de manière équivalente, donner une condition supplémentaire sur v_k (voir par exemple le chapitre 3 de la référence [67]). Dans le contexte général de la théorie des champs en espace temps courbe, il n'y a pas de choix du vide privilégié. Dans notre cas, un choix naturel existe cependant. En effet, à l'infini passé $|k\tau| \gg 1$ ou $k \gg aH$, l'équation (3.67) devient trivialement

$$v_k'' + k^2 v_k = 0\,, \tag{3.76}$$

qui est l'équation d'un oscillateur harmonique de pulsation indépendante du temps. Si on impose alors que le vide soit l'état d'énergie minimale, c'est-à-dire que l'état $|0\rangle$ annihilé par les opérateurs de création $\hat{a}_{\mathbf{k}}$ soit également l'état fondamental de l'Hamiltonien associé à l'action (3.65), on trouve facilement que $v_k(\tau)$ doit être proportionnel à $e^{ik\tau}$ ou $e^{-ik\tau}$, et non pas à une quelconque combinaison linéaire de ces deux solutions. La condition (3.74) impose alors de choisir le signe $-$ dans l'exponentielle ainsi que la normalisation de la solution :

$$\lim_{\tau\to-\infty} v_k = \frac{e^{-ik\tau}}{\sqrt{2k}}\,, \tag{3.77}$$

évidemment à une phase arbitraire près (on peut toujours changer τ en $\tau + \tau_0$). Ce choix est appelé le vide de Bunch-Davies.

La traversée de l'horizon et la limite super-Hubble

On ne peut généralement obtenir de solutions exactes à l'équation (3.67) que numériquement. On peut néanmoins obtenir une solution analytique valable en très bonne approximation pendant quelques e-folds autour de l'époque de traversée de l'horizon, période suffisamment longue pour interpoler efficacement entre les régimes $|k\tau| \gg 1$ et $|k\tau| \ll 1$. Pour cela, utilisons l'hypothèse de variation lente, dans laquelle on considère ϵ (3.7) et η (3.11) comme de petits paramètres et on néglige leur carrés et (localement) leurs dérivées [11]. Dans ce régime, où $a(\tau) \approx -\frac{1+\epsilon}{H\tau}$, l'équation (3.67) prend la forme

$$v_k'' + \left(k^2 - \frac{1}{\tau^2}\left(\nu^2 - \frac{1}{4}\right)\right) v_k \simeq 0 \tag{3.78}$$

où

$$\nu^2 \equiv \frac{9}{4} + 3\epsilon_* + \frac{3}{2}\eta_* \tag{3.79}$$

et où l'indice $*$ signifie que la quantité correspondante est évaluée à la traversée de l'horizon $k = aH$. En première approximation $\nu \approx \frac{3}{2}$ mais il est utile de considérer plus généralement le cas où ν^2 dans (3.78) a une valeur constante quelconque. On dispose alors des solutions exactes de cette équation. Quand ν est réel en particulier – c'est le cas dans le régime de variation lente – la solution générale de (3.78) est donnée par

$$v_k(\tau) = \left[A(k)H_\nu^{(1)}(-k\tau) + B(k)H_\nu^{(1)*}(-k\tau)\right]\sqrt{-\tau} \tag{3.80}$$

11. Stewart [394] a développé un formalisme pour calculer le spectre des perturbations dans le cas où les paramètres ϵ et η ne sont pas de variation lente.

où $H_\nu^{(1)}$ désigne la fonction de Hankel du premier type d'ordre ν. La forme asymptotique des fonctions de Hankel [331] montre alors que la solution vérifiant la condition initiale (3.77) est

$$v_k(\tau) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{i(\nu+1/2)\pi/2} \sqrt{-\tau}\, H_\nu^{(1)}(-k\tau) \tag{3.81}$$

dont le cas particulier $\nu = 3/2$ est très simple

$$v_k^{\nu=3/2}(\tau) = \frac{e^{-ik\tau}}{\sqrt{2k}} \left(1 - \frac{i}{k\tau}\right) . \tag{3.82}$$

Quand les modes deviennent super-Hubble, la solution (3.81) tend vers

$$v_k(\tau) \to 2^{\nu-3/2} \frac{\Gamma(\nu)}{\Gamma(3/2)} e^{i(\nu-1/2)\pi/2} \frac{1}{\sqrt{2k}} (-k\tau)^{-\nu+1/2} . \tag{3.83}$$

Ainsi, on voit que la valeur moyenne quadratique dans le vide de l'opérateur perturbation du champ en jauge plate $\hat{Q}_{\mathbf{k}} = \hat{v}_{\mathbf{k}}/a$ (*cf.* (3.63))

$$\langle 0|\hat{Q}_{\mathbf{k}}(\tau)\hat{Q}_{\mathbf{k}'}(\tau)|0\rangle = (2\pi)^3 \delta(\mathbf{k}+\mathbf{k}') \frac{|v_k(\tau)|^2}{a^2} \tag{3.84}$$

approche, à l'ordre dominant dans les paramètres de variation lente – $\nu \simeq \frac{3}{2}$ et $a \simeq -\frac{1}{H_* \tau}$ –, une constante hors du rayon de Hubble

$$\langle 0|\hat{Q}_{\mathbf{k}}(\tau)\hat{Q}_{\mathbf{k}'}(\tau)|0\rangle = (2\pi)^3 \delta(\mathbf{k}+\mathbf{k}') \frac{H_*^2}{2k^3} . \tag{3.85}$$

De plus, dans cette limite super-Hubble, on obtient

$$\hat{Q}(\tau, \mathbf{x}) \propto \int \mathrm{d}^3\mathbf{k} \frac{e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}}{k^{3/2}} \left(\hat{a}_{\mathbf{k}} + \hat{a}^\dagger_{-\mathbf{k}}\right) \tag{3.86}$$

de telle façon que toutes les observables construites à partir de Q commutent entre-elles. Dans ce sens, les perturbations cosmologiques subissent à la traversée de l'horizon une transition quantique-classique [12] et peuvent ainsi être interprétées comme des variables stochastiques. On identifie alors la moyenne d'ensemble d'une variable stochastique à la valeur moyenne dans l'état du vide de l'opérateur quantique associé. Utilisant les notations cosmologiques standard (*c.f.* la section 2.4), on obtient le spectre de puissance de la fluctuation du champ scalaire dans la jauge plate

$$\mathcal{P}_Q(k) = \left(\frac{H_*}{2\pi}\right)^2 \tag{3.87}$$

peu de temps après la traversée du rayon de Hubble. De manière équivalente ($\mathcal{R} = \frac{H}{\dot{\phi}} Q$), on a ainsi déterminé à l'ordre dominant la constante C_1 dans (3.69), autrement dit, la valeur asymptotique, constante, du spectre de puissance de la perturbation de courbure comobile aux échelles super-Hubble :

$$\mathcal{P}_\mathcal{R}(k) = \frac{H_*^2}{8\pi^2 \epsilon_*} . \tag{3.88}$$

12. Notons que la théorie est bien sûr unitaire, *i.e.* la relation de commutation canonique (3.73) entre l'opérateur $\hat{v}$ et son opérateur conjugué est vérifiée à tout temps, y compris hors de l'horizon.

Notons qu'à la traversée du rayon de Hubble, les modes croissants et décroissants sont à priori comparables, si bien que le membre de droite dans l'égalité (3.88) est en général différent de $\mathcal{P}_{\mathcal{R}}(k)|_{\tau_*=-1/k}$.

Du fait de la variation lente du paramètre de Hubble H et du paramètre de décélération ϵ, les spectres obtenus (3.87) et (3.88) sont presque invariants d'échelle (*cf.* la sous-section 2.4.2). Au contraire, si le paramètre ν^2 dans (3.78) est négatif, les solutions de cette équation sont obtenues en remplaçant ν par $i|\nu|$ dans (3.80). On montre alors (voir par exemple [331]) que le spectre diminue rapidement à grande longueur d'onde, *i.e.* le spectre est bleu, d'indice spectral $n_s = 3$, ce qui est exclu par les observations. Comme dans le cas d'un champ test massif χ dans un espace de de Sitter, on peut montrer que $v_\chi \equiv aQ_\chi$ vérifie l'équation (3.78) avec

$$\nu_\chi^2 = \frac{9}{4} - \frac{m_\chi^2}{H^2}\,, \tag{3.89}$$

on retient généralement qu'un champ scalaire léger pendant l'inflation, $m < \frac{3}{2}H$, développe des fluctuations super-Hubble d'amplitude caractéristique $H/2\pi$ alors qu'un champ scalaire lourd voit ses fluctuations supprimées aux grandes échelles. Plus généralement, l'équation d'évolution de toute variable de Sasaki-Mukhanov associée à un champ scalaire peut localement, *i.e.* à la traversée de l'horizon, se mettre sous la forme (3.78). Le critère rigoureux pour déterminer si le champ correspondant développe des fluctuations super-Hubble est donc de savoir si ν^2 est positif ou négatif. Dans le premier cas, on parlera d'un champ effectivement léger (et ce d'autant plus que $\nu \approx 3/2$), dans l'autre d'un champ effectivement lourd au sens des perturbations [13].

Du calcul détaillé que nous venons de mener, nous pouvons retenir que, sous la rayon de Hubble et jusqu'à sa traversée, les perturbations cosmologiques sont régies par la théorie quantique des champs alors qu'hors de celui-ci, un traitement classique en relativité générale est suffisant, avec des conditions initiales stochastiques déterminées par les résultats du calcul quantique. On retrouvera ce schéma par la suite dans des situations plus complexes, en particulier dans l'inflation multichamp et au-delà de l'approximation linéaire.

3.3.4 Quantification et évolution des perturbations tensorielles

Après avoir décrit en détail la quantification et l'évolution des perturbations scalaires, le calcul similaire pour les perturbations tensorielles est presque immédiat.

Après développement en mode de Fourier (*cf.* (2.116))

$$h_{ij} = \int \frac{\mathrm{d}^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \sum_{s=+,\times} \epsilon_{ij}^s(k) h_{\mathbf{k}}^s(\tau) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}\,, \tag{3.90}$$

le secteur tensoriel de l'action au second ordre (3.62) s'écrit

$$S_{(2)_t} = \sum_s \int \mathrm{d}t\, \mathrm{d}^3\mathbf{k} \frac{a^3}{8} \left[(\dot{h}_{\mathbf{k}}^s)^2 - \frac{k^2}{a^2} (h_{\mathbf{k}}^s)^2 \right]\,. \tag{3.91}$$

13. Notons que le comportement des perturbations à la limite entre les deux régimes peut mener à une phénoménologie intéressante, notamment dans le cas multichamp [104].

Si on définit les champs canoniquement normalisés en temps conforme

$$v_{\mathbf{k}}^s \equiv \frac{a}{2} h_{\mathbf{k}}^s \,, \tag{3.92}$$

on obtient alors

$$S_{(2)} = \sum_s \frac{1}{2} \int \mathrm{d}\tau \mathrm{d}^3\mathbf{k} \left[(v_{\mathbf{k}}^{s\,\prime})^2 - \left(k^2 - \frac{a''}{a} \right) (v_{\mathbf{k}}^s)^2 \right] \,, \tag{3.93}$$

autrement dit deux copies de l'action scalaire (3.65) dans la limite de variation lente $\frac{z''}{z} \approx \frac{a''}{a}$, avec l'identification $\frac{1}{2} h_{\mathbf{k}}^s \Leftrightarrow Q_{\mathbf{k}}$. Du spectre de puissance (3.87), on en déduit donc le spectre tensoriel

$$\mathcal{P}_t(k) = 2 \times 4 \left(\frac{H_*}{2\pi} \right)^2 \tag{3.94}$$

où le facteur 2 vient des deux polarisations (2.145) et le facteur 4 de la renormalisation par rapport au cas d'un champ scalaire.

Il est important de noter que le résultat (3.94) ne dépend que de l'action d'Einstein-Hilbert [14]. Il est donc valide indépendamment du contenu matériel pendant l'inflation, contrairement au résultat (3.88) pour les fluctuations scalaires.

3.3.5 Spectres primordiaux

Nous avons montré aux sous-sections précédentes que les spectres primordiaux des fluctuations scalaires et des fluctuations tensorielles générées par l'inflation un champ sont donnés par

$$\mathcal{P}_{\mathcal{R}}(k) = \frac{1}{8\pi^2 \epsilon} \frac{H^2}{M_p^2} \bigg|_{k=aH} \,, \tag{3.95}$$

$$\mathcal{P}_t(k) = \frac{2}{\pi^2} \frac{H^2}{M_p^2} \bigg|_{k=aH} \,, \tag{3.96}$$

où nous avons réintroduit la masse de Planck et où $\epsilon \equiv -\dot{H}/H^2$. Le rapport tenseur sur scalaire est donc donné par

$$r(k) \equiv \frac{\mathcal{P}_t(k)}{\mathcal{P}_{\mathcal{R}}(k)} = 16\, \epsilon_* \,. \tag{3.97}$$

Dépendance d'échelle

Calculons les indices spectraux associés aux spectres précédents

$$n_{\mathrm{s}} - 1 \equiv \frac{d \ln \mathcal{P}_{\mathcal{R}}}{d \ln k} \,, \qquad n_{\mathrm{t}} \equiv \frac{d \ln \mathcal{P}_{\mathrm{t}}}{d \ln k} \,. \tag{3.98}$$

14. On avait d'ailleurs déjà déterminé les équations d'évolution des fluctuations tensorielles (*cf.* (2.117)) à partir des équations d'Einstein mais la prescription de conditions initiales physiquement motivées nécessite la quantification et donc le calcul de l'action correspondante.

Pour cela, il est utile de remarquer que la dérivée d'une quantité x par rapport à $\ln k$ peut être exprimée en fonction de sa dérivée temporelle à la traversée du rayon de Hubble

$$\left.\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\ln k}\right|_{k=aH} = \left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}N}\right)\left.\left(\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}\ln k}\right)\right|_{k=aH} = \left.\frac{1}{1-\epsilon}\frac{\dot{x}}{H}\right|_{k=aH} \tag{3.99}$$

où on a utilisé qu'à la traversée de l'horizon $k = aH$,

$$\ln k = \mathrm{cte} + N + \ln H \tag{3.100}$$

d'où

$$\frac{dN}{d\ln k} = \left[\frac{d\ln k}{dN}\right]^{-1} = \left[1 + \frac{d\ln H}{dN}\right]^{-1} = (1-\epsilon)^{-1}\,. \tag{3.101}$$

A partir de (3.95) et (3.96), on en déduit qu'au premier ordre dans les paramètres de variation lente,

$$n_{\mathrm{s}} - 1 = -2\epsilon_* - \eta_* \tag{3.102}$$

et

$$n_{\mathrm{t}} = -2\epsilon_* \tag{3.103}$$

où on a utilisé la définition (3.11). Il convient ici de remarquer que même si le résultat (3.95) pour l'amplitude des fluctuations scalaires a été obtenu à l'ordre zéro dans l'approximation de variation lente, *i.e.* en considérant ϵ_* et η_* nuls dans l'équation (3.79), le résultat (3.102) obtenu pour l'indice spectral est bien valide au premier ordre dans cette approximation. En effet, on se convainc facilement d'après la solution (3.83) que les corrections au résultat dominant (3.82) donnent des contributions à l'indice spectral du second ordre dans l'approximation de variation lente. Ainsi, bien qu'elle puisse paraître grossière, la solution approchée (3.82) est suffisante en pratique.

De (3.97) et de (3.103), on en déduit la relation

$$r = -8n_{\mathrm{t}}\,, \tag{3.104}$$

reliant des quantités *à priori* sans lien, le rapport entre les amplitudes des fluctuations tensorielles et scalaires d'une part, l'indice spectral des fluctuations tensorielles d'autre part. Une confirmation observationnelle de cette relation abonderait donc dans le sens d'une origine inflationnaire, à un champ, des fluctuations primordiales. Pour cette raison, cette relation est appelée *relation de cohérence*.

3.4 L'inflation à un champ avec des termes cinétiques non standard ou "k-inflation"

L'inflation à un champ en roulement lent est capable à la fois de résoudre les problèmes du modèle du Big Bang chaud (sections 3.1 et 3.2.2) et de générer des fluctuations primordiales dont les propriétés sont en accord avec les observations (section 2.4). Pour ces raisons, l'inflation est devenue le paradigme de la physique de l'univers primordial. Il convient cependant de remarquer que l'inflation basée sur un champ scalaire en roulement lent n'est qu'un moyen parmi d'autres de réaliser une période d'inflation cosmologique. Est

digne d'intérêt tout autre scénario assurant une expansion accélérée suffisamment longue et la production de perturbations primordiales en bonne approximation adiabatiques, invariantes d'échelle et gaussiennes. Nous donnerons au chapitre 4 des motivations pour considérer d'autres scénarios d'univers primordial, dans lesquels plusieurs champs scalaires sont actifs en particulier. Dans cette section, nous étendons le calcul des perturbations cosmologiques à une phase d'inflation en variation lente soutenue par un champ scalaire minimalement couplé à la gravité mais d'action sans quoi arbitraire [15],

$$S = \int \mathrm{d}^4x\sqrt{-g}\left[\frac{1}{2}R + P(X,\phi)\right] \tag{3.105}$$

où

$$X \equiv -\frac{1}{2}g^{\mu\nu}\partial_\mu\phi\,\partial_\nu\phi \tag{3.106}$$

et le Lagrangien P n'est supposé qu'être une fonction régulière de ses deux variables. On retrouve le cas canonique par le choix

$$P_{\mathrm{can}} = X - V(\phi) \tag{3.107}$$

mais P dans l'action (3.105) peut en général contenir des puissances supérieures X^n, $n > 1$ du terme cinétique. Pour cette raison, on appelle cette classe de modèle l'inflation à un champ avec des termes cinétiques non standard, ou *k-inflation*, inspiré de l'anglais "kinetic inflation" [19, 159] [16].

Dans l'univers de fond plat de FLRW, dans lequel X se réduit à $\frac{1}{2}\dot{\phi}^2$, le tenseur énergie-impulsion associé à P est celui d'un fluide parfait de densité d'énergie ρ et de pression p données par

$$\rho = 2XP_{,X} - P\,, \qquad p = P\,, \tag{3.108}$$

de telle façon que

$$\epsilon = \frac{3}{2}(1+w) = \frac{1}{2}\frac{\dot{\phi}^2 P_{,X}}{H^2}\,. \tag{3.109}$$

Dans la suite, nous supposons que l'évolution homogène est telle qu'une phase d'inflation de variation lente est réalisée, $\epsilon, \eta \equiv \dot{\epsilon}/H\epsilon \ll 1$ et nous mettons à profit notre étude détaillée des perturbations cosmologiques dans le cas canonique 3.3 en menant à bien le calcul correspondant dans ce cas plus général.

Dans la suite, on suppose que $P_{,X} + 2XP_{,XX} > 0$ et $P_{,X} > 0$ afin d'éviter la propagation de degrés de liberté "fantômes" et tachyoniques et on introduit la *"vitesse du son"*

$$c_s \equiv \sqrt{\frac{P_{,X}}{P_{,X} + 2XP_{,XX}}} \tag{3.110}$$

15. Nous nous restreignons également à des Lagrangiens invariants de Lorentz. Des modèles d'inflation ne respectant pas cette condition ont également été proposés, comme l'inflation fantôme [16], *ghost inflation* en anglais. Nous les mentionnerons brièvement à la section 5.5.

16. Le terme $k - inflation$ désignait initialement le modèle particulier présenté dans l'article [19]. Il désigne maintenant par extension les modèles non triviaux de la forme (3.105).

qui sera interprété comme la vitesse de propagation des fluctuations scalaires [17]. Dans le cas canonique (3.107), la vitesse du son est égale à la vitesse de la lumière (1 dans nos unités) mais dans le cas général, c_s est quelconque et dépendant du temps (par l'intermédiaire de l'évolution de l'inflaton). Les conséquences des théories dans lesquelles la vitesse du son est plus grande que la vitesse de la lumière sont analysées dans la référence [26]. Nous n'appliquerons par la suite le formalisme de k-inflation qu'à l'inflation Dirac-Born-Infeld au chapitre 7 dans laquelle $c_s < 1$.

En suivant pas à pas la méthode de calcul de l'action quadratique exposée à la sous-section 3.3.2, on identifie la variable canoniquement normalisée en temps conforme

$$v = a\,\frac{\sqrt{P_{,X}}}{c_s}\,Q \Leftrightarrow v = z\mathcal{R} \tag{3.111}$$

avec

$$z \equiv a\frac{\dot{\phi}}{H}\frac{\sqrt{P_{,X}}}{c_s} = \pm\frac{a}{c_s}\sqrt{2\epsilon}\,. \tag{3.112}$$

L'action scalaire au second ordre prend alors la forme

$$S_{(2)s} = \frac{1}{2}\int \mathrm{d}\tau\mathrm{d}^3x\,\left[(v')^2 - c_s^2(\nabla v)^2 + \frac{z''}{z}v^2\right] \tag{3.113}$$

d'où on déduit que les composantes de Fourier de v vérifient

$$v_k'' + \left(c_s^2k^2 - \frac{z''}{z}\right)v_k = 0\,. \tag{3.114}$$

Le champ v et son champ conjugué v' sont ensuite promus au rang d'opérateurs quantiques de manière standard (3.70). L'apparition de la vitesse du son non-triviale c_s rend par contre plus subtil le choix d'un état du vide. En effet, le calcul de l'Hamiltonien associé à l'action quadratique (3.113) montre qu'on ne peut en général éviter la production de particules, *i.e.* on ne peut pas imposer que le vide soit état propre de l'Hamiltonien. On ne peut le faire dans un sens approximé qu'en supposant que la vitesse du son est lentement variable, ce qui est quantifié par l'introduction du paramètre d'adiabaticité

$$s \equiv \frac{\dot{c}_s}{Hc_s}\,. \tag{3.115}$$

On suppose donc par la suite que la condition $s \ll 1$ est vérifiée. Le vide adiabatique correspondant (il s'agit d'une solution de type WKB) est donné par

$$\lim_{\tau\to-\infty} v_k = \frac{e^{-i\int^\tau kc_s(\tau')\mathrm{d}\tau'}}{\sqrt{2kc_s}} \approx \frac{e^{-ikc_s\tau}}{\sqrt{2kc_s}}\,. \tag{3.116}$$

Dans le régime de variation lente dans lequel $z''/z \approx a''/a \approx -2/\tau^2$, la solution de l'équation (3.114) vérifiant (3.116) est alors donnée par [18]

$$v_k(\tau) = \frac{e^{-ikc_s\tau}}{\sqrt{2kc_s}}\left(1 - \frac{i}{kc_s\tau}\right)\,, \tag{3.117}$$

17. Nous utilisons la notation standard c_s mais la quantité (3.110) n'a rien à voir avec la vitesse du son adiabatique (2.98).

18. La référence [272] traite en détails des approximations nécessaires à la résolution de l'équation (3.114).

qui est obtenue à partir de (3.82) en opérant la substitution $k \to kc_s$. Il est ainsi clair que les fluctuations scalaires deviennent classiques non à la traversée du rayon de Hubble $k = aH$ mais à la traversée de l'*horizon du son* $kc_s = aH$ qu'on notera encore par l'indice $*$. La perturbation de courbure $\mathcal{R}$ est évidemment constante hors de l'horizon (en accord avec le fait qu'il s'agit d'une période d'inflation à un champ) et on déduit de (3.117) que

$$\mathcal{P}_{\mathcal{R}}(k) = \frac{1}{8\pi^2 \epsilon c_s} \frac{H^2}{M_p^2}\bigg|_{kc_s=aH} . \tag{3.118}$$

Les fluctuations tensorielles ne sont, elles, sensibles qu'à l'évolution du facteur d'échelle et vérifient toujours (*cf.* (3.96))

$$\mathcal{P}_t(k) = \frac{2}{\pi^2} \frac{H^2}{M_p^2}\bigg|_{k=aH} \tag{3.119}$$

Notons que les fluctuations tensorielles et scalaires "voient" deux horizons différents, l'un de Hubble, l'autre sonique et que l'évaluation des membres de droite des équations (3.118) et (3.119) se fait à des instants différents. Dans la limite où le paramètre de Hubble varie peu entre les deux horizons – à moins que c_s soit ridiculement petit ou grand, ils ne sont séparés par au plus que quelques e-folds – le rapport tenseur sur scalaire devient (voir [272] pour une formule plus précise)

$$r = 16\epsilon_* c_{s*} . \tag{3.120}$$

On déduit des résultats précédents la nouvelle forme de l'indice scalaire

$$n_{\rm s} - 1 = -2\epsilon_* - \eta_* - s_* \tag{3.121}$$

et de la relation de cohérence

$$r = -8 n_{\rm t} c_{s*} . \tag{3.122}$$

Il est intéressant de noter que, même pour un Lagrangien à un champ complètement général (3.105), la physique linéaire des fluctuations quantiques (3.113) est très simple et est à même de produire des perturbations super-Hubble presque invariantes d'échelle. La genèse de celles-ci n'est donc pas l'apanage de l'inflation en roulement lent.

3.5 Quel modèle d'inflation ?

3.5.1 Reconstruction locale du potentiel inflationnaire

Au niveau phénoménologique auquel nous nous sommes placés jusque là, un scénario d'inflation correspond à la prescription d'un potentiel (3.12) (ou plus génériquement d'un potentiel et de termes cinétiques (3.105) pour la k-inflation). Montrons, dans le cas simple de l'inflation en roulement lent, comment les observables cosmologiques permettent de déterminer ce potentiel. Les relations (3.26) permettent de réexprimer les résultats (3.95), (3.96) et (3.102) en termes du potentiel et de ses dérivées :

$$\mathcal{P}_{\mathcal{R}}(k) = \frac{1}{24\pi^2} \frac{V}{\epsilon_{\rm v} M_p^4}\bigg|_{k=aH} \tag{3.123}$$

$$\mathcal{P}_{\rm t}(k) = \frac{2}{3\pi^2} \frac{V}{M_p^4}\bigg|_{k=aH} \tag{3.124}$$

$$n_{\rm s} - 1 = -\epsilon_{\rm v*} - \eta_{\rm v*} . \tag{3.125}$$

Ainsi, mesurer l'amplitude de $\mathcal{P}_{\rm t}$ ($\to V$), de $\mathcal{P}_{\mathcal{R}}$ ($\to V'$) et la dépendance d'échelle du spectre scalaire $n_{\rm s}$ ($\to V''$) permet de reconstruire localement le potentiel inflationnaire autour de $\phi_{\rm cmb}$, valeur de l'inflaton quand les fluctuations observables dans le CMB traversent l'horizon :

$$V(\phi) = V|_{\rm cmb} + V'|_{\rm cmb}\,(\phi - \phi_{\rm cmb}) + \frac{1}{2}\,V''|_{\rm cmb}\,(\phi - \phi_{\rm cmb})^2 + \cdots\,, \tag{3.126}$$

où $(\dots)|_{\rm cmb} = (\dots)|_{\phi=\phi_{\rm cmb}}$. La mesure de la dépendance d'échelle de l'indice spectral scalaire (2.142) permet même de pousser le développement jusqu'à la dérivée troisième du potentiel. Nous ne considérerons pas plus longuement la reconstruction du potentiel inflationnaire (et du Lagrangien P dans le cas général) dans ce mémoire mais le lecteur peut se référer à [247, 246, 331, 326, 327, 259, 329, 4, 7] pour plus de détails et des applications.

3.5.2 Ondes gravitationnelles et physique des hautes énergies

La contrainte observationnelle actuelle sur le rapport tenseur sur scalaire est $r < 0.24\,(95\%\,CL)$ (2.156) et les futures missions d'observation du mode B de la polarisation auront la sensibilité nécessaire pour détecter sans ambiguïté un signal jusqu'à $r \approx 0.01$ [47]. Nous montrons maintenant qu'une telle détection, ou au contraire l'obtention de la contrainte $r < 0.01$, fournira des informations cruciales sur la physique qui sous-tend l'inflation. Deux aspects seront plus particulièrement éclairés :

1. **L'échelle d'énergie de l'inflation**
   L'amplitude des fluctuations tensorielles produites pendant l'inflation (3.96) est proportionnelle à H^2 à cette époque. Or, dans l'inflation standard, du type de roulement lent par exemple, $3H^2M_p^2 \approx V$. Comme l'amplitude $\mathcal{P}_{\mathcal{R}}$ des fluctuations scalaires est fixée observationnellement (*c.f.* l'équation (2.153)), le rapport tenseur sur scalaire mesure directement l'échelle d'énergie pendant l'inflation

   $$V^{1/4} \sim \left(\frac{r}{0.01}\right)^{1/4} 10^{16}\,\text{GeV}\,. \tag{3.127}$$

   Ainsi, l'observation d'ondes gravitationnelles primordiales imputables à l'inflation indiquerait que celle-ci opère à des échelles d'énergie comparables à celles des théories de grande unification, c'est-à-dire largement au-delà des énergies mises en jeu au LHC par exemple. L'impact d'une telle découverte sur la physique des particules serait immense.

2. **L'échelle d'excursion de l'inflaton**
   D'après (3.97) et (3.21), on peut relier le rapport tenseur sur scalaire à l'évolution de l'inflaton

   $$r(N) = \frac{8}{M_p^2}\left(\frac{d\phi}{dN}\right)^2\,. \tag{3.128}$$

   La variation totale de l'inflaton (voir la figure (3.4)) entre l'époque à laquelle les plus grandes échelles observables dans le CMB traversent l'horizon, $N = 0$, et la fin de

l'inflation, $N_{\rm fin}$, est donc donnée par [275]

$$\frac{\Delta\phi}{M_p} \equiv \int_{\phi_{\rm fin}}^{\phi_{\rm cmb}} \frac{|{\rm d}\phi|}{M_p} = \int_0^{N_{\rm fin}} \left(\frac{r}{8}\right)^{1/2} {\rm d}N \equiv \left(\frac{r_*}{8}\right)^{1/2} N_{\rm eff}\,, \tag{3.129}$$

où

$$N_{\rm eff} \equiv \int_0^{N_{\rm fin}} \left(\frac{r(N)}{r_*}\right)^{1/2} {\rm d}N\,. \tag{3.130}$$

La valeur de $N_{\rm eff}$ dépend du modèle d'inflation considéré et de l'évolution précise du rapport tenseur sur scalaire $r(N)$ en particulier. Il est important de noter que les observations ne peuvent le contraindre que sur les quelques e-folds pendant lesquels les échelles cosmologiques observables traversent l'horizon pendant l'inflation, $N \lesssim 4$ avec le CMB, $N \lesssim 10$ avec les grandes structures. A l'ordre un dans l'approximation de variation lente cependant, la variation fractionnelle de r

$$\frac{{\rm d}\ln r}{dN} = \eta = n_t - (n_s - 1) = -\left[(n_s - 1) + \frac{r}{8}\right], \tag{3.131}$$

peut être considérée comme constante pendant les $N_{\rm fin} \approx 60$ e-folds d'inflation, où on a utilisé (3.97), (3.103) et (3.104) pour déterminer (3.131). Les contraintes observationnelles actuelles donnent alors $30 \lesssim N_{\rm eff} \lesssim 60$, si bien qu'on obtient [275, 48]

$$\frac{\Delta\phi}{M_p} \gtrsim 1.06 \times \left(\frac{r_*}{0.01}\right)^{1/2}\,. \tag{3.132}$$

Ainsi, un rapport tenseur sur scalaire plus grand que 0.01 indiquerait un déplacement du champ super-Planckien pendant l'inflation. Assurer que le potentiel inflationnaire soit suffisamment plat sur une telle distance est hautement non-trivial du point de vue d'une théorie effective à basse énergie (voir la sous-section suivante). La détection d'ondes gravitationnelles primordiales donnerait donc des indices précieux sur les propriétés ultraviolettes de la théorie microscopique fondamentale correspondante [47].

3.5.3 Une description microphysique de l'inflation ?

L'approche poursuivie jusque-là dans ce manuscrit est phénoménologique : on a postulé l'existence d'un champ scalaire et établi les conditions qu'il doit vérifier pour soutenir une période d'inflation et générer les perturbations cosmologiques observées. D'un point de vue phénoménologique, il n'y a rien à reprocher à un modèle d'inflation construit selon cette approche. Cependant, tout comme le modèle de Ginzburg-Landau de la supraconductivité n'est qu'une description phénoménologique d'une théorie microscopique sous-jacente, la théorie BCS des paires de Cooper, il serait beaucoup plus satisfaisant de disposer d'une description microphysique de l'inflation permettant de répondre, ou au moins d'adresser des questions naturelles comme : quelle est la nature de l'inflaton ? Quelle est la forme du potentiel inflationnaire ? Quelle est l'échelle d'énergie de l'inflation ? Bref, comment incorporer l'inflation dans un cadre de physique des hautes énergies ? Dans cette perspective, la construction d'un scénario d'inflation canonique à un champ nécessite au moins [19] :

19. Dans une autre perspective, notons les progrès récents de la description systématique de l'inflation dans le cadre d'une théorie des champs effective [105, 420, 36, 374].

- la prescription d'un cadre théorique : théories de grande unification, théories supersymétriques, théorie des cordes ..., et le calcul du potentiel correspondant.
- l'identification d'un champ scalaire au potentiel suffisamment plat, $m_{\rm inf} \ll H$.
- la vérification que les autres champs scalaires sont massifs, $m_i \gg H$ (sans quoi il s'agit d'une période d'inflation multichamp, *cf.* le chapitre suivant).
- la description du processus de réchauffement via le couplage de l'inflaton à la matière ordinaire.

Parmi ces différents points, insistons sur celui crucial de la platitude du potentiel inflationnaire . Dans toute théorie effective à basse énergie de cutoff Λ, la présence des degrés de liberté de masse $M > \Lambda$ se manifeste sous la forme d'opérateurs du type $\mathcal{O}_\delta/M^{\delta-4}$, où δ désigne la dimension de $\mathcal{O}_\delta$. Dans le cadre qui nous intéresse, en l'absence de symétries particulières protégeant le potentiel de l'inflaton ϕ, son Lagrangien reçoit des corrections de la forme

$$\frac{\mathcal{O}_6}{M_p^2} = \frac{\mathcal{O}_4}{M_p^2}\phi^2 \,. \tag{3.133}$$

Si $\mathcal{O}_4$ a une valeur dans le vide comparable à la densité d'énergie pendant l'inflation, $\langle \mathcal{O}_4 \rangle \sim V$, le terme (3.133) donne une correction à la masse de l'inflaton d'ordre H, autrement dit, une contribution au paramètre de roulement lent $\eta_{\rm v}$ d'ordre un, empêchant une durée prolongée de l'inflation [109, 393]. Ce problème complètement générique, dont on peut en trouver une excellente description dans les revues [300, 49], est appelé le problème η. Il motive fortement tout scénario présentant une symétrie approchée $\phi \to \phi + {\rm cte}$, dite *shift-symmetry*, comme les scénarios où l'inflaton est identifié à un axion. Notons cependant qu'imposer une telle symétrie au niveau classique n'implique pas qu'elle soit vérifiée au niveau quantique. De manière générale, le problème η est généralement considéré comme la difficulté majeure quand on souhaite incorporer l'inflation en roulement lent dans un cadre de physique des hautes énergies.

Chapitre 4

L'inflation multichamp

Sommaire

4.1 Motivations **89**
4.2 L'inflation multichamp "canonique" **90**
4.2.1 Évolution homogène 91
4.2.2 Quantification et traversée du rayon de Hubble 91
4.2.3 La décomposition adiabatique/entropique 93
4.2.4 Matrice de transfert et spectres primordiaux 97
4.2.5 Extensions 99
4.3 L'inflation multichamp généralisée (article) **100**

4.1 Motivations

Quand on souhaite dépasser la description phénoménologique de l'inflation comme un champ scalaire muni d'un potentiel approprié mais plutôt décrire l'inflation dans un cadre de physique des hautes énergies, considérer la présence de plusieurs champs scalaires actifs pendant l'inflation est très naturel. En effet, toutes les extensions du modèle standard de la physique des particules ont comme point commun la profusion de champs scalaires. Une théorie de grande unification basée sur le groupe $SO(10)$, par exemple, présente une centaine de champs scalaires. De même, la supersymétrie requiert l'existence de partenaires supersymétriques scalaires en grand nombre tandis que la théorie des cordes est peuplée de champs scalaires appelés *modules* décrivant les caractéristiques géométriques des dimensions compactes. Or, tout champ scalaire léger pendant l'inflation, *i.e.* dont la masse effective est plus petite que le paramètre de Hubble, développe des fluctuations super-Hubble et l'on sait que la présence simultanée de plusieurs types de fluctuations ouvre la possibilité de perturbations entropiques/isocourbes, modifiant singulièrement les prédictions cosmologiques (ceci a été remarqué pour la première fois par Starobinsky et Yokoyama [391] dans le cadre de la gravité de Jordan-Brans-Dicke dont le secteur gravitationnel présente un champ scalaire). Ainsi, dès que l'on considère un modèle d'inflation en

présence de plusieurs champs scalaires, la question clé est : combien, parmi les champs scalaires présents, sont effectivement légers ? En pratique, la masse effective des fluctuations associées à un champ scalaire dépendant de la valeur et de l'évolution de tous les autres champs, apporter une réponse à cette question est souvent subtil et il est préférable de développer la théorie multichamp de tout scénario, quitte à restreindre ensuite le nombre de degrés de liberté effectif. En effet, nombre de modèles initialement considérés comme effectivement "un champ" se sont avérés en fait relever de l'inflation multichamp, altérant les prédictions, voire la viabilité même des modèles [230, 324].

Notons que si toutes les espèces de particules sont en équilibre thermique au début de l'ère de radiation et que leur densité locale est uniquement fonction de la température (avec des potentiels chimiques nuls), les perturbations primordiales sont de type adiabatique [282, 418]. La présence de perturbations isocourbes instantanées pendant l'inflation n'implique donc pas nécessairement la présence de perturbations isocourbes primordiales. Ainsi, le fait que les perturbations primordiales soient majoritairement adiabatiques n'exclut pas les scénarios multichamp, la perturbation de courbure primordiale observée pouvant être d'origine entropique pendant l'inflation comme nous allons le voir. Mieux, une dernière motivation pour considérer l'influence de plusieurs champs scalaires pendant l'inflation est la trace de non-gaussianités locales dans les données cosmologiques actuelles [221, 380]. En effet, ce type de non-gaussianité ne peut être généré par une période d'inflation basée sur un seul champ scalaire [114]. *Si* les soupçons actuels de non-gaussianités locales sont confirmés par le satellite Planck, *et si* cette non-gaussianité est d'origine primordiale, tous les scénarios d'inflation un champ seront exclus.

Dans la suite, nous ne présentons pas les résultats les plus généraux sur l'inflation multichamp et la théorie des perturbations cosmologiques associée. Nous renvoyons pour cela le lecteur aux articles spécialisés cités plus bas. Nous décrivons plutôt les idées et mécanismes généraux nécessaires à la compréhension des articles reproduits.

4.2 L'inflation multichamp "canonique"

Considérons N champs scalaires ϕ^I couplés minimalement à la relativité générale, de Lagrangien

$$P = -\frac{1}{2} G_{IJ} \partial_\mu \phi^I \partial^\mu \phi^J - V(\phi^I) \tag{4.1}$$

où $V(\phi^I)$ est un potentiel d'interaction arbitraire et où $G_{IJ} \equiv G_{IJ}(\phi^K)$ est une métrique dans l'espace des champs. Dans cette section, nous considérons par simplicité le cas $G_{IJ} = \delta_{IJ}$ et plaçons donc les indices $I, J \ldots$ relatifs aux champs arbitrairement en position haute ou basse. Beaucoup de modèles inspirés de la physique des particules présentent une métrique dans l'espace des champs non triviale mais les conclusions restent qualitativement identiques dans ce cas pour lequel on peut se référer à [321, 404]. Au cours de cette thèse, des Lagrangiens multichamp encore plus généraux ont été étudiés et les articles correspondants sont reproduits aux sections 4.3 et 8.1.3. Pour cette raison, certains calculs intermédiaires dans le cas (4.1) ne sont pas exposés.

4.2.1 Évolution homogène

Les équations gouvernant l'évolution homogène des champs et du facteur d'échelle dans le cas (4.1) avec une métrique plate sont des extensions triviales du cas à un champ. Le tenseur énergie impulsion de la matière est celui d'un fluide parfait de densité d'énergie et de pression (*cf.* (2.42))

$$\rho = \frac{1}{2}\dot{\phi}_I\dot{\phi}^I + V\,, \tag{4.2}$$

$$p = \frac{1}{2}\dot{\phi}_I\dot{\phi}^I - V\,, \tag{4.3}$$

de telle façon que les équations de Friedmann s'écrivent

$$H^2 = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\dot{\phi}_I\dot{\phi}^I + V\right)\,, \qquad \dot{H} = -\frac{1}{2}\dot{\phi}_I\dot{\phi}^I\,. \tag{4.4}$$

Enfin, les champs vérifient les équations de Klein-Gordon

$$\ddot{\phi}^I + 3H\dot{\phi}^I + V_{,I} = 0 \tag{4.5}$$

où $V_{,I} \equiv \partial V/\partial\phi^I$. Les équations géométriques (4.2), (4.3) et (4.4) prennent donc la même forme que dans le cas à un champ avec la substitution

$$\dot{\phi}^2 \to \dot{\sigma}^2 \equiv \dot{\phi}_I\dot{\phi}^I\,. \tag{4.6}$$

Dans la suite, nous supposons que l'évolution homogène est telle qu'une phase d'inflation de variation lente est réalisée, $\epsilon, \eta \ll 1$, et discutons alors l'évolution des perturbations cosmologiques.

4.2.2 Quantification et traversée du rayon de Hubble

Suivant la démarche détaillée à la sous-section 3.3.2, on peut calculer l'action au second ordre dans les fluctuations scalaires invariantes de jauge

$$Q^I = \delta\phi^I + \frac{\dot{\phi}^I}{H}\psi \tag{4.7}$$

où ψ désigne la perturbation de courbure spatiale (2.28). On obtient

$$S_{(2)s} = \frac{1}{2}\int \mathrm{d}t\,\mathrm{d}^3x\,a^3\left(\dot{Q}^I\dot{Q}_I - \frac{1}{a^2}\left(\nabla Q^I\right)\cdot\left(\nabla Q_I\right) - \mathcal{M}_{IJ}Q^IQ^J\right) \tag{4.8}$$

où $\mathcal{M}_{IJ}$ désigne la matrice de masse

$$\mathcal{M}_{IJ} = V_{,IJ} - \frac{1}{a^3}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{a^3}{H}\dot{\phi}^I\dot{\phi}^J\right)\,. \tag{4.9}$$

Les variables canoniquement normalisées correspondantes

$$u^I = a\,Q^I \tag{4.10}$$

vérifient, en espace de Fourier, [363] (on omet l'indice $\mathbf{k}$ dans $u^I_{\mathbf{k}}$ par simplicité s'il n'y a pas d'ambiguïté)

$$u^{I''} + \left(\left[k^2 - \frac{a''}{a}\right]\delta^I_J + \mathcal{M}^I_J a^2\right) u^J = 0 \tag{4.11}$$

Sous l'horizon, $k \gg aH$, les perturbations sont découplées et vérifient

$$u^{I''} + k^2 u^I = 0\,. \tag{4.12}$$

Elles peuvent donc être quantifiées indépendamment

$$u^I_{\mathbf{k}} \quad \to \quad \hat{u}^I_{\mathbf{k}}(\tau) = u^I_k(\tau)\hat{a}^I_{\mathbf{k}} + u^{I*}_{-k}(\tau)\hat{a}^{I\dagger}_{-\mathbf{k}} \tag{4.13}$$

où les opérateurs de création et d'annihilation vérifient

$$[\hat{a}^I_{\mathbf{k}}, \hat{a}^{J\dagger}_{\mathbf{k}'}] = (2\pi)^3\delta^{IJ}\delta(\mathbf{k}-\mathbf{k}')\,. \tag{4.14}$$

et où

$$\lim_{\tau\to-\infty} u^I_k = \frac{e^{-ik\tau}}{\sqrt{2k}} \tag{4.15}$$

dans le vide de Bunch-Davies (3.77).

Déterminons ensuite le comportement des fluctuations à la traversée de l'horizon, ce qui fournira les conditions initiales à l'évolution super-Hubble ultérieure. Pour cela, on aimerait bien se ramener à des équations du type (3.78) dont on a étudié les solutions en détails. Cependant, comme $\mathcal{M}_{IJ}$ n'est pas en général diagonale, le système (4.11) ne peut se réduire à N équations indépendantes pour les u^I. Une solution est de supposer que les éléments de la matrice $\mathcal{M}$ sont de variation lente, de manière similaire au cas à un champ. L'inspection de l'équation (4.9) indique sans surprise que cela est réalisé par exemple si tous les champs scalaires sont en roulement lent le long du potentiel. On peut alors diagonaliser le système (4.11) sur une période centrée à la traversée du rayon de Hubble, $-k\tau = 1$, et interpolant entre les régimes sub- et super-Hubble [1]. Pour cela, on considère les états propres d'interaction instantanés, *i.e.* les champs v^I tels que (en notation matricielle)

$$u = Ov \tag{4.16}$$

où O est une matrice orthogonale diagonalisant la matrice symétrique réelle $\mathcal{M}$ évaluée à la traversée de l'horizon

$${}^tO\frac{\mathcal{M}_*}{H_*^2}O = \mathrm{diag}(\lambda^I)\,, \tag{4.17}$$

Les v^I satisfont alors localement

$$v_I'' + \left(k^2 - \frac{1}{\tau^2}\left(\nu_I^2 - \frac{1}{4}\right)\right) v_I = 0 \tag{4.18}$$

où, au premier ordre dans l'approximation de variation lente, mais avec λ_I quelconque

$$\nu_I^2 = \frac{9}{4} + 3\epsilon_* - \lambda_I(1+2\epsilon_*)\,. \tag{4.19}$$

1. Les rérérences [404, 85, 230] dont on simplifie ici la discussion traitent en détail la résolution du système couplé (4.11).

Si une des valeurs propres de $\mathcal{M}_*/H_*^2$ vérifie $\lambda_I \gg 1$, (typiquement quand le potentiel est abrupt dans cette direction de l'espace des champs) $\nu_I^2 < 0$ et on sait que le mode correspondant est supprimé aux grandes échelles. Sans restriction, on considère donc seulement les champs effectivement légers, dans la limite $\lambda_I \ll 1$ par simplicité, auquel cas $\nu_I \simeq 3/2 + \epsilon_* - \lambda_I/3$.

Peu de temps avant la traversée du rayon de Hubble, les champs v^I ne sont pas diagonaux en général dans l'espace des ocillateurs quantiques $\hat{a}^I_{\mathbf{k}}$ à cause de la rotation (4.16). Cependant, du fait que, sous l'horizon, les solutions sont oscillantes de même fréquence (4.12), on peut adopter les conditions initiales

$$\lim_{\tau\to-\infty} v_k^I = \frac{e^{-ik\tau}}{\sqrt{2k}} \tag{4.20}$$

sans changer les fonctions de corrélation des perturbations. De manière équivalente, on peut introduire un nouveau jeu d'oscillateurs quantiques tels que les v^I y soient diagonaux mais comme on passe d'un jeu d'oscillateurs à l'autre par une transformation unitaire, les fonctions de corrélation n'en sont pas modifiées (voir [321, 404] pour plus de détails). Enfin, la solution de l'équation (4.18) avec le comportement (4.20) sous l'horizon est donnée par la fonction (3.81).

Retournant aux champs originaux u^I par la rotation (4.16), on en déduit qu'à l'ordre dominant $\nu_I \approx 3/2$, ou de manière équivalente en négligeant la matrice $\mathcal{M}$ dans l'équation (4.11), les perturbations Q^I sont indépendantes et acquièrent des fluctuations d'amplitude $H_*/2\pi$

$$\mathcal{P}_{Q^I}(k) = \left(\frac{H_*}{2\pi}\right)^2 \tag{4.21}$$

peu de temps après la traversée du rayon de Hubble. Au premier ordre dans les petits paramètres $\nu_I - \frac{3}{2}$ par contre, les fluctuations Q^I sont corrélées [404, 85, 230]. D'après les équations (2.84) et (2.46), la perturbation de courbure comobile s'écrit

$$\mathcal{R} = \frac{H}{\dot{\sigma}^2}\dot{\phi}_I Q^I \tag{4.22}$$

où $\dot{\sigma}^2$ est défini à l'équation (4.6). On déduit donc de (4.21) que

$$\mathcal{P}_{\mathcal{R}_*}(k) = \frac{H_*^2}{8\pi^2\epsilon_*} \tag{4.23}$$

à l'ordre dominant, où, par simplicité, on a noté $\mathcal{P}_{\mathcal{R}_*}(k)$ le spectre de $\mathcal{R}$ peu de temps après la traversée de l'horizon. A ce niveau, on obtient donc le même résultat que pour l'inflation à un champ (3.88). La différence cruciale va venir de l'évolution de $\mathcal{R}$ hors de l'horizon, discutée plus simplement après l'introduction de la décompositon adiabatique/entropique vers laquelle nous nous tournons.

4.2.3 La décomposition adiabatique/entropique

Par la suite, on se concentre pour simplifier la présentation sur le cas de deux champs scalaires $\phi \equiv \phi^1$ et $\chi \equiv \phi^2$ (on peut se référer à [321, 404] pour le cas général à N champs). En présence de plusieurs degrés de liberté, nous avons vu à la sous-section 2.3.3 que les

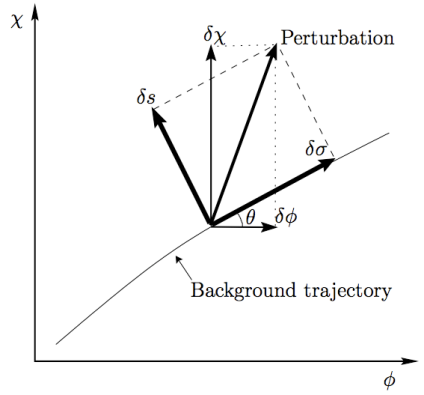

FIGURE 4.1 – La décomposition adiabatique/entropique dans le cas à deux champs : plutôt que de considérer les perturbations des champs originaux $\delta\phi$ et $\delta\chi$, on considère leur projection adiabatique $\delta\sigma$, parallèle à la trajectoire de fond, et leur composante entropique δs, transverse. Figure extraite de [162].

perturbations cosmologiques ne sont pas nécessairement adiabatiques, *i.e.* ne suivent pas nécessairement la même évolution que l'espace de fond. On parle alors de perturbations entropiques. Il est donc naturel, pour quantifier cet effet, d'introduire le vecteur "adiabatique" dans l'espace des champs, défini comme le vecteur unitaire (par rapport à la métrique $G_{IJ} = \delta_{IJ}$) parallèle au vecteur vitesse instantanée des champs $\dot{\phi}^I$ [412]

$$e^I_\sigma \equiv \frac{\dot{\phi}^I}{\dot{\sigma}} \tag{4.24}$$

où (*cf.* l'équation (4.6))

$$\dot{\sigma} \equiv \sqrt{\dot{\phi}_I \dot{\phi}^I}\,. \tag{4.25}$$

Insistons sur le fait que $\dot{\sigma}$ n'est pas défini comme la dérivée d'un quelconque champ. Il s'agit simplement d'une notation. Par rapport à la base naturelle dans l'espace des champs constituée des champs eux-mêmes, on obtient (voir la figure 4.1)

$$e^I_\sigma = (\cos\theta, \sin\theta) \tag{4.26}$$

où

$$\cos\theta = \frac{\dot{\phi}}{\sqrt{\dot{\phi}^2 + \dot{\chi}^2}}, \quad \sin\theta = \frac{\dot{\chi}}{\sqrt{\dot{\phi}^2 + \dot{\chi}^2}}\,. \tag{4.27}$$

Pour compléter la base, on introduit le vecteur orthogonal au vecteur adiabatique, *i.e.* orthogonal à la trajectoire de fond des champs :

$$e^I_s = (-\sin\theta, \cos\theta)\,. \tag{4.28}$$

Sans surprise, on verra que la projection des fluctuations des champs selon ce vecteur, c'est-à-dire orthogonalement à la trajectoire homogène, décrit des fluctuations entropiques. On appelle donc ce vecteur le vecteur entropique instantané. Avant cela, reformulons les équations d'évolution homogène dans cette nouvelle base.

La projection adiabatique des équations de Klein-Gordon s'écrit

$$\ddot{\sigma} + 3H\dot{\sigma} + V_{,\sigma} = 0\,, \quad V_{,\sigma} \equiv e^I_\sigma V_{,I} \tag{4.29}$$

où $\ddot{\sigma} \equiv \mathrm{d}\dot{\sigma}/\mathrm{d}t$, tandis que la projection entropique $e^I_s \ddot{\phi}_I + e^I_s V_{,I}$ donne le taux de variation du vecteur adiabatique en fonction du vecteur entropique

$$\dot{e}^I_\sigma = \dot{\theta} e^I_s \quad \text{avec} \quad \dot{\theta} = -\frac{V_{,s}}{\dot{\sigma}}\,, \quad V_{,s} \equiv e^I_s V_{,I}\,. \tag{4.30}$$

Au niveau des perturbations (voir la figure 4.1), $\delta\sigma = e_{\sigma I}\delta\phi^I$ décrit les fluctuations le long de la trajectoire, *i.e.* adiabatiques, tandis que $\delta s = e_{sI}\delta\phi^I \propto \delta\phi/\dot{\phi} - \delta\chi/\dot{\chi}$ décrit des fluctuations orthogonales à la trajectoire, *i.e.* entropiques (*cf.* la discussion autour de l'équation (2.126)). Les fluctuations entropiques sont évidemment invariantes de jauge contrairement aux perturbations adiabatiques. Dans la suite, nous utilisons les perturbations invariantes de jauge

$$Q_\sigma \equiv e_{\sigma I} Q^I = \delta\sigma + \frac{\dot{\sigma}}{H}\psi \qquad \text{et} \qquad Q_s \equiv e_{\sigma I} Q^I = \delta s\,. \tag{4.31}$$

D'après l'équation (4.22), la perturbation de courbure comobile est proportionnelle à la perturbation adiabatique instantanée

$$\mathcal{R} = \frac{H}{\dot{\sigma}} Q_\sigma \tag{4.32}$$

Pour cette raison, les perturbations entropiques Q_s sont également appelées perturbations isocourbes dans le sens où ces fluctuations, orthogonales à la trajectoire, ne créent pas de perturbation de courbure instantanée.

Les équations d'évolution des perturbations adiabatiques et entropiques sont obtenues facilement à partir de l'action quadratique (4.8). On obtient respectivement, en espace de Fourier,

$$\begin{aligned} &\ddot{Q}_\sigma + 3H\dot{Q}_\sigma + \left[\frac{k^2}{a^2} + V_{,\sigma\sigma} - \dot{\theta}^2 - \frac{1}{a^3}\left(\frac{a^3\dot{\sigma}^2}{H}\right)^{\cdot}\right] Q_\sigma \\ &\quad = 2(\dot{\theta} Q_s)^{\cdot} - 2\left(\frac{V_\sigma}{\dot{\sigma}} + \frac{\dot{H}}{H}\right)\dot{\theta} Q_s \end{aligned} \tag{4.33}$$

et

$$\ddot{Q}_s + 3H\dot{Q}_s + \left(\frac{k^2}{a^2} + V_{,ss} - \dot{\theta}^2\right) Q_s = -2\dot{\theta}\left[\dot{Q}_\sigma + \left(\frac{\dot{H}}{H} - \frac{\ddot{\sigma}}{\dot{\sigma}}\right) Q_\sigma\right] \tag{4.34}$$

où

$$V_{,\sigma\sigma} \equiv e^I_\sigma e^J_\sigma V_{,IJ}\,, V_{,ss} \equiv e^I_s e^J_s V_{,IJ}\,. \tag{4.35}$$

Ainsi, quand $\dot\theta = 0$, les deux types de perturbations sont découplées et la perturbation adiabatique vérifie la même équation que dans le cas à un champ avec la substitution $\dot\phi \to \dot\sigma$. De manière générale, la perturbation adiabatique hérite des propriétés de l'inflation un champ, pour laquelle les fluctuations ne peuvent être que le long de la trajectoire de fond, *i.e.* adiabatiques, tandis que la perturbation entropique indique les effets purement multichamps. Nous avons expliqué à la sous-section 2.3.3 que des perturbations adiabatiques ne peuvent pas générer de perturbations entropiques aux grandes échelles. Ainsi, celles-ci doivent évoluer de manière indépendante dans cette limite. Pour le voir, il est utile d'exprimer la perturbation de densité comobile, dont on a vu qu'elle est négligeable aux grandes échelles (2.93), en fonction des perturbations des champs. Utilisant sa définition (2.85) ainsi que (2.44) et (2.46), on obtient

$$\delta\epsilon = \dot\sigma\left[\dot Q_\sigma + \left(\frac{\dot H}{H} - \frac{\ddot\sigma}{\dot\sigma}\right) Q_\sigma - 2\dot\theta Q_s\right]\,. \tag{4.36}$$

Avec l'équation de Poisson (2.93), on peut alors réécrire l'équation entropique (4.34) sous la forme

$$\ddot Q_s + 3H\dot Q_s + \left(\frac{k^2}{a^2} + V_{,ss} + 3\dot\theta^2\right) Q_s = 4\frac{\dot\theta}{\dot\sigma}\frac{k^2}{a^2}\Psi\,, \tag{4.37}$$

Aux grandes échelles, où on peut négliger le membre de droite de cette équation, la perturbation entropique évolue bien indépendamment de la perturbation de courbure. En passant, on a montré qu'aux grandes échelles, il n'est pas nécessaire d'avoir recours à l'équation du second ordre (4.33) puisqu'il en existe une intégrale première

$$\dot Q_\sigma + \left(\frac{\dot H}{H} - \frac{\ddot\sigma}{\dot\sigma}\right) Q_\sigma - 2\dot\theta Q_s \approx 0 \tag{4.38}$$

où de manière équivalente

$$\dot{\mathcal{R}} \approx \frac{2H}{\dot\sigma}\dot\theta Q_s \tag{4.39}$$

aux grandes échelles. Si $\dot\theta = 0$ à tout temps, la trajectoire est rectiligne et la situation est effectivement un champ, auquel cas $\mathcal{R}$ est conservé. Si la trajectoire est courbe dans l'espace des champs, il y a un transfert des perturbations entropiques vers les perturbations adiabatiques et la perturbation de courbure n'est pas conservée même pour les modes super-Hubble. On peut retrouver ce résultat fondamental à partir de l'équation de conservation de l'énergie (2.108). Pour cela, déterminons la perturbation de pression non adiabatique (2.99). Utilisant (2.44), (2.45), (4.36) et les équations de fond, on trouve

$$\delta p_{\rm nad} = -\frac{2V_{,\sigma}}{3H\dot\sigma}\delta\epsilon + 2\dot\sigma\dot\theta Q_s\,. \tag{4.40}$$

Aux grandes échelles, on peut négliger le premier terme, proportionnel à la densité d'énergie comobile, auquel cas seule la perturbation entropique contribue à la perturbation de pression non adiabatique et la relation (2.108) permet de retrouver le résultat (4.39).

Pour résumer, hors du rayon de Hubble, les fluctuations vérifient

$$\dot{\mathcal{R}} \approx \frac{2H}{\dot{\sigma}} \dot{\theta} Q_s \,, \tag{4.41}$$

$$\ddot{Q}_s + 3H\dot{Q}_s + \left(\frac{k^2}{a^2} + V_{,ss} + 3\dot{\theta}^2 \right) Q_s \approx 0 \,. \tag{4.42}$$

Pour faire le lien avec les observations et déterminer les spectres primordiaux, de $\mathcal{R}$ en particulier, il faut donc dans le cas multichamp suivre l'évolution des perturbations aux échelles super-Hubble. Ceci constitue la différence majeure avec le cas à un champ où $\mathcal{R}$ est conservé aux grandes échelles et où on peut donc se contenter de l'évaluer peu de temps après la traversée du rayon de Hubble. Si les perturbations deviennent adiabatiques avant la fin de l'inflation (c'est le cas si toutes les trajectoires dans l'espace des champs convergent vers un unique attracteur par exemple), la valeur de $\mathcal{R}$ se trouve alors stabilisée et résoudre le système d'équations (4.41)-(4.42), valable hors de l'horizon *pendant l'inflation* uniquement, est suffisant. En général cependant, la perturbation de pression non adiabatique est non-nulle même pendant le réchauffement et la perturbation de courbure évolue encore pendant cette période. Ceci rend les prédictions détaillées de l'inflation multichamp très dépendante des modèles et en particulier du processus de réchauffement, encore mal compris. Certains déplorent la perte de prédictivité que cela implique par rapport aux scénarios à un champ. C'est cependant le prix à payer si on veut considérer des scénarios réalistes d'inflation dans le cadre de la physique des hautes énergies où la présence d'un unique champ scalaire léger est très artificielle. Nous allons de plus voir, à la sous-section suivante, que des résultats généraux peuvent malgré tout être obtenus dans le cas multichamp.

4.2.4 Matrice de transfert et spectres primordiaux

A l'ordre dominant dans l'approximation de variation lente, les champs scalaires légers sont décorrélés à la traversée du rayon de Hubble et acquièrent une amplitude commune $H_*/2\pi$ (4.21). Comme Q_σ et Q_s sont reliés aux perturbations originales par une matrice de rotation, ce résultat est encore valable pour eux (voir [404, 85, 230] pour aller au-delà de cette approximation). Il est alors commode d'introduire une perturbation entropique renormalisée

$$\mathcal{S} \equiv \frac{H}{\dot{\sigma}} Q_s \tag{4.43}$$

telle que son spectre de puissance peu de temps après la traversée du rayon de Hubble soit identique à celui de $\mathcal{R}$:

$$\mathcal{P}_{\mathcal{R}_*} = \mathcal{P}_{\mathcal{S}_*} \equiv \mathcal{P}_* \,. \tag{4.44}$$

Dans l'approximation de variation lente, on peut négliger le premier terme dans l'équation (4.42), auquel cas l'évolution des perturbations super-horizons est décrite par le système simple

$$\dot{\mathcal{R}} = \alpha H \mathcal{S} \,, \qquad \dot{\mathcal{S}} = \beta H \mathcal{S} \tag{4.45}$$

avec

$$\alpha \approx \frac{2\dot{\theta}}{H} \,, \qquad \beta \approx -\frac{\eta}{2} - \frac{1}{3H^2} \left(V_{,ss} + 3\dot{\theta}^2 \right) \,. \tag{4.46}$$

Comme des perturbations purement adiabatiques ne peuvent créer de perturbations entropiques aux grandes échelles, et qu'au contraire des perturbations entropiques (plus précisément une perturbation de pression non adiabatique) nourrissent les modes adiabatiques, l'évolution des perturbations aux grandes échelles peut de manière générique être mise sous la forme (4.45) [412, 413], les fonctions du temps α et β, dépendants des modèles, prenant la forme (4.46) pendant l'inflation à deux champs. Même si on ne connaît pas la valeur de α et β, pendant la phase de réchauffement par exemple, nous allons voir que la simple connaissance de l'existence de la forme (4.45) permet de tirer des conclusions intéressantes.

Le système d'équations (4.45) peut en effet être intégré formellement pour donner [412]

$$\begin{pmatrix} \mathcal{R} \\ \mathcal{S} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & T_{\mathcal{RS}} \\ 0 & T_{\mathcal{SS}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathcal{R} \\ \mathcal{S} \end{pmatrix}_* \tag{4.47}$$

avec

$$T_{\mathcal{SS}}(t_*, t) = \exp\left(\int_{t_*}^{t} \beta(t')H(t')\mathrm{d}t'\right), \qquad T_{\mathcal{RS}}(t_*, t) = \int_{t_*}^{t} \alpha(t')T_{\mathcal{SS}}(t_*, t')H(t')\mathrm{d}t' \,. \tag{4.48}$$

On obtient donc les expressions des spectres de puissance de la perturbation de courbure, de la perturbation entropique et de leur corrélation

$$\mathcal{P}_{\mathcal{R}} = (1 + T_{\mathcal{RS}}^2)\mathcal{P}_* \,, \qquad \mathcal{P}_{\mathcal{S}} = T_{\mathcal{SS}}^2\mathcal{P}_* \,, \qquad \mathcal{C}_{\mathcal{RS}} = T_{\mathcal{RS}}T_{\mathcal{SS}}\mathcal{P}_* \tag{4.49}$$

(rappelons que nous avons supposé que $\mathcal{R}$ et $\mathcal{S}$ ne sont pas corrélés à la traversée du rayon de Hubble). L'angle Θ indiquant la corrélation entre les deux types de perturbations (2.151)

$$\sin\Theta \equiv \frac{\mathcal{C}_{\mathcal{RS}}}{\sqrt{\mathcal{P}_{\mathcal{R}}}\sqrt{\mathcal{P}_{\mathcal{S}}}} \tag{4.50}$$

peut ainsi être considéré comme un angle quantifiant le transfert des modes entropiques vers le mode adiabatique

$$\sin\Theta = \frac{T_{\mathcal{RS}}}{\sqrt{1 + T_{\mathcal{RS}}^2}} \,. \tag{4.51}$$

Si $\Theta = 0$ ($T_{\mathcal{RS}} = 0$), le transfert est inexistant tandis que $|\Theta| = \pi/2$ ($T_{\mathcal{RS}} \gg 1$) quand la perturbation de courbure est majoritairement d'origine entropique, sa valeur finale étant reliée à celle à la traversée du rayon de Hubble par

$$\mathcal{P}_{\mathcal{R}_*} = \mathcal{P}_{\mathcal{R}}\cos^2\Theta. \tag{4.52}$$

Comme les perturbations tensorielles ne sont pas affectées par la dynamique des champs scalaires, leur spectre de puissance est toujours donné par la relation (3.96). Le rapport tenseur sur scalaire prend donc la forme

$$r \equiv \frac{\mathcal{P}_{\mathrm{t}}}{\mathcal{P}_{\mathcal{R}}} = 16\,\epsilon_*\,\cos^2\Theta = -8n_{\mathrm{t}}\cos^2\Theta \tag{4.53}$$

Rappelons que $\mathcal{S}$, qui n'est rien d'autre (à un facteur multiplicatif près) que la perturbation de pression non adiabatique aux grandes échelles (4.40), est directement reliée à l'époque

primordiale aux observables que sont les différentes perturbations entropiques relatives à la radiation (2.125). Si ces dernières sont d'amplitude suffisamment importantes pour être détectées, l'angle de transfert Θ l'est également et la relation de cohérence généralisée (4.53) n'implique que des quantités observables.

Il est important de comprendre que, bien que nous n'avons décrit que formellement l'évolution des perturbations aux échelles super-Hubble, on peut tout de même déterminer l'indice spectral scalaire. En effet, l'évolution super-Hubble est par définition indépendante du nombre d'onde k. La dépendance d'échelle n'est donc dictée que par le processus de traversée de l'horizon, ce qui est visible dans les expressions (4.47)-(4.48) par le fait que k n'intervient implicitement que sous la forme du temps t_* à la traversée de l'horizon $k = a(t_*)H(t_*)$. De

$$H_*^{-1}\frac{\partial T_{\mathcal{SS}}}{\partial t^*} = -T_{\mathcal{SS}}\beta_* \,, \qquad H_*^{-1}\frac{\partial T_{\mathcal{RS}}}{\partial t^*} = -\alpha_* - T_{\mathcal{RS}}\beta_* \tag{4.54}$$

et du fait qu'à l'ordre dominant $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\ln k}\big|_* \approx \frac{\dot{x}}{H}\big|_*$ (3.99), on trouve

$$n_{\mathcal{R}} - 1 \equiv \frac{\mathrm{d}\ln\mathcal{P}_{\mathcal{R}}}{\mathrm{d}\ln k} = n_{\mathcal{R}_*} - 1 - \alpha_*\sin(2\Theta) - 2\beta_*\sin^2\Theta \tag{4.55}$$

avec (3.102)

$$n_{\mathcal{R}_*} - 1 = -2\epsilon_* - \eta_* \,. \tag{4.56}$$

L'indice spectral dépend donc de la valeur de différentes quantités à la traversée du rayon de Hubble et de l'angle de transfert Θ, à priori observable si les perturbations entropiques survivent jusqu'à l'époque de la nucléosynthèse primordiale. On peut de la même manière calculer les indices spectraux des perturbations entropiques et de la corrélation $C_{\mathcal{RS}}$ [412].

4.2.5 Extensions

La phénoménologie associée à la présence de plusieurs champs scalaires légers pendant l'inflation est très riche. Pour simplifier la présentation, nous nous sommes concentrés sur le cas simple d'une période d'inflation cosmologique en variation lente à deux champs munis de termes cinétiques standard. Dans un scénario donné inspiré par la physique des hautes énergies, la situation peut être plus complexe. Mentionnons ici de manière succincte les possibilités que cela ouvre et les références appropriées :

• Un nombre quelconque N de champs scalaires peuvent voir leurs fluctuations amplifiées si leur masse effective est suffisamment petite. En première approximation, elles acquièrent toutes la même amplitude $H_*/2\pi$ à la traversée du rayon de Hubble et y sont décorrélées (*c.f.* la sous-section 4.2.2). Hors de l'horizon, on peut toujours identifier la direction tangente à la trajectoire de fond comme la direction adiabatique ou de courbure (*cf.* l'équation (4.22)). Les $N-1$ perturbations orthogonales à la direction adiabatique décrivent alors des perturbations entropiques. Ces $N-1$ perturbations évoluent indépendamment de la perturbation de courbure aux grandes échelles mais sont en général toutes couplées entre elles. On peut par contre identifier, par l'intermédiaire de la perturbation de pression non adiabatique, le mode entropique qui nourrit de manière instantanée la

perturbation de courbure. Il s'agit de la perturbation des champs dans la direction de l'accélération perpendiculaire à la trajectoire (dans le cas deux champs, il n'a qu'une direction orthogonale à la trajectoire et on retrouve les résultats exposés à la sous-section 4.2.3). Plus de détails peuvent être trouvés dans les références [169, 170, 406, 321, 404, 405].

• Nous avons supposé que l'inflation est de variation lente, ce qui signifie que toute quantité x évolue beaucoup moins rapidement que le facteur d'échelle pendant l'inflation, $\dot{x}/Hx \ll 1$. Ceci est réalisé si le potentiel inflationnaire est très régulier mais, inspiré par exemple par le paysage de la théorie des cordes, on peut imaginer une collection de champs scalaires évoluant dans un potentiel très accidenté [403]. On peut aussi considérer plus simplement, dans le cas de l'inflation à deux champs par exemple, un virage brusque dans l'espace des champs ou une masse entropique effective rapidement variable [402, 258]. Les perturbations des champs à la traversée du rayon de Hubble sont alors en général corrélées même à l'ordre dominant si bien que la relation de cohérence (4.53) n'est plus valable et que le spectre primordial peut présenter des anomalies.

• Les fluctuations entropiques peuvent modifier la perturbation de courbure pendant l'inflation mais aussi à la fin de l'inflation [215, 132, 60, 277], pendant l'ère de réchauffement [40] ou même pendant l'ère de radiation dans le scénario du curvaton par exemple [283, 282]. Plutôt que d'avoir directement recours aux équations de perturbations comme on l'a fait pendant l'inflation, il est alors plus facile d'utiliser le formalisme dit δN [389, 355, 356, 413, 278, 281]. Celui-ci sera présenté à la section 5.3.

• Dans les scénarios inflationnaires inspirés par la physique des hautes énergies, comme la supersymétrie ou la théorie des cordes, la métrique dans l'espace des champs G_{IJ} dans l'action 4.1 n'est pas triviale en général. La théorie des perturbations cosmologiques correspondantes a été développé dans les références [169, 170, 406, 321, 404, 405] (voir aussi [124, 355]). Il en résulte qu'il suffit (presque) de "covariantiser" les expressions obtenues, en remplaçant par exemple les dérivées secondes du potentiel $V_{,IJ}$ par $V_{,IJ} - \Gamma^K_{IJ} V_{,K}$ (où les Γ^K_{IJ} désignent les symboles de Christoffel associés à la métrique G_{IJ}), ou en considérant l'orthogonalité au sens de la métrique dans l'espace des champs. Ainsi, le transfert des perturbations entropiques vers les perturbations adiabatiques est nul non plus quand la trajectoire des champs est rectiligne mais quand elle suit une géodésique dans cet espace.

4.3 L'inflation multichamp généralisée (article)

L'inflation multichamp telle que présentée dans la section précédente correspond à ce qui était connu avant mon travail de thèse. Nous expliquons maintenant les motivations et le contexte scientifique dans lequel David Langlois et moi-même avons étudié une classe de modèle inflationnaire multichamp plus générale que ceux étudiés précédemment [235]. Avant le texte de l'article proprement dit, nous présentons également un résumé des principaux résultats obtenus.

Au tout début de ma thèse, deux "preprints" sont parus quasi simultanément initiant l'étude de l'inflation Dirac-Born-Infeld multichamp [135, 189], et ce avec des résultats similaires. Une grande partie de mon travail de thèse a ensuite été consacré à ce type

d'inflation et nous en ferons une présentation détaillée à la partie IV. Pour l'instant, il suffit de savoir que l'inflation Dirac-Born-Infeld est un scénario inspiré par la théorie des cordes dans laquelle l'inflaton est identifié à la position d'une D3-brane dans les six dimensions supplémentaires de la théorie des cordes. Le scénario étudié jusque là correspondait à ne considérer le mouvement et les fluctuations de la D-brane que dans une direction seulement [378, 11]. Il s'agissait donc d'un scénario inflationnaire à un champ. De plus, comme la dynamique d'une D-brane est gouvernée par une action non standard, dite de Dirac-Born-Infeld, le scénario obtenu est un exemple non trivial d'inflation à un champ avec des termes cinétiques non standard ou k-inflation 3.4. L'inflation Dirac-Born-Infeld multichamp consiste à prendre en compte le possible mouvement et les fluctuations de la D-brane dans les six dimensions supplémentaires. Il s'agit donc naturellement d'un scénario multichamp avec des termes cinétiques non standard. Se concentrant sur le cas à deux champs, les auteurs des articles [135, 189] trouvèrent que la perturbation entropique, orthogonale à la trajectoire, évolue à la vitesse de la lumière, comme dans l'inflation standard, tandis que le perturbation adiabatique, parallèle à la trajectoire, évolue à une vitesse du son non triviale, comme dans l'inflation DBI un champ, avec pour conséquence la suppression du mode entropique par rapport au mode adiabatique. Aucun de ces résultats ne s'avérera correct (voir le chapitre IV) car le point de départ même des analyses des références [135, 189], l'action gouvernant la D-brane, est incorrecte. Elles nous motivèrent cependant à étudier les propriétés des perturbations cosmologiques linéaires d'une grande classe de scénarios inflationnaires multichamp avec des termes cinétiques non standard, pour lesquels le Lagrangien est de la forme $P(X, \phi^I)$ où P est une fonction quelconque de N champs scalaires ϕ^I et du terme cinétique

$$X = -\frac{1}{2} G_{IJ} \nabla_\mu \phi^I \nabla^\mu \phi^J \tag{4.57}$$

($G_{IJ} \equiv G_{IJ}(\phi^K)$ est une métrique quelconque dans l'espace des champs). Un tel Lagrangien peut être vu comme une généralisation au cas de plusieurs champs scalaires du Lagrangien (3.105) de k-inflation bien qu'il ne soit pas le plus général possible comme on le verra. Nous avons montré que, dans cette classe de théories, tous les modes entropiques évoluent à la vitesse de la lumière tandis que le mode adiabatique évolue à une vitesse du son effective, généralisant ainsi les résultats de [135, 189] à une grande classe de modèles. Nous avons également identifié la combinaison des modes entropiques qui nourrissent la perturbation de courbure aux grandes échelles, avec le résultat que le transfert entropique-adiabatique est non-nul en général même si la trajectoire est géodésique dans l'espace des champs. Enfin, nous avons réussi à mettre les équations de perturbations sous une forme très élégante, inconnue jusque-là même pour l'inflation multichamp canonique, et qui fournit de l'intuition quant à l'évolution des perturbations dans ce contexte très général. Il en résulte, par exemple, que la perturbation adiabatique est amplifiée, à la traversée de l'horizon du son, dès que l'inflation est de variation lente, et ce indépendamment de la forme précise du Lagrangien gouvernant la dynamique des champs scalaires.

Notons que nos travaux ont été étendus au calcul des non-gaussianités générés dans l'inflation multichamp généralisée [153], quoi que pour des raisons techniques, dans le régime le moins intéressant dans lequel la vitesse du son est proche de celle de la lumière. Du fait du caractère très général du formalisme développé dans notre travail, celui-ci a

également été utilisé dans différents contextes, comme celui du curvaton [261, 263] ou de la "k-essence" (une modélisation de l'énergie sombre par des champs scalaires) [396].

Nous reproduisons à présent l'article [235] publié en 2008 par D. Langlois et moi-même (S. R-P) dans le *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics (JCAP)* et intitulé *"Perturbations in generalized multi-field inflation"*.

Journal of Cosmology and Astroparticle Physics
An IOP and SISSA journal

Perturbations in generalized multi-field inflation

David Langlois[1,2] **and Sébastien Renaux-Petel**[1]

[1] APC (Astroparticules et Cosmologie), UMR 7164 (CNRS, Université Paris 7, CEA, Observatoire de Paris) 10, rue Alice Domon et Léonie Duquet, 75205 Paris Cedex 13, France
[2] Institut d'Astrophysique de Paris (IAP), 98bis Boulevard Arago, 75014 Paris, France
E-mail: langlois@apc.univ-paris7.fr and renaux@apc.univ-paris7.fr

Received 25 January 2008
Accepted 4 March 2008
Published 15 April 2008

Online at stacks.iop.org/JCAP/2008/i=04/a=017
doi:10.1088/1475-7516/2008/04/017

Abstract. We study the linear perturbations of multi-field inflationary models governed by a Lagrangian which is a general function of the scalar fields and of a global kinetic term combining their spacetime gradients with an arbitrary field space metric. Our analysis includes k-inflation, Dirac–Born–Infeld inflation and its multi-field extensions which have been recently studied. For this general class of models, we calculate the action to second order in the linear perturbations. We decompose the perturbations into an adiabatic mode, parallel to the background trajectory, and entropy modes. We show that all the entropy modes propagate with the speed of light whereas the adiabatic mode propagates with an effective speed of sound. We also identify the specific combination of entropy modes which sources the curvature perturbation on large scales. We then study in some detail the case of two scalar fields: we write explicitly the equations of motion for the adiabatic and entropy modes in a compact form and discuss their quantum fluctuations and primordial power spectra.

Keywords: cosmological perturbation theory, inflation

ArXiv ePrint: 0801.1085

JCAP04(2008)017

©2008 IOP Publishing Ltd and SISSA 1475-7516/08/04017+22$30.00

Contents

1. Introduction **2**

2. Background **4**

3. Dynamics of the linear perturbations **6**
3.1. ADM formalism and constraints 6
3.2. Second-order action 8

4. Curvature perturbations **10**

5. Two-field case **13**
5.1. Background equations 13
5.2. Equations of motion for the perturbations 14

6. Quantum fluctuations **16**

7. Conclusion **19**

Acknowledgments **20**

Appendix: Multi-field DBI inflation **20**

References **21**

JCAP04(2008)017

1. Introduction

Inflation has now become a standard paradigm for describing the physics of the very early universe, but the nature of the field(s) responsible for inflation remains an open question. The hope is that future cosmological observations, in particular those of the CMB, will be able to rule out large classes of models and give some hints on the underlying physics.

In the last few years, an intensive effort has been devoted to trying to connect string theory and inflation (for recent reviews, see e.g. [1]–[5]). For simplicity, most studies of string inflation have considered a single effective scalar field. However, in the low-energy limit of string theory, many scalar fields are present and several of them could thus play a dynamical role during inflation. This would affect the generation of primordial perturbations. For instance, whereas in single-field inflation, the curvature perturbation is conserved on large scales[3], the curvature perturbation in multi-field inflation can generically be modified on large scales, because it is sourced by entropy (or isocurvature) perturbations. This feature was first pointed out in [8] in the context of Jordan–Brans–Dicke type gravity where the gravitational sector contains a scalar field. This effect has also been illustrated recently [9, 10] in the context of specific inflationary models based on string theory constructions, and shows that the restriction to an effectively single-field scenario, despite its appealing simplicity, might be misleading as the final curvature perturbation, which will be eventually observed, can sometimes originate mainly from the entropy modes.

[3] See however [6, 7] for exceptions.

In multi-field inflation, there is also the possibility, depending on the reheating scenario, of producing, after inflation, both adiabatic and isocurvature perturbations, which can be correlated, as first pointed out in [11]. The CMB measurements have shown that the primordial perturbations are mainly adiabatic but a small amount of isocurvature modes are still allowed by the data (see e.g. [12]–[15] for the most recent analyses).

In this context, a lot of works have been devoted to multi-field inflation. Although many of these studies usually assume standard kinetic terms for all the scalar fields involved, several consider multi-field inflation with non-standard kinetic terms described by a non-trivial metric $G_{IJ}(\phi^K)$ in field space, so that the kinetic part of the Lagrangian is of the form

$$\mathcal{L}_{\rm kin} = -\tfrac{1}{2} G_{IJ} \partial_\mu \phi^I \partial^\mu \phi^J .$$

More sophisticated types of non-canonical kinetic terms can also be envisaged. This is in particular the case for an interesting scenario based on string theory, in which the inflaton is a scalar field characterizing the position of a probe brane moving in a warped background geometry. This scenario has been named DBI (Dirac–Born–Infeld) inflation [16, 17], as the inflaton field is governed by a Dirac–Born–Infeld action. The latter can be seen as a particular case of the more general framework of k-inflation [18, 19], where the action is an arbitrary function of the inflaton and of the square of its spacetime gradient. Two recent works [20, 21] have studied the perturbations in effectively multi-field DBI inflation, where the extra fields correspond to the angular degrees of freedom of the moving brane [22]–[25].

The purpose of the present work is to analyse a very large class of multi-field models, which can be described by an action of the form

$$S = \int {\rm d}^4 x \sqrt{-g} \left[\frac{R}{16\pi G} + P(X, \phi^I) \right] , \tag{1}$$

where P is an arbitrary function of N scalar fields and of the kinetic term

$$X = -\tfrac{1}{2} G_{IJ} \nabla_\mu \phi^I \nabla^\mu \phi^J , \tag{2}$$

where $G_{IJ} \equiv G_{IJ}(\phi^K)$ is an arbitrary metric on the N-dimensional field space. This can be seen as a generalization of the Lagrangian of k-inflation [18] to the case of several scalar fields. This also includes DBI inflation and its multi-field extensions studied in [20, 21].

In this work, we expand the above action up to second order in the linear perturbations. The second-order action can be used to derive the classical equations of motion for the perturbations. It is also the starting point for calculating the spectra of the primordial perturbations generated from the vacuum quantum fluctuations of the scalar fields during inflation.

In order to analyse the equations of motion, we decompose the linear perturbations into the (instantaneous) adiabatic perturbation, i.e. the perturbation parallel to the background trajectory in field space, and the (instantaneous) entropy perturbations, which are orthogonal (with respect to the field space metric) to the trajectory. We find, quite generically, that the equation of motion for the adiabatic perturbation is a wave equation which depends on an effective sound speed $c_{\rm s}$ while all the entropy perturbations obey a wave equation involving the speed of light. This shows that the property that adiabatic and isocurvature perturbations propagate with different speeds, pointed out in [20] for the particular case of two-field DBI inflation, is valid for the large class of multi-field

JCAP04(2008)017

models studied here, whatever the specific dependence of the action on the kinetic term, and whatever the number of scalar fields involved. For more than two scalar fields, the entropy sector contains several degrees of freedom but they all satisfy a light-like wave equation.

We also analyse the evolution of the curvature perturbation on large scales, and show that it is sourced by a specific combination of entropy perturbations, which can be decomposed into a term corresponding to the bending of the background trajectory in field space, as in multi-field inflation with canonical kinetic terms, and an additional term, which is present only for non-trivial functions P. We finally specialize our analysis to the case of two fields and compare our results with previous works.

The plan of this paper is the following. In the next section, the background equations of motion are given. Section 3 is devoted to the derivation of the second-order action for the linear perturbations. In the subsequent section, we analyse the (comoving) curvature perturbation and its large-scale evolution. In section 5, we restrict our analysis to two scalar fields and study in detail the equations of motion for the adiabatic and isocurvature components. Using the second-order action, we then discuss, in section 6, the quantization of the perturbations in the simple case where the adiabatic and isocurvature modes are decoupled. We conclude in the final section and present in an appendix the application of our formalism to the DBI case.

2. Background

As discussed in the introduction, our starting point is the action

$$S = \int \mathrm{d}^4x \sqrt{-g}\left(\tfrac{1}{2}R + P(X,\phi^I)\right), \tag{3}$$

with

$$X = -\tfrac{1}{2}G_{IJ}\nabla_\mu\phi^I\nabla^\mu\phi^J, \tag{4}$$

where we have set $8\pi G = 1$ for simplicity. Throughout this paper, we will use the implicit summation rule on the field indices $I, J, \ldots$.

The energy–momentum tensor, derived from (3), is of the form

$$T^{\mu\nu} = P\,g^{\mu\nu} + P_{,X}\,G_{IJ}\,\nabla^\mu\phi^I\nabla^\nu\phi^J, \tag{5}$$

where $P_{,X}$ is the partial derivative of P with respect to X. The equations of motion for the scalar fields, which can be seen as generalized Klein–Gordon equations, are obtained from the variation of the action with respect to ϕ^I. One finds

$$\nabla_\mu(P_{,X}G_{IJ}\nabla^\mu\phi^J) - \tfrac{1}{2}P_{,X}(\nabla_\mu\phi^K)(\nabla^\mu\phi^L)\partial_I G_{KL} + P_{,I} = 0, \tag{6}$$

where $P_{,I}$ denotes the partial derivative of P with respect to ϕ^I.

In a spatially flat FLRW (Friedmann–Lemaître–Robertson–Walker) spacetime, with metric

$$\mathrm{d}s^2 = -\mathrm{d}t^2 + a^2(t)\,\mathrm{d}\vec{x}^2, \tag{7}$$

the scalar fields are homogeneous and the energy–momentum tensor reduces to that of a perfect fluid with energy density

$$\rho = 2XP_{,X} - P, \tag{8}$$

and pressure P.

JCAP04(2008)017

The evolution of the scale factor $a(t)$ is governed by the Friedmann equations, which can be written in the form

$$H^2 = \tfrac{1}{3}(2XP_{,X} - P), \tag{9}$$

and

$$\dot{H} = -XP_{,X}. \tag{10}$$

The equations of motion (6) for the scalar fields reduce to

$$\ddot{\phi}^I + \Gamma^I_{JK}\dot{\phi}^J\dot{\phi}^K + \left(3H + \frac{\dot{P}_{,X}}{P_{,X}}\right)\dot{\phi}^I - \frac{1}{P_{,X}}G^{IJ}P_{,J} = 0, \tag{11}$$

where the Γ^I_{JK} denote the Christoffel symbols associated with the field space metric G_{IJ}. By noting that the first two terms in the above equation simply correspond to the components of the acceleration in curved coordinates (here in field space), which we can write as

$$\mathcal{D}_t\dot{\phi}^I \equiv \ddot{\phi}^I + \Gamma^I_{JK}\dot{\phi}^J\dot{\phi}^K, \tag{12}$$

equation (11) can be rewritten as

$$\mathcal{D}_t\dot{\phi}^I + \left(3H + \frac{\dot{P}_{,X}}{P_{,X}}\right)\dot{\phi}^I - \frac{1}{P_{,X}}G^{IJ}P_{,J} = 0, \tag{13}$$

or, in an even more compact form, as

$$a^{-3}\mathcal{D}_t(a^3P_{,X}\dot{\phi}_I) = P_{,I}, \tag{14}$$

where we have used the field metric G_{IJ} to lower the field index I, so that $\dot{\phi}_I \equiv G_{IJ}\dot{\phi}^J$; $\mathcal{D}_t$ acts as an ordinary time derivative on field space scalars (i.e. quantities without field space indices) and $\mathcal{D}_tG_{IJ} = 0$.

The above expressions are compact but second derivatives of the scalar fields are hidden in the term $\dot{P}_{,X}$. It is sometimes more useful to express the equations of motion in the form

$$\mathcal{D}_t\dot{\phi}^I + \left(3Hc_{\rm s}^2 + \frac{c_{\rm s}^2}{P_{,X}}P_{,XK}\dot{\phi}^K + \frac{1-c_{\rm s}^2}{2XP_{,X}}P_{,K}\dot{\phi}^K\right)\dot{\phi}^I - \frac{1}{P_{,X}}G^{IJ}P_{,J} = 0\,, \tag{15}$$

where we have introduced, as in [19],

$$c_{\rm s}^2 \equiv \frac{P_{,X}}{\rho_{,X}} = \frac{P_{,X}}{P_{,X} + 2XP_{,XX}}, \tag{16}$$

which can be interpreted as the square of an effective sound speed, as we will see later. We will also use the dimensionless parameter

$$s = \frac{\dot{c}_{\rm s}}{Hc_{\rm s}}. \tag{17}$$

JCAP04(2008)017

3. Dynamics of the linear perturbations

We now study the linear perturbations about the background solution discussed in the previous section. *A priori*, one must consider the perturbations of the scalar fields as well as the metric perturbations. The scalar metric perturbations are coupled to the scalar field perturbations via the scalar field equations of motion and Einstein's equations. One could write down directly the linearized version of these equations. However, since we will be interested in the quantum fluctuations of the perturbations during the inflationary phase, it is useful to compute the action at second order in the perturbations. From this action, one can easily derive the equations of motion for the linear perturbations. One can also determine the normalization of the vacuum quantum fluctuations, and therefore the amplitude of the primordial cosmological perturbations.

In order to quantize the system, it is useful to write the second-order action as an expression depending only on the true physical degrees of freedom. This can be done by using the constraints to simplify the second-order action but this is a tedious procedure [26]. A quicker method uses the constraints, within the Hamiltonian formalism, as Hamilton–Jacobi equations in order to identify automatically the physical degrees of freedom [27] (see also [28]). An even simpler procedure, introduced in [29], consists in writing the action in the ADM form [30] and in solving explicitly the constraints for the lapse and the shift.

In the case of a single scalar field, two gauge choices are natural: the first is the gauge where the scalar field is spatially uniform on constant time slices; the second is the spatially flat gauge, where the spatial part of the metric is unperturbed. The physical perturbation is described only by the metric in the first case, and only by the scalar field perturbation in the second case. When dealing with several scalar fields, the first possibility is no longer possible and the only natural choice is to go into the spatially flat gauge, where the scalar field perturbations correspond to the physical degrees of freedom. The calculation which follows can be seen as a generalization (and a unification) of the second-order actions computed in [31, 32] with the same procedure.

3.1. ADM formalism and constraints

In the ADM formalism [33], the metric is written in the form

$$\mathrm{d}s^2 = -N^2\,\mathrm{d}t^2 + h_{ij}(\mathrm{d}x^i + N^i\,\mathrm{d}t)(\mathrm{d}x^j + N^j\,\mathrm{d}t), \tag{18}$$

where N is the lapse function and N^i the shift vector. The action (3) then reads

$$S = \frac{1}{2}\int \mathrm{d}t\,\mathrm{d}^3x\,\sqrt{h}N(R^{(3)} + 2P) + \frac{1}{2}\int \mathrm{d}t\,\mathrm{d}^3x\,\frac{\sqrt{h}}{N}(E_{ij}E^{ij} - E^2), \tag{19}$$

where $h = \det(h_{ij})$ and $R^{(3)}$ is the Ricci curvature calculated with h_{ij}. The symmetric tensor E_{ij}, defined by

$$E_{ij} = \tfrac{1}{2}\dot{h}_{ij} - N_{(i|j)} \tag{20}$$

(the symbol | denotes the spatial covariant derivative associated with the spatial metric h_{ij}), is proportional to the extrinsic curvature of the spatial slices. The function P in (19) depends on the kinetic term X, which can be written as

$$X = \frac{1}{2N^2}G_{IJ}v^Iv^J - \frac{G_{IJ}}{2}h^{ij}\partial_i\phi^I\partial_j\phi^J, \tag{21}$$

JCAP04(2008)017

with

$$v^I = \dot{\phi}^I - N^j \partial_j \phi^I. \tag{22}$$

The variation of the action with respect to N yields the energy constraint,

$$2P - \frac{1}{N^2}(E_{ij}E^{ij} - E^2 + 2P_{,X}G_{IJ}v^I v^J) = 0, \tag{23}$$

while the variation of the action with respect to the shift N_i gives the momentum constraint,

$$\left(\frac{1}{N}(E_i^j - E\delta_i^j)\right)_{|j} = \frac{P_{,X}}{N} G_{IJ} v^I \partial_i \phi^J. \tag{24}$$

In order to study the linear perturbations about the FLRW background, we now restrict ourselves to the flat gauge, which corresponds to the choice

$$h_{ij} = a^2(t)\delta_{ij}. \tag{25}$$

The scalar fields on the corresponding flat hypersurfaces can be decomposed into

$$\phi^I = \phi_0^I + Q^I, \tag{26}$$

where the ϕ_0^I are the spatially homogeneous background values of the fields and the Q^I represent the linear perturbations. In the following, we will usually drop the subscript '0' on ϕ_0^I and simply identify ϕ^I with the homogeneous background fields.

We also can also write the (scalarly) perturbed lapse and shift as

$$N = 1 + \alpha, \qquad N_i = \beta_{,i}, \tag{27}$$

where the linear perturbations α and β are determined in terms of the scalar field perturbations Q^I by solving the linearized constraints. At first order, the momentum constraint implies

$$\alpha = \frac{P_{,X}}{2H}\dot{\phi}_I Q^I, \tag{28}$$

while the energy constraint yields

$$\partial^2\beta = \frac{a^2}{2H}\left[-\frac{P_{,X}}{c_s^2}\dot{\phi}_I \mathcal{D}_t Q^I - 2XP_{,XI}Q^I + P_{,I}Q^I + \frac{P_{,X}}{H}\left(\frac{XP_{,X}}{c_s^2} - 3H^2\right)\dot{\phi}_I Q^I\right], \tag{29}$$

where we have extended the notation $\mathcal{D}_t$, introduced in (12), to Q^I, so that

$$\mathcal{D}_t Q^I \equiv \dot{Q}^I + \Gamma^I_{JK}\dot{\phi}^J Q^K. \tag{30}$$

JCAP04(2008)017

3.2. Second-order action

We now expand, up to quadratic order, the action in terms of the linear perturbations. This action can be written solely in terms of the physical degrees of freedom Q^I by substituting[4] the expressions (28) and (29) for α and β. In fact, it turns out that β disappears from the second-order action, after an integration by parts. The calculation is straightforward, although somewhat lengthy. It is also convenient to regroup the terms involving derivatives of the field space metric G_{IJ} into covariant expressions. For example, we use the identity

$$\int \mathrm{d}t\,\mathrm{d}^3x\,a^3\left[P_{,X}G_{IJ}\dot{Q}^I\dot{Q}^J+\left(P_{,IJ}+\frac{P_{,X}}{2}G_{KL,IJ}\dot{\phi}^K\dot{\phi}^L\right)Q^IQ^J+2P_{,X}G_{IJ,K}\dot{\phi}^IQ^K\dot{Q}^J\right]$$
$$=\int \mathrm{d}t\,\mathrm{d}^3x\,a^3\left[P_{,X}\mathcal{D}_tQ^IG_{IJ}\mathcal{D}_tQ^J+\left(\mathcal{D}_I\mathcal{D}_JP+P_{,X}\mathcal{R}_{IKLJ}\dot{\phi}^K\dot{\phi}^L\right)Q^IQ^J\right], \tag{31}$$

where we have discarded total derivatives. $\mathcal{D}_I$ denotes the covariant derivative associated with G_{IJ} (we thus have $\mathcal{D}_I\mathcal{D}_JP\equiv P_{,IJ}-\Gamma^K_{IJ}P_{,K}$) and $\mathcal{R}_{IJKL}$ is the Riemann tensor for G_{IJ}.

The second-order action can be finally written in the rather simple form

$$S_{(2)}=\frac{1}{2}\int \mathrm{d}t\,\mathrm{d}^3x\,a^3\left[\left(P_{,X}G_{IJ}+P_{,XX}\dot{\phi}_I\dot{\phi}_J\right)\mathcal{D}_tQ^I\mathcal{D}_tQ^J-\frac{P_{,X}}{a^2}G_{IJ}\partial_iQ^I\partial^iQ^J\right.$$
$$\left.-M_{IJ}Q^IQ^J+2P_{,XJ}\dot{\phi}_IQ^J\mathcal{D}_tQ^I\right], \tag{32}$$

with the effective (squared) mass matrix

$$M_{IJ}=-\mathcal{D}_I\mathcal{D}_JP-P_{,X}\mathcal{R}_{IKLJ}\dot{\phi}^K\dot{\phi}^L+\frac{XP_{,X}}{H}(P_{,XJ}\dot{\phi}_I+P_{,XI}\dot{\phi}_J)$$
$$+\frac{XP_{,X}^3}{2H^2}\left(1-\frac{1}{c_\mathrm{s}^2}\right)\dot{\phi}_I\dot{\phi}_J-\frac{1}{a^3}\mathcal{D}_t\left[\frac{a^3}{2H}P_{,X}^2\left(1+\frac{1}{c_\mathrm{s}^2}\right)\dot{\phi}_I\dot{\phi}_J\right]. \tag{33}$$

The last term can be expanded, which yields

$$M_{IJ}=-\mathcal{D}_I\mathcal{D}_JP-P_{,X}\mathcal{R}_{IKLJ}\dot{\phi}^K\dot{\phi}^L+\frac{XP_{,X}}{H}\left(P_{,XJ}\dot{\phi}_I+P_{,XI}\dot{\phi}_J\right)$$
$$+\dot{\phi}_I\dot{\phi}_J\left[-\frac{XP_{,X}^3}{c_\mathrm{s}^2H^2}+\frac{sP_{,X}^2}{c_\mathrm{s}^2}-\frac{3P_{,X}^2}{2}\left(1+\frac{1}{c_\mathrm{s}^2}\right)\right.$$
$$\left.-\frac{P_{,X}}{H}\left(1+\frac{1}{c_\mathrm{s}^2}\right)\left(P_{,XX}\dot{X}+P_{,XK}\dot{\phi}^K\right)\right]$$
$$-\frac{P_{,X}^2}{2H}\left(1+\frac{1}{c_\mathrm{s}^2}\right)\left(\dot{\phi}_I\mathcal{D}_t\dot{\phi}_J+\dot{\phi}_J\mathcal{D}_t\dot{\phi}_I\right). \tag{34}$$

The second-order action (32) is one of the main results of the present work and generalizes more restrictive cases considered in the literature [34, 28, 32]. Let us now

[4] In the ADM formalism, it is sufficient to use the perturbed lapse and shift up to first order as their second-order parts cancel out in the action.

JCAP04(2008)017

discuss some of its features. First, one can notice that the non-flat nature of the field space metric G_{IJ} manifests itself in the replacement of the ordinary time derivatives by covariant time derivatives $\mathcal{D}_t$ and of $P_{,IJ}$ by $\mathcal{D}_I\mathcal{D}_J P$, as well as the presence of the Riemann tensor $\mathcal{R}_{IJKL}$ in the matrix M_{IJ} [35, 36].

A second interesting consequence of (32) is how the non-trivial dependence of the initial action on the kinetic term X affects the dynamics of the perturbations. One sees that the term involving the spatial gradients is simply rescaled by a factor $P_{,X}$ with respect to the standard case (where $P = X - V$ so that $P_{,X} = 1$), which multiplies the metric G_{IJ}. The term quadratic in the time derivatives is changed in a subtler way, since instead of $P_{,X}G_{IJ}$, one finds

$$P_{,X}\tilde{G}_{IJ} \equiv P_{,X}\left(G_{IJ} + \frac{P_{,XX}}{P_{,X}}\dot{\phi}_I\dot{\phi}_J\right). \tag{35}$$

This shows that the background velocity, of components $\dot{\phi}^I$, represents a special direction in field space as far as the dynamics of the perturbations is concerned. This direction corresponds to the (instantaneous) adiabatic direction, which has been introduced in [37] for multi-field inflation with standard kinetic terms. Introducing the 'adiabatic' unit vector e_1^I, defined as

$$e_1^I = \frac{\dot{\phi}^I}{\sqrt{2X}}, \tag{36}$$

and using (16), one finds

$$\tilde{G}_{IJ} \equiv \frac{1}{c_{\rm s}^2} e_I^1\, e_J^1 + \left(G_{IJ} - e_I^1\, e_J^1\right), \tag{37}$$

where the term between parentheses represents, in field space, the projection orthogonal to the adiabatic direction. This decomposition clearly shows that the adiabatic part of the perturbations, i.e. along the field velocity, obeys a wave equation where the propagation speed is determined by the sound speed $c_{\rm s}$, while the entropy perturbations, i.e. orthogonal to the scalar field velocity, propagate with the speed of light. This property, which was pointed out in [20, 21] for the specific case of two-field DBI inflation, turns out to be generic for any system governed by an action of the form (3).

The decomposition into adiabatic and isocurvature modes can be made more explicit by introducing an orthonormal basis in field space, $\{e_n^I\}$ $(n = 1, \ldots, N)$, where the first vector is the unit adiabatic vector introduced in (36). The $N - 1$ remaining vectors thus span the entropy subspace, which is orthogonal to the adiabatic direction. The decomposition of the perturbations on this new basis reads

$$Q^I = Q^n e_n^I, \tag{38}$$

with an implicit summation on the index n. In order to replace the time derivatives of the Q^I in terms of the time derivatives of the new components Q^n, one needs to take into account the time derivative of the basis vectors. It is in particular useful to define the quantities

$$Z_{mn} = e_{mI}\mathcal{D}_t e_n^I, \tag{39}$$

JCAP04(2008)017

which satisfy the antisymmetry property $Z_{mn} = -Z_{nm}$ as a consequence of $\mathcal{D}_t(e^I_m e_{nI}) = 0$. The second-order action then reads

$$S_2 = \frac{1}{2}\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}^3x\,a^3\left[\frac{P_{,X}}{c_\mathrm{s}^2}(\dot{Q}^1 + Z_{1m}Q^m)^2 + P_{,X}\sum_{n>1}(\dot{Q}^n + Z_{nm}Q^m)^2 \right.$$
$$\left. - \frac{P_{,X}}{a^2}\partial_i Q^n \partial^i Q^n - Q^n M_{nm} Q^m + 2\sqrt{2X}(\dot{Q}^1 + Z_{1m}Q^m)P_{,Xn}Q^n\right], \tag{40}$$

where $M_{nm} \equiv e^I_n M_{IJ} e^J_m$ are the components of the interaction matrix in our new basis. Similarly, $P_{,Xn} \equiv e^I_n P_{,XI}$ and $P_{,n} \equiv e^I_n P_{,I}$.

So far, only the first vector of the basis, e_1, has been specified. In the following, we will also specify the second element of the basis, e^I_2, as the unit vector pointing along the projection on the entropy subspace of the field acceleration $\mathcal{D}_t\dot{\phi}^I$. The $(N-2)$ remaining vectors of the basis are left arbitrary in the present work. Note that [36] adopted a specific choice for all the vectors of the basis by considering the successive time derivatives of the background scalar fields.

4. Curvature perturbations

In the previous section, we have obtained the second-order action in terms of the physical degrees of freedom Q^I. This completely determines the full dynamics of the linear perturbations. It is then useful to relate the quantities Q^I to other perturbed quantities which can be of interest, in particular the gauge-invariant quantities describing the metric perturbations.

Instead of the metric written in the ADM form, we will work in this section with the (scalarly) perturbed FLRW metric written in the usual form (see [38, 26] for detailed reviews on the theory of linear cosmological perturbations and e.g. [39] for a pedagogical introduction),

$$\mathrm{d}s^2 = -(1+2A)\,\mathrm{d}t^2 + 2a\partial_i B\,\mathrm{d}x^i\,\mathrm{d}t + a^2\left[(1-2\psi)\delta_{ij} + 2\partial_{ij}E\right]\mathrm{d}x^i\,\mathrm{d}x^j. \tag{41}$$

These metric perturbations can be combined to give the familiar gauge-invariant Bardeen potentials, defined by

$$\Phi \equiv A - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[a^2(\dot{E} - B/a)\right], \tag{42}$$

$$\Psi \equiv \psi + a^2 H(\dot{E} - B/a). \tag{43}$$

For the matter, the linear perturbations of the energy density, pressure and momentum follow from the linearized energy–momentum, according to the expressions

$$\delta\rho \equiv -\delta T^0_0, \qquad \delta P = \tfrac{1}{3}\delta T^i_i, \qquad \partial_i \delta q = \delta T^0_i, \tag{44}$$

while, in our case, the anisotropic stress vanishes. The linear combination

$$\delta\rho_m = \delta\rho - 3H\delta q \tag{45}$$

JCAP04(2008)017

is gauge invariant and defines the so-called comoving energy density perturbation (i.e. coincides with the energy density perturbation in the comoving gauge, characterized by $\delta q = 0$).

Other useful gauge-invariant quantities are obtained by combining the metric and matter perturbations. One can define the curvature perturbation on uniform density hypersurfaces

$$-\zeta \equiv \psi + \frac{H}{\dot{\rho}}\delta\rho, \tag{46}$$

and the so-called comoving curvature perturbation

$$\mathcal{R} \equiv \psi - \frac{H}{\rho + P}\delta q. \tag{47}$$

In the following, we will work in Fourier space for all these linear perturbations.

The gauge-invariant quantities defined above can be related to the physical degrees of freedom Q^I, which we have chosen to describe our system. The relations follow from the linearized Einstein's equations $\delta G_{\mu\nu} = \delta T_{\mu\nu}$, more precisely from the constraints. In particular, the energy constraint reads

$$3H(\dot{\psi} + HA) + \frac{k^2}{a^2}[\psi + H(a^2\dot{E} - aB)] = -\frac{1}{2}\delta\rho, \tag{48}$$

while the momentum constraint yields

$$\dot{\psi} + HA = -\tfrac{1}{2}\delta q. \tag{49}$$

The combination of these two constraints gives a gauge-invariant relativistic generalization of the Poisson equation,

$$\frac{k^2}{a^2}\Psi = -\frac{1}{2}\delta\rho_m. \tag{50}$$

Note that the Q^I's correspond to the gauge-invariant combinations $Q^I = \delta\phi^I + (\dot{\phi}^I/H)\,\psi$ where the $\delta\phi^I$'s are the field perturbations in any gauge. In order to write the various quantities introduced above in terms of the Q^I, it is useful to notice that the ADM metric is equivalent to a metric of the form (41) with the identification $A = \alpha$, $aB = \beta$, $\psi = 0$ and $E = 0$. Using (28), one finds that the perturbed energy density and pressure, in the flat gauge, take the form

$$\delta\rho_{\rm flat} = \frac{P_{,X}}{Hc_{\rm s}^2}\,\dot{\phi}_I\,\mathcal{D}_t(HQ^I) + (2XP_{,XI} - P_{,I})Q^I, \tag{51}$$

and

$$\delta P_{\rm flat} = \frac{P_{,X}}{H}\,\dot{\phi}_I\,\mathcal{D}_t(HQ^I) + P_{,I}Q^I. \tag{52}$$

Moreover, substituting (28) in (49) yields the expression of δq, in the flat gauge, in terms of the Q^I. One thus gets

$$\mathcal{R} = \frac{H}{2X}\dot{\phi}_I Q^I \tag{53}$$

and

$$\delta\rho_m = \frac{P_{,X}}{c_{\rm s}^2}\dot{\phi}_I\mathcal{D}_t Q^I + 2XP_{,XI}Q^I - P_{,I}Q^I - \frac{P_{,X}}{H}\left(\frac{XP_{,X}}{c_{\rm s}^2} - 3H^2\right)\dot{\phi}_I Q^I. \tag{54}$$

JCAP04(2008)017

Taking the time derivative of the expression (53) for $\mathcal{R}$ and combining the result with (54) and (50), one obtains an important result for the time evolution of $\mathcal{R}$:

$$\dot{\mathcal{R}} = \frac{H}{\dot{H}}\frac{c_{\rm s}^2 k^2}{a^2}\Psi + \frac{H}{2XP_{,X}}\left[(1+c_{\rm s}^2)P_{,I}^{\perp} - 2Xc_{\rm s}^2 P_{,XI}^{\perp}\right]Q^I, \tag{55}$$

where, for any covector A_I in field space, $A_I^{\perp} \equiv A_I - (e_1^K A_K)e_{1I}$ represents its projection on the isocurvature subspace, i.e. orthogonal to the adiabatic direction.

All the above results can be rewritten in the basis $\{e_n^I\}$, which distinguishes the adiabatic and isocurvature perturbations. One can express the comoving curvature perturbation as

$$\mathcal{R} = \frac{H}{\sqrt{2X}}Q^1, \tag{56}$$

which illustrates that $\mathcal{R}$ characterizes the purely adiabatic part of the perturbations. The comoving energy density perturbation now reads

$$\delta\rho_m = \frac{P_{,X}\sqrt{2X}}{c_{\rm s}^2}\left[\dot{Q}^1 + \left(\frac{\dot{H}}{H} - \frac{\dot{X}}{2X}\right)Q^1\right] + 2X\left(\sum_{n>1} P_{,Xn}Q^n\right) - \left(1+\frac{1}{c_{\rm s}^2}\right)P_{,2}Q^2. \tag{57}$$

Finally, the time evolution of $\mathcal{R}$ can be rewritten as

$$\dot{\mathcal{R}} = \frac{H}{\dot{H}}\frac{c_{\rm s}^2 k^2}{a^2}\Psi + \frac{H}{2XP_{,X}}\left[(1+c_{\rm s}^2)P_{,2}Q^2 - 2Xc_{\rm s}^2\sum_{n>1}P_{,Xn}Q^n\right]. \tag{58}$$

When one can ignore the first term on the right-hand side, on sufficiently large scales, one recovers the familiar result that the curvature perturbation is sourced by entropy perturbations only. However, in our case, this entropy source term contains two contributions.

The first one, proportional to $P_{,2}$, is a generalization of the term obtained in [37]. Indeed, for $P = X - V(\phi^I)$ and a flat field space metric, the above relation with two fields reduces to

$$\dot{\mathcal{R}} = \frac{H}{\dot{H}}\frac{k^2}{a^2}\Psi - \frac{H}{X}V_{,2}Q^2 = \frac{H}{\dot{H}}\frac{k^2}{a^2}\Psi + \frac{2H}{\dot{\sigma}}\dot{\theta}\delta s, \qquad (P = X - V,\ G_{IJ} = \delta_{IJ}), \tag{59}$$

where we have introduced, in the second equality, $\dot{\sigma} \equiv \sqrt{2X}$, $\delta s = Q^2$ and $\dot{\theta} = -V_{,2}/\dot{\sigma}$, corresponding to the notation of [37].

This result has been extended in [36] to the multi-field situation, still for $P = X - V$ but with a general metric on field space. In this case, the curvature perturbation on large scales is still sourced by a term related to the perturbation in the direction e_2^I, i.e. along the entropic projection of the field acceleration $\mathcal{D}_t\dot{\phi}^I$. Therefore, on large scales, the curvature perturbation is not conserved if the trajectory in field space is not geodesic. By a geodesic trajectory, we mean here that $\mathcal{D}_t\dot{\phi}^I$ is proportional to $\dot{\phi}^I$. Equivalently, in view of the background equations for the scalar fields (13), the curvature perturbation is not conserved on large scales if the gradient of P along e_2^I does not vanish.

In the more general situation considered here, one sees that the mixed derivatives $P_{,XI}$ along the entropy directions give an additional contribution to the non-conservation of the curvature perturbation. Therefore, if these mixed derivatives are non-zero, the

JCAP04(2008)017

curvature perturbation is not conserved on large scales, even if the motion in field space is geodesic.

When dealing with scalar fields, it is easier to work with the comoving curvature perturbation $\mathcal{R}$, rather than with the curvature perturbation on uniform density hypersurfaces ζ. One can nonetheless write down the evolution equation for ζ in the form (see [40] and [41, 42] for the exact and covariant form of this relation)

$$\dot{\zeta} = -H\frac{\delta P_{\rm nad}}{\rho + P} - \Sigma, \tag{60}$$

where $\delta P_{\rm nad}$ is the non-adiabatic pressure perturbation, defined as

$$\delta P_{\rm nad} = \delta P - \frac{\dot{P}}{\dot{\rho}}\delta\rho, \tag{61}$$

and Σ is the scalar shear along comoving worldlines, which is given explicitly by

$$\begin{aligned}\frac{\Sigma}{H} &\equiv -\frac{k^2}{3H}\left\{\dot{E} - (B/a) + \frac{\delta q}{a^2(\rho + P)}\right\} \\ &= -\frac{k^2}{3a^2H^2}\zeta - \frac{k^2\Psi}{3a^2H^2}\left[1 + \frac{2\rho}{9(\rho + P)}\frac{k^2}{a^2H^2}\right].\end{aligned} \tag{62}$$

In our case, the non-adiabatic pressure perturbation can be expressed as

$$\delta P_{\rm nad} = \frac{\delta\rho_m}{6HXP_{,X}}\left[(1 + c_{\rm s}^2)P_{,I} - 2Xc_{\rm s}^2P_{,XI}\right]\dot{\phi}^I + \left[(1 + c_{\rm s}^2)P_{,I}^{\perp} - 2Xc_{\rm s}^2P_{,XI}^{\perp}\right]Q^I. \tag{63}$$

On sufficiently large scales, one can neglect the first term, proportional to the comoving energy density, and only the second term on the right-hand side contributes to the non-adiabatic pressure perturbation.

5. Two-field case

We now specialize our formalism to the case where only two scalar fields are present. In this context, the entropy subspace is one dimensional and the basis $\{e_1^I, e_2^I\}$ is completely specified. In order to make a direct comparison with the previous literature, we will use a more traditional notation, and replace the subscripts 1 and 2 by respectively σ and s, so that

$$Q^1 \equiv Q_\sigma, \qquad Q^2 \equiv Q_s. \tag{64}$$

5.1. Background equations

The background equations of motion for the scalar fields can be decomposed into adiabatic and entropic equations. Defining

$$\dot{\sigma} \equiv \sqrt{2X}, \tag{65}$$

the adiabatic equation of motion can be written as

$$\ddot{\sigma} + \left(3H + \frac{\dot{P}_{,X}}{P_{,X}}\right)\dot{\sigma} - \frac{1}{P_{,X}}P_{,\sigma} = 0, \qquad P_{,\sigma} \equiv e_\sigma^I P_{,I}. \tag{66}$$

JCAP04(2008)017

Moreover, by using the decomposition

$$\dot{P}_{,X} = P_{,XX}\dot{X} + P_{,XI}\dot{\phi}^I = P_{,XX}\,\dot{\sigma}\,\ddot{\sigma} + P_{,X\sigma}\,\dot{\sigma}, \tag{67}$$

the adiabatic equation of motion can also be rewritten as

$$\ddot{\sigma} = c_{\rm s}^2\left(\frac{P_{,\sigma}}{P_{,X}} - \frac{\dot{\sigma}^2 P_{,X\sigma}}{P_{,X}} - 3H\dot{\sigma}\right). \tag{68}$$

The entropy part of the equations of motion gives the rate of change of the adiabatic basis vector e^I_σ in terms of the entropy basis vector e^I_s:

$$\mathcal{D}_t e^I_\sigma = \frac{P_{,s}}{P_{,X}\dot{\sigma}} e^I_s. \tag{69}$$

This is the generalization of the equation giving the time derivative of the angle θ between the initial field basis and the adiabatic/entropy basis. This also implies that the non-vanishing components of the matrix Z_{mn} are given here by

$$Z_{s\sigma} = -Z_{\sigma s} = \frac{P_{,s}}{P_{,X}\dot{\sigma}}. \tag{70}$$

To manipulate the equations of motion for the perturbations, the following identities will also be useful:

$$\dot{P}_{,\sigma} = \frac{P_{,s}^2}{\dot{\sigma}P_{,X}} + P_{,\sigma\sigma}\dot{\sigma} + P_{,X\sigma}\dot{\sigma}\ddot{\sigma}, \tag{71}$$

$$\dot{P}_{,s} = -\frac{P_{,s}P_{,\sigma}}{\dot{\sigma}P_{,X}} + P_{,\sigma s}\dot{\sigma} + P_{,Xs}\dot{\sigma}\ddot{\sigma}. \tag{72}$$

5.2. Equations of motion for the perturbations

Specializing our action (40) to the present two-field case, one can express the action in terms of the quantities Q_σ and Q_s and easily derive their equations of motion. The adiabatic equation of motion can be written in the compact form

$$\ddot{Q}_\sigma + \left[3H + \frac{c_{\rm s}^2}{P_{,X}}\left(\frac{P_{,X}}{c_{\rm s}^2}\right)^{\cdot}\right]\dot{Q}_\sigma + \left(\frac{c_{\rm s}^2 k^2}{a^2} + \mu_\sigma^2\right)Q_\sigma = (\Xi Q_s)^{\cdot} - \left(\frac{(Hc_{\rm s}^2)^{\cdot}}{Hc_{\rm s}^2} - \frac{P_{,\sigma}}{\dot{\sigma}P_{,X}}\right)\Xi\, Q_s, \tag{73}$$

with

$$\Xi \equiv \frac{1}{\dot{\sigma}P_{,X}}\left[(1+c_{\rm s}^2)P_{,s} - c_{\rm s}^2 P_{,Xs}\dot{\sigma}^2\right] \tag{74}$$

and

$$\mu_\sigma^2 \equiv -\frac{(\dot{\sigma}/H)^{\cdot\cdot}}{\dot{\sigma}/H} - \left(3H + \frac{c_{\rm s}^2}{P_{,X}}\left(\frac{P_{,X}}{c_{\rm s}^2}\right)^{\cdot} + \frac{(\dot{\sigma}/H)^{\cdot}}{\dot{\sigma}/H}\right)\frac{(\dot{\sigma}/H)^{\cdot}}{\dot{\sigma}/H}. \tag{75}$$

JCAP04(2008)017

The equation of motion for the entropy part is given by

$$\ddot{Q}_s + \left(3H + \frac{\dot{P}_{,X}}{P_{,X}}\right)\dot{Q}_s + \left(\frac{k^2}{a^2} + \mu_s^2\right)Q_s = -\frac{\Xi}{c_{\rm s}^2}\left[\dot{Q}_\sigma - H\left(\frac{P_{,X}\dot{\sigma}^2}{2H^2} + \frac{\ddot{\sigma}}{H\dot{\sigma}}\right)Q_\sigma\right]$$
$$= -\frac{\dot{\sigma}}{Hc_{\rm s}^2}\Xi\dot{\mathcal{R}}, \tag{76}$$

with

$$\mu_s^2 \equiv -\frac{P_{,ss}}{P_{,X}} + \frac{1}{2}\dot{\sigma}^2\tilde{R} - \frac{1}{2c_{\rm s}^2 X}\frac{P_{,s}^2}{P_{,X}^2} + 2\frac{P_{,Xs}P_{,s}}{P_{,X}^2}, \tag{77}$$

where $\tilde{R}$ denotes the Riemann scalar curvature of the field space.

Using the relation (58), this equation of motion can also be rewritten as

$$\ddot{Q}_s + \left(3H + \frac{\dot{P}_{,X}}{P_{,X}}\right)\dot{Q}_s + \left(\frac{k^2}{a^2} + \mu_s^2 + \frac{\Xi^2}{c_{\rm s}^2}\right)Q_s = -\frac{\dot{\sigma}}{\dot{H}}\Xi\frac{k^2}{a^2}\Psi, \tag{78}$$

which can be useful on large scales, when the right-hand side can be neglected. In this limit, the above equation shows that the entropy perturbation Q_s evolves independently of the adiabatic mode.

It is clear from the previous equations that Ξ quantifies the coupling between the entropy and adiabatic modes. One also notices that the equations of motion are characterized by a friction term that differs from the usual Hubble friction term. The additional friction term for the entropy perturbation is the same as the one which appears in the background equation of motion, but different from the friction term for the adiabatic perturbation. Finally, as already emphasized for N fields, we observe that the adiabatic mode propagates with the speed of sound $c_{\rm s}$, while the isocurvature mode is characterized by a propagation with the usual speed of light.

For a Lagrangian of the form

$$P = X - V(\phi^I), \tag{79}$$

the mixing parameter reduces to $\Xi = -2V_{,s}/\dot{\sigma} = -2Z_{\sigma s}$. This shows that, in this particular case, the coupling between the adiabatic and entropy modes is directly related to the 'rotation' of the adiabatic/entropy basis in field space, i.e. to the bending of the background trajectory in field space. It is worth noting that this direct link no longer holds in the general case because of the term proportional to $P_{,Xs}$ in Ξ. When the field metric is flat, $G_{IJ} = \delta_{IJ}$, one can introduce, as in [37], the rotation angle between the initial basis and the adiabatic/entropy basis. One thus finds that $\Xi = 2\dot{\theta}$. For a Lagrangian of the form (79) but with the field metric

$$G_{IJ}\,{\rm d}\phi^I\,{\rm d}\phi^J = {\rm d}\phi^2 + {\rm e}^{2b(\phi)}\,{\rm d}\chi^2, \tag{80}$$

one finds [43] that $\Xi = 2\dot{\theta} + b'\dot{\sigma}\sin\theta$, where we see now that the additional term simply comes from the non-trivial covariant derivative in (39). It is also easy to check that our equations (73)–(78) reduce to the results of [37, 43] in these particular cases. Note that, in the first case, non-linear extensions of these equations have been obtained in [44], based on a covariant formalism similar to that of [41, 42].

JCAP04(2008)017

When one can neglect spatial gradients, the expression (58) reduces to

$$\dot{Q}_\sigma + \left(\frac{\dot{H}}{H} - \frac{\ddot{\sigma}}{\dot{\sigma}}\right) Q_\sigma - \Xi\, Q_s \approx 0, \tag{81}$$

which implies that there exists a first integral for Q_σ and that the second-order equation of motion (73) is not necessary in this limit. Indeed one can check that the large-scale limit of (73) is a consequence of (81).

To conclude this section, let us give the approximate form of the evolution equations for the perturbations when the spatial gradients can be neglected:

$$\dot{\mathcal{R}} \approx \frac{H}{\dot{\sigma}}\, \Xi\, Q_s, \tag{82}$$

$$\ddot{Q}_s + \left(3H + \frac{\dot{P}_{,X}}{P_{,X}}\right) \dot{Q}_s + \left(\mu_s^2 + \frac{\Xi^2}{c_{\rm s}^2}\right) Q_s \approx 0. \tag{83}$$

6. Quantum fluctuations

We now consider the quantization of the system discussed in the previous section. In order to do so, we follow the usual procedure for single-field inflation. The first step consists in introducing a new variable which is canonically normalized, with conformal time, and whose effective mass is time dependent because of the expansion of the universe. In the present case, we have two degrees of freedom. By introducing the new fields

$$v_\sigma = \frac{a\sqrt{P_{,X}}}{c_{\rm s}}\, Q_\sigma, \qquad v_s = a\,\sqrt{P_{,X}}\, Q_s, \tag{84}$$

respectively for the adiabatic and entropy degrees of freedom, one can rewrite the second-order action in the form

$$S_{(2)} = \tfrac{1}{2} \int \mathrm{d}\tau\, \mathrm{d}^3k\, \left[v_\sigma'^2 + v_s'^2 - 2\xi v_\sigma' v_s - k^2 c_{\rm s}^2 v_\sigma^2 - k^2 v_s^2 + \Omega_{\sigma\sigma} v_\sigma^2 + \Omega_{ss} v_s^2 + 2\Omega_{s\sigma} v_\sigma v_s\right], \tag{85}$$

with

$$\xi = \frac{a}{c_{\rm s}}\Xi = \frac{a}{\dot{\sigma} P_{,X} c_{\rm s}}[(1 + c_{\rm s}^2) P_{,s} - c_{\rm s}^2 \dot{\sigma}^2 P_{,Xs}], \tag{86}$$

and

$$\Omega_{\sigma\sigma} = \frac{z''}{z}, \qquad \Omega_{s\sigma} = \frac{z'}{z}\xi, \qquad \Omega_{ss} = \frac{\alpha''}{\alpha} - a^2\mu_s^2, \tag{87}$$

where we have introduced the two background-dependent functions

$$z = \frac{a\dot{\sigma}\sqrt{P_{,X}}}{c_{\rm s} H}, \qquad \alpha = a\sqrt{P_{,X}}, \tag{88}$$

and used the conformal time τ defined by $\tau = \int \mathrm{d}t/a(t)$.

For single-field inflation with a standard kinetic term, z reduces to the usual function $a\dot{\sigma}/H$. In the general case considered here, the function z is still the ratio between v_σ and the comoving curvature perturbation defined in the previous section, i.e.

$$v_\sigma = z\,\mathcal{R}. \tag{89}$$

JCAP04(2008)017

The equations of motion derived from the action (85) can be written in the compact form

$$v_\sigma'' - \xi v_s' + \left(c_{\rm s}^2 k^2 - \frac{z''}{z}\right) v_\sigma - \frac{(z\xi)'}{z} v_s = 0, \tag{90}$$

$$v_s'' + \xi v_\sigma' + \left(k^2 - \frac{\alpha''}{\alpha} + a^2\mu_s^2\right) v_s - \frac{z'}{z}\xi v_\sigma = 0. \tag{91}$$

As mentioned already, the above system shows clearly that the adiabatic degree of freedom v_σ is sensitive to the sound horizon, while the entropy degree of freedom v_s is sensitive to the usual Hubble radius. In the general case where ξ is non-vanishing, the above system is coupled and we leave for a future investigation the analysis of the perturbations generated by this coupled system. In the following, we will just consider the simple case where ξ can be neglected while the perturbations cross the Hubble radius and sound horizon. This is similar to the situation considered in [21] for two-field DBI inflation.

When $\xi = 0$, the system is completely decoupled and one can analyse separately the adiabatic and entropy degrees of freedom. For completeness, let us repeat the standard analysis (see [26], or [39]). Each variable v, either v_σ or v_s, becomes a quantum field which is decomposed as

$$\hat{v}(\tau, \vec{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int {\rm d}^3 k \left\{ \hat{a}_{\vec{k}} v_k(\tau) {\rm e}^{{\rm i}\vec{k}.\vec{x}} + \hat{a}_{\vec{k}}^\dagger v_k^*(\tau) {\rm e}^{-{\rm i}\vec{k}.\vec{x}} \right\}, \tag{92}$$

where the $\hat{a}^\dagger$ and $\hat{a}$ are creation and annihilation operators (there are two sets of creation and annihilation operators, one for the adiabatic degree of freedom, the other for the entropy one), which satisfy the usual commutation rules

$$\left[\hat{a}_{\vec{k}}, \hat{a}_{\vec{k}'}^\dagger\right] = \delta(\vec{k} - \vec{k}'), \qquad \left[\hat{a}_{\vec{k}}, \hat{a}_{\vec{k}'}\right] = \left[\hat{a}_{\vec{k}}^\dagger, \hat{a}_{\vec{k}'}^\dagger\right] = 0. \tag{93}$$

The action with $\xi = 0$ implies that the conjugate momenta for v_σ and v_s are respectively v_σ' and v_s'. Therefore, in either case, the canonical quantization for $\hat{v}$ and its conjugate momentum leads to the condition

$$v_k v_k'^* - v_k^* v_k' = {\rm i}, \tag{94}$$

which must be satisfied by the complex function $v_k(\tau)$.

For the adiabatic degree of freedom, the function $v_{\sigma\,k}(\tau)$ satisfies the equation of motion (90) with $\xi = 0$, i.e.

$$v_\sigma'' + \left(c_{\rm s}^2 k^2 - \frac{z''}{z}\right) v_\sigma = 0. \tag{95}$$

In the slow-roll limit, and when $c_{\rm s}$ varies sufficiently slowly while the scale of interest crosses out of the sound horizon, one can take the approximation $z''/z \simeq 2/\tau^2$, so that the general solution is known analytically within this approximation. Finally, we require that the solution on small scales behaves like the Minkowski vacuum. This leads to the solution

$$v_{\sigma\,k} \simeq \frac{1}{\sqrt{2kc_{\rm s}}} {\rm e}^{-{\rm i}kc_{\rm s}\tau} \left(1 - \frac{\rm i}{kc_{\rm s}\tau}\right), \tag{96}$$

JCAP04(2008)017

where the normalization is imposed by the condition (94). This implies that the power spectrum of the adiabatic fluctuations is given by

$$\mathcal{P}_{Q_\sigma} = \frac{k^3}{2\pi^2}|v_{\sigma\,k}|^2 \frac{c_{\rm s}^2}{a^2 P_{,X}} \simeq \frac{H^2}{4\pi^2 c_{\rm s} P_X}, \tag{97}$$

where the quantities on the right-hand side are evaluated at the *sound horizon crossing*. This can be translated into the power spectrum of the curvature perturbation $\mathcal{R}$,

$$\mathcal{P}_{\mathcal{R}} = \frac{k^3}{2\pi^2}\frac{|v_{\sigma\,k}|^2}{z^2} \simeq \frac{H^4}{8\pi^2 c_{\rm s} X P_X} = \frac{H^2}{8\pi^2 \epsilon c_{\rm s}}, \tag{98}$$

where $\epsilon \equiv -\dot{H}/H^2$. In the decoupled case, the adiabatic sector is equivalent to the single-field k-inflation scenario and the above expression coincides with the result given in [19]. A more refined treatment, taking into account the next-to-leading-order corrections, can be found in the appendix of [45].

Let us now consider the entropy degree of freedom. When $\xi = 0$, the complex function $v_{s\,k}(\tau)$ satisfies the equation of motion

$$v_s'' + \left(k^2 - \frac{\alpha''}{\alpha} + a^2\mu_s^2\right) v_s = 0. \tag{99}$$

In the slow-roll limit, $\epsilon \equiv -\dot{H}/H^2$ is a small coefficient and its time derivative is at least second order in slow-roll. Since

$$\dot{\epsilon} = 2H\epsilon\left(\epsilon + \frac{(XP_{,X})^{\cdot}}{2HXP_{,X}}\right), \tag{100}$$

one must consider $\dot{P}_{,X}/(HP_{,X})$ as first order in slow-roll. One can then write, around the time of Hubble crossing ($k = aH$),

$$v_s'' + k^2 v_s - \frac{1}{\tau^2}\left(\nu_s^2 - \frac{1}{4}\right) v_s = 0, \tag{101}$$

with

$$\nu_s^2 \simeq \frac{9}{4} - \frac{3\dot{H}}{H^2} + \frac{3\dot{P}_{,X}}{2HP_{,X}} + \frac{P_{,ss}}{P_{,X}H^2} - \frac{\dot{\sigma}^2}{2H^2}\tilde{R} - \left(2 + \frac{1}{c_{\rm s}^2}\right)\frac{P_{,s}^2}{\dot{\sigma}^2 H^2 P_{,X}^2}, \tag{102}$$

where we have neglected the square and the time derivative of $\dot{P}_{,X}/(HP_{,X})$.

The solution of (101) with the appropriate asymptotic behaviour is

$$v_s = \frac{\sqrt{\pi}}{2}{\rm e}^{{\rm i}(\nu_s+1/2)\pi/2}\sqrt{-\tau}\, H_{\nu_s}^{(1)}(-k\tau), \tag{103}$$

where $H_\nu^{(1)}$ is the Hankel function of the first kind of order ν. Note that we did not assume that the last three terms were small. If they are big, the effective mass is important and the entropy fluctuations are suppressed. The last term in particular shows that the effect of the bending of the background trajectory on the entropy mode is enhanced in the small sound speed limit.

If the last three terms are small, i.e. in the limit $\nu_s \to 3/2$, one finds

$$v_{s\,k} \approx \frac{1}{\sqrt{2k}}{\rm e}^{-{\rm i}k\tau}\left(1 - \frac{\rm i}{k\tau}\right). \tag{104}$$

JCAP04(2008)017

In this case, the entropy power spectrum, at Hubble crossing, is given by

$$\mathcal{P}_{Q_s} = \frac{k^3}{2\pi^2}\frac{|v_{s\,k}|^2}{a^2 P_{,X}} \simeq \frac{H^2}{4\pi^2 P_{,X}}, \tag{105}$$

where the quantities are evaluated at *Hubble crossing*. One sees that the ratio between the entropy and adiabatic power spectra, evaluated at their respective 'horizon' crossings, is therefore the speed of sound $c_{\rm s}$.

7. Conclusion

In this work, we have studied the linear perturbations for a very large class of multi-field inflationary models, which includes most of the multi-field models studied so far. Our formalism should also be useful for studying the perturbations in multi-field inflationary models that will be constructed in the future. In order to obtain the equations of motion for the perturbations, as well as their quantum initial conditions, we have calculated directly the action at second order in the linear perturbations. To facilitate the analysis of the equations of motion, we have decomposed the linear perturbations into one adiabatic mode, along the background inflationary trajectory, and $N-1$ entropy modes. We have shown that a generic feature of these models is that the adiabatic and entropy modes obey coupled wave equations, which propagate with the speed of light for all entropy modes but with the speed of sound $c_{\rm s}$ for the adiabatic mode.

We have also used this decomposition into adiabatic and entropy modes, to show that the (comoving) curvature perturbation, proportional to the adiabatic perturbation, is sourced by a very specific combination of the entropy perturbations. In this combination, one finds a term which is non-zero when the background trajectory in field space is bent, or, more precisely, when it is non-geodesic (with respect to the field space metric G_{IJ}) but we have also found another term, proportional to $P_{,Xs}$, which is not present for models with canonical kinetic terms.

Interestingly, despite (or maybe thanks to) the fact that we have considered a much larger class of models than previous works, we have been able, in the two-field case, to write down the equations of motion in a very compact and simple form.

Finally, it would be interesting to extend this work in several directions. The analysis of the quantum fluctuations when the adiabatic and entropy modes are coupled would be particularly interesting. It is more complicated than in the standard case, because the quantum–classical transition occurs in principle at different times for adiabatic and entropy modes with the same wavenumber k: at the usual Hubble crossing ($k = aH$) for the isocurvature modes, but at the crossing of the sound horizon ($kc_{\rm s} = aH$) for the adiabatic mode.

In the present work, we have considered only linear perturbations. It would be interesting to go beyond the linear order and to study the non-Gaussianities that could be generated in this class of models. One can expect that the non-Gaussianities in this class of models would combine the types of non-Gaussianities exhibited in single-field DBI inflation and in multi-field inflation.

JCAP04(2008)017

Acknowledgments

We would like to thank V Mukhanov, D Steer, G Tasinato, and K Turzynski for very instructive discussions.

Appendix: Multi-field DBI inflation

An important example of inflation with a non-canonical kinetic term is the so-called DBI inflation model, where the inflaton field corresponds to the position of a probe D3-brane moving in a warped background and its dynamics is described by a DBI action. Very recently, a few papers have considered a multi-field extension of DBI inflation. Taking into account the angular position of the brane in addition to its radial position, they started from an effective Lagrangian of the form

$$P(X,\phi^I) = -\frac{1}{f}\left(\sqrt{1-2fX}-1\right) - V, \qquad X = -\tfrac{1}{2}G_{IJ}\nabla_\mu\phi^I\nabla^\mu\phi^J, \quad \text{(A.1)}$$

where f and V are functions of the scalar fields. The above Lagrangian belongs to the class of models studied in the present work, and the results given in the main text can thus be applied to this particular case and compared with the results of [20, 21].

The speed of sound derived from (A.1) is given by

$$c_\mathrm{s} = \sqrt{1-2fX} \equiv \frac{1}{\gamma}, \quad \text{(A.2)}$$

where γ is the analogue of the relativistic Lorentz factor. By taking the derivative of (A.1) with respect to the kinetic term X, one sees that the DBI action is a very special case, which satisfies the identity

$$P_{,X} = \frac{1}{c_\mathrm{s}} = \gamma. \quad \text{(A.3)}$$

Since both $P_{,X}$ and c_s appear very often in our equations for the perturbations, this special relation will yield simplifications. For example, the background coefficients multiplying $\dot{Q}_\sigma$ and $\dot{Q}_s$ become, respectively, $(3H + 3\dot{\gamma}/\gamma)$ and $(3H + \dot{\gamma}/\gamma)$, in agreement with the equations given in [20]. Similarly, the coefficients of $\dot{Q}_\sigma^2$ and $\dot{Q}_s^2$ in the action, which are respectively $a^3P_{,X}/(2c_\mathrm{s}^2)$ and $a^3P_{,X}/2$, reduce to $a^3/(2c_\mathrm{s}^3)$ and $a^3/(2c_\mathrm{s})$ in the DBI case, as obtained in [21].

We have also checked that, when specialized to the Lagrangian (A.1) and the field metric (80), our equations for the perturbations agree with the equations given in [20]. Note, however, that the background coefficients in the equations of [20] are expressed in terms of the angle θ between the initial basis and the adiabatic/entropy basis[5] in a form which makes them look singular when $\theta = 0$. In our case, we obtain directly the equations of motion with well-behaved coefficients.

As far as the primordial power spectra are concerned, it is easy to verify that our expressions (97) and (105) reduce to the results of [21], when using (A.2).

[5] This angle is denoted as α in [20].

JCAP04(2008)017

Let us finally note that the non-standard contribution to the mixing coefficient, proportional to $P_{,Xs}$, is non-zero in general in this model since

$$P_{,Xs} = \frac{X f_{,s}}{(1-2fX)^{3/2}}. \tag{A.4}$$

This term vanishes only when $f_{,s}$ vanishes. In the usual case where f is a function of the scalar field corresponding to the radial direction, $f_{,s}$ vanishes only if the background trajectory is strictly radial.

References

[1] McAllister L and Silverstein E, *String cosmology: a review*, 2007 *Preprint* 0710.2951 [hep-th]
[2] Burgess C P, *Lectures on cosmic inflation and its potential stringy realizations*, 2007 *Class. Quantum Grav.* **24** S795 [SPIRES] [0708.2865] [hep-th] [PoSP2GC(2006)008]
[3] Kallosh R, *On inflation in string theory*, 2008 *Lect. Notes Phys.* **738** 119 [hep-th/0702059]
[4] Cline J M, *String cosmology*, 2006 *Preprint* hep-th/0612129
[5] Henry Tye S H, *Brane inflation: string theory viewed from the cosmos*, 2006 *Preprint* hep-th/0610221
[6] Leach S M, Sasaki M, Wands D and Liddle A R, 2001 *Phys. Rev.* D **64** 023512 [SPIRES] [astro-ph/0101406]
[7] Jain R K, Chingangbam P and Sriramkumar L, 2007 *J. Cosmol. Astropart. Phys.* JCAP10(2007)003 [SPIRES] [astro-ph/0703762]
[8] Starobinsky A A and Yokoyama J, *Density fluctuations in Brans–Dicke inflation*, 1995 *Preprint* gr-qc/9502002
[9] Lalak Z, Langlois D, Pokorski S and Turzynski K, 2007 *J. Cosmol. Astropart. Phys.* JCAP07(2007)014 [SPIRES] [0704.0212] [hep-th]
[10] Brandenberger R H, Frey A R and Lorenz L C, 2007 *Preprint* 0712.2178 [hep-th]
[11] Langlois D, 1999 *Phys. Rev.* D **59** 123512 [SPIRES] [astro-ph/9906080]
[12] Bean R, Dunkley J and Pierpaoli E, 2006 *Phys. Rev.* D **74** 063503 [SPIRES] [astro-ph/0606685]
[13] Trotta R, 2007 *Mon. Not. Roy. Astron. Soc. Lett.* **375** L26 [astro-ph/0608116]
[14] Keskitalo R, Kurki-Suonio H, Muhonen V and Valiviita J, 2007 *J. Cosmol. Astropart. Phys.* JCAP09(2007)008 [SPIRES] [astro-ph/0611917]
[15] Komatsu E *et al* (WMAP Collaboration), 2008 *Preprint* 0803.0547 [astro-ph]
[16] Silverstein E and Tong D, 2004 *Phys. Rev.* D **70** 103505 [SPIRES] [hep-th/0310221]
[17] Alishahiha M, Silverstein E and Tong D, 2004 *Phys. Rev.* D **70** 123505 [SPIRES] [hep-th/0404084]
[18] Armendariz-Picon C, Damour T and Mukhanov V F, 1999 *Phys. Lett.* B **458** 209 [SPIRES] [hep-th/9904075]
[19] Garriga J and Mukhanov V F, 1999 *Phys. Lett.* B **458** 219 [SPIRES] [hep-th/9904176]
[20] Easson D A, Gregory R, Mota D F, Tasinato G and Zavala I, 2007 *Preprint* 0709.2666 [hep-th]
[21] Huang M x, Shiu G and Underwood B, 2007 *Preprint* 0709.3299 [hep-th]
[22] Kehagias A and Kiritsis E, 1999 *J. High Energy Phys.* JHEP11(1999)022 [SPIRES] [hep-th/9910174]
[23] Steer D A and Parry M F, 2002 *Int. J. Theor. Phys.* **41** 2255 [SPIRES] [hep-th/0201121]
[24] Brax Ph and Steer D A, 2002 *Phys. Rev.* D **66** 061501 [SPIRES] [hep-th/0207280]
[25] Easson D, Gregory R, Tasinato G and Zavala I, 2007 *J. High Energy Phys.* JHEP04(2007)026 [SPIRES] [hep-th/0701252]
[26] Mukhanov V F, Feldman H A and Brandenberger R H, 1992 *Phys. Rep.* **215** 203 [SPIRES]
[27] Langlois D, 1994 *Class. Quantum Grav.* **11** 389 [SPIRES]
[28] Anderegg S and Mukhanov V F, 1994 *Phys. Lett.* B **331** 30 [SPIRES] [hep-th/9403091]
[29] Maldacena J M, 2003 *J. High Energy Phys.* JHEP05(2003)013 [SPIRES] [astro-ph/0210603]
[30] Arnowitt R, Deser S and Misner C W, 1963 *Gravitation, an Introduction to Current Research* ed L Witten (New York: Freeman)
[31] Seery D and Lidsey J E, 2005 *J. Cosmol. Astropart. Phys.* JCAP06(2005)003 [SPIRES] [astro-ph/0503692]
[32] Seery D and Lidsey J E, 2005 *J. Cosmol. Astropart. Phys.* JCAP09(2005)011 [SPIRES] [astro-ph/0506056]
[33] Salopek D S and Bond J R, 1990 *Phys. Rev.* D **42** 3936 [SPIRES]
[34] Deruelle N, Gundlach C and Langlois D, 1992 *Phys. Rev.* D **45** 3301 [SPIRES]
[35] Sasaki M and Stewart E D, 1996 *Prog. Theor. Phys.* **95** 71 [SPIRES] [astro-ph/9507001]
[36] Groot Nibbelink S and van Tent B J W, 2000 *Preprint* hep-ph/0011325
Groot Nibbelink S and van Tent B J W, 2002 *Class. Quantum Grav.* **19** 613 [SPIRES] [hep-ph/0107272]

JCAP04(2008)017

[37] Gordon C, Wands D, Bassett B A and Maartens R, 2001 *Phys. Rev.* D **63** 023506 [SPIRES] [astro-ph/0009131]
[38] Kodama H and Sasaki M, 1984 *Prog. Theor. Phys. Suppl.* **78** 1 [SPIRES]
[39] Langlois D, *Inflation, quantum fluctuations and cosmological perturbations*, 2003 *Cargese 2003, Particle Physics and Cosmology* (*NATO Science Series*) ed D Kazakov and G Smadja (Berlin: Springer) pp 235–78 [hep-th/0405053]
[40] Wands D, Malik K A, Lyth D H and Liddle A R, 2000 *Phys. Rev.* D **62** 043527 [SPIRES] [astro-ph/0003278]
[41] Langlois D and Vernizzi F, 2005 *Phys. Rev. Lett.* **95** 091303 [SPIRES] [astro-ph/0503416]
[42] Langlois D and Vernizzi F, 2005 *Phys. Rev.* D **72** 103501 [SPIRES] [astro-ph/0509078]
[43] Di Marco F, Finelli F and Brandenberger R, 2003 *Phys. Rev.* D **67** 063512 [SPIRES] [astro-ph/0211276]
[44] Langlois D and Vernizzi F, 2007 *J. Cosmol. Astropart. Phys.* JCAP02(2007)017 [SPIRES] [astro-ph/0610064]
[45] Chen X, Huang M x, Kachru S and Shiu G, 2007 *J. Cosmol. Astropart. Phys.* JCAP01(2007)002 [SPIRES] [hep-th/0605045]

JCAP04(2008)017

Troisième partie

Les non-gaussianités primordiales

Chapitre 5

Non-gaussianités primordiales : formalismes et modèles

Sommaire

5.1 Introduction **128**

5.1.1 Motivations et contexte 128

5.1.2 Cadre général 129

5.2 Un aperçu **130**

5.2.1 Le bispectre 130

5.2.2 Le trispectre 131

5.2.3 Le résultat de Maldacena et au-delà 132

5.3 L'approche univers séparés et le formalisme δN **132**

5.3.1 L'approche univers séparés 133

5.3.2 Le formalisme δN 135

5.3.3 Les non-gaussianités locales 138

5.4 Le calcul quantique des non-gaussianités **141**

5.4.1 Le formalisme in-in 141

5.4.2 Développement perturbatif 144

5.4.3 L'exemple de la k-inflation 145

5.5 Les grandes classes de modèles et leurs signatures non-gaussiennes **150**

5.5.1 Forme locale et effets multichamps 151

5.5.2 Formes équilatérale et "orthogonale" et termes cinétiques non-standard 152

5.5.3 Dépendances d'échelle sinusoïdale et "résonante" et irrégularités . 152

5.5.4 Forme aplatie et vide différent de celui de Bunch-Davies. 154

5.1 Introduction

5.1.1 Motivations et contexte

Nous nous sommes concentrés jusque-là sur la théorie linéaire des fluctuations cosmologiques. Ceci est justifié par la faible amplitude, de l'ordre de 10^{-5}, des anisotropies de température du fond diffus cosmologique. De plus, dans le scénario le plus simple d'inflation, basé sur un champ scalaire en roulement lent, l'inflaton peut presque être considéré comme un champ libre, toute non-linéarité étant supprimée du fait de la platitude du potentiel. Dans l'approximation linéaire donc, toute observable obéit à une statistique gaussienne, auquel cas toute son information statistique est contenue dans sa fonction à deux points, ou de manière équivalente dans son spectre de puissance. Les observations cosmologiques actuelles sont parfaitement compatibles avec des fluctuations primordiales gaussiennes. Mieux, on sait que le "degré" de non-gaussianité dans les anisotropies du CMB est de moins de 0,1 %. Plusieurs motivations nous poussent cependant à dépasser l'approximation linéaire et à considérer les propriétés non-gaussiennes des perturbations cosmologiques.

L'inflation, le paradigme actuel de l'univers primordial, n'est pas une théorie unique. Il s'agit plutôt d'un mécanisme général dont les réalisations peuvent être très variées : inflation à un champ, multichamp, avec des termes cinétiques standard ou pas... Des alternatives ont également été proposées, comme le scénario du curvaton [283, 282], qui dissocie le mécanisme qui assure une période d'inflation du mécanisme générant les perturbations primordiales, ou les scénarios ekpyrotiques, dans lesquels l'inflation est remplacée par une phase de contraction lente avant le Big Bang (voir la référence [250] pour une revue). Dans l'approximation linéaire, ces modèles théoriques sont comparés aux spectres de puissance primordiaux, c'est-à-dire en pratique aux mesures de l'amplitude et de l'indice spectral des fluctuations scalaires, et aux contraintes sur la variation de l'indice scalaire et sur le rapport tenseur sur scalaire. Beaucoup de modèles différents peuvent évidemment être construits qui vérifient les contraintes observationnelles correspondantes, et les théoriciens ne s'en sont pas privés. L'intérêt d'étudier les non-gaussianités est que celles-ci sont sensibles aux *interactions* du ou des champs à l'origine des fluctuations primordiales, contrairement à la théorie linéaire gaussienne. Il devient par conséquent possible de différencier avec les non-gaussianités des modèles autrement presque indistinguables au niveau linéaire, ce qui ouvre une fenêtre complètement nouvelle sur la physique de l'univers primordial. Ceci est rendu manifeste par l'appellation de ce nouveau, ou en tout cas florissant, domaine de la cosmologie, les *non-gaussianités*. C'est une définition par la négative et au pluriel et pour cause, il y a une infinité de façons pour un champ d'être non-gaussien ! Heureusement, nous allons voir que les cosmologistes ont réussi dans les dernières années à identifier plusieurs grands types de non-gaussianités selon le mécanisme de genèse des fluctuations.

Enfin, notons qu'évidemment, la recherche d'effets si fins dans les données cosmologiques – les non-linéarités d'inhomogénéités de température, d'amplitude relative 10^{-5}, autour d'une valeur moyenne d'environ 3°K ! – n'est rendue possible que par les spectaculaires progrès de la cosmologie observationnelle, durant la dernière décennie en particulier. A cet égard, la communauté cosmologique attend beaucoup du satellite européen Planck (http ://public.planck.fr/), qui a été lancé le 14 mai 2009 et dont les premiers résultats sont attendus fin 2012. Planck aura en particulier la sensibilité nécessaire pour confirmer ou

infirmer la présence de non-gaussianités, dites locales, que les données du satellite WMAP suggèrent. Dans le cas d'une telle détection, nous verrons que tous les scénarios inflationnaires à un champ seraient exclus, ce qui constituerait une révolution pour la cosmologie primordiale. Dans tous les cas, notre connaissance de l'univers s'en trouvera transformée.

5.1.2 Cadre général

Les propriétés statistiques de la perturbation de courbure primordiale ζ, dont la définition doit préalablement être étendue au niveau non-linéaire, sont en général caractérisées par ses fonctions de corrélations à temps égaux (voir [362, 61] pour d'autres approches utilisant directement les densités de probabilité), en pratique en espace de Fourier. Les fonctions d'ordre un, $\langle\zeta_{\mathbf{k}}\rangle$, sont nulles (sinon, ζ ne pourrait être considéré comme une perturbation). Les fonctions de corrélation d'ordre deux, $\langle\zeta_{\mathbf{k}}\zeta_{\mathbf{k}'}\rangle$, définissent le spectre de puissance déjà présenté à la sous-section 2.4.2. On sépare naturellement dans les fonctions de corrélations d'ordre supérieur $n \geq 3$ les contributions connexes et non-connexes. Dans le cas Gaussien, les fonctions de corrélation connexes s'annulent tandis que celles non-connexes sont entièrement déterminées par les fonctions à deux points d'après le théorème de Wick [330]. Un moyen simple de caractériser les déviations à la gaussianité est donc de calculer les fonctions de corrélation connexes d'ordre $n \geq 3$. Parmi celles-ci, le *bispectre*

$$\langle\zeta_{\mathbf{k}_1}\,\zeta_{\mathbf{k}_2}\,\zeta_{\mathbf{k}_3}\rangle \equiv (2\pi)^3\delta(\mathbf{k_1}+\mathbf{k_2}+\mathbf{k_3})\,B_\zeta(k_1,k_2,k_3) \tag{5.1}$$

a reçu le plus d'attention, fort logiquement car il s'agit du moins difficile à détecter (chaque ζ "coûte" un facteur $\sim 10^{-5}$). Plus récemment, le *trispectre*

$$\langle\zeta_{\mathbf{k}_1}\,\zeta_{\mathbf{k}_2}\,\zeta_{\mathbf{k}_3}\zeta_{\mathbf{k}_4}\rangle_c \equiv (2\pi)^3\delta(\mathbf{k_1}+\mathbf{k_2}+\mathbf{k_3}+\mathbf{k_4})\,T_\zeta(\mathbf{k}_1,\mathbf{k}_2,\mathbf{k}_3,\mathbf{k}_4) \tag{5.2}$$

a cependant été également étudié. Les facteurs $\delta(\sum_{\mathbf{i}}\mathbf{k_i})$ dans (5.1)-(5.2) viennent de l'invariance statistique par translation et impliquent que les vecteurs d'onde $\mathbf{k}_i$ forment un triangle dans l'espace de Fourier, dans le cas du bispectre, et un tétraèdre dans le cas du trispectre. Dans le premier cas, la dépendance géométrique est alors entièrement exprimable en termes des normes k_i des trois vecteurs d'ondes. Une façon simple de prendre la mesure de la richesse d'informations contenues dans le bispectre, par exemple, est de remarquer que celui-ci est une fonction de trois variables contrairement au spectre de puissance qui ne dépend que d'une variable. En plus de son amplitude typique et de sa dépendance d'échelle – comment il varie sous l'effet d'une dilatation $k_i \to \lambda k_i$ –, on peut donc s'intéresser à sa forme, *i.e.* pour quelle configuration de triangle le bispectre est-il le plus grand ? Nous allons voir que la réponse à cette question fournit des informations cruciales sur la physique qui sous-tend l'inflation [24].

Avant de rentrer dans ces détails, il est utile d'avoir quelques ordres de grandeurs en tête. Pour cela, définissons la fonction adimensionnée $f_{NL}(k_1,k_2,k_3)$ par

$$B_\zeta(k_1,k_2,k_3) \;=\; \frac{6}{5}f_{NL}\left[P_\zeta(k_1)P_\zeta(k_2)+P_\zeta(k_1)P_\zeta(k_3)+P_\zeta(k_2)P_\zeta(k_3)\right]\,. \tag{5.3}$$

Nous verrons que cette définition est motivée par un certain type de non-gaussianités, dites locales, pour lesquelles f_{NL} est, en première approximation, indépendant des vecteurs

d'ondes. Il convient cependant de garder à l'esprit que f_{NL} est, de manière générique, une fonction de trois variables. Ceci étant dit, il est utile, pour caractériser rapidement différents effets, de citer l'amplitude caractéristique de cette fonction. Pour donner une idée approximative, les contraintes observationnelles actuelles sont $|f_{NL}| \lesssim O(100)$, la précision attendue du satellite Planck est $\Delta f_{NL} \simeq 5$ tandis qu'on pense atteindre $\Delta f_{NL} \simeq 1$ avec les futurs relevés de galaxies [89, 6, 303, 302] comme Euclid [342]. Les modèles les plus simples d'inflation à un champ en roulement lent prédisent $f_{NL} \simeq O(\epsilon, \eta) \ll 1$ [286], où ϵ et η désignent les paramètres de variation lente, tandis que de nombreux modèles plus complexes sont capables de générer de grandes non-gaussianités, par ceci nous voulons dire proches des bornes supérieures observationnelles actuelles (voir [96] pour une revue).

Il est important de noter que la perturbation de courbure primordiale, *i.e.* à l'époque de la nucléosynthèse, n'est pas directement observable. On observe plutôt ses effets dans le rayonnement du fond diffus cosmologique et les grandes structures – on traitera du cas du CMB au chapitre 9 –. La relativité générale elle-même étant non-linéaire, des perturbations primordiales gaussiennes deviennent ultérieurement non-gaussiennes. Ainsi, la comparaison des modèles aux observations nécessite en général l'étude de l'évolution non-linéaire des perturbations cosmologiques entre l'époque primordiale et la recombinaison par exemple (dans le cas du CMB). Ce type de non-linéarités était jusqu'à peu négligé, avec l'idée que leurs effets sont du même ordre de grandeur que $f_{NL} \simeq 1$. Des calculs récents [334, 322, 38, 335] montrent cependant qu'elles peuvent contaminer le signal primordial jusqu'à $f_{NL} \simeq 5$. Dans cette thèse, nous nous concentrons sur les non-gaussianités primordiales.

Il serait vain d'essayer de faire une revue exhaustive des signatures non-gaussiennes des différents modèles d'univers primordiaux proposés tant elles sont diverses. Nos buts dans ce chapitre sont plutôt :

- de présenter les outils et les méthodes permettant de calculer le bispectre et le trispectre dans un modèle donné.
- de décrire les modèles susceptibles de générer de grandes non-gaussianités et d'en effectuer une classification selon le type de celles-ci.

5.2 Un aperçu

5.2.1 Le bispectre

L'objet d'attention fondamentale dans l'étude des non-gaussianités primordiales est le bispectre $B_\zeta(k_1, k_2, k_3)$ (5.1). De manière alternative à f_{NL} (5.3), sa dépendance géométrique en les vecteurs d'onde k_i est souvent représentée par la fonction $S(k_1, k_2, k_3)$ telle que

$$B_\zeta(k_1, k_2, k_3) \equiv (2\pi)^4 \frac{S(k_1, k_2, k_3)}{(k_1 k_2 k_3)^2} A_s^2 \tag{5.4}$$

où A_s désigne l'amplitude des fluctuations scalaires (2.143). Il est également d'usage de distinguer la *forme* de S et sa *dépendance d'échelle*. Sa forme fait référence à sa dépendance en les rapports k_2/k_1 et k_3/k_1 à impulsion totale $K = k_1 + k_2 + k_3$ fixée tandis que sa dépendance d'échelle désigne sa dépendance en K une fois les rapports k_2/k_1 et k_3/k_1 fixés

(on considère dans la suite, sans perte de généralité, que $k_3 \leq k_2 \leq k_1$). Autrement dit, la forme de S indique la dépendance du bispectre en la forme du triangle constitué par les vecteurs d'onde $\mathbf{k}_i$ et la dépendance d'échelle témoigne du comportement du bispectre sous l'effet d'une dilatation du triangle $\mathbf{k}_i \to \lambda \mathbf{k}_i$. Il s'avère que, dans la majorité des modèles d'univers primordiaux, le bispectre n'a qu'une légère dépendance d'échelle (voir cependant [97, 98, 208, 149]). Pour cette raison, la forme du bispectre est considérée comme une propriété plus fondamentale pour distinguer différents modèles. Pour visualiser les formes, on représente souvent les graphes à trois dimensions des fonctions $S(1, x_2, x_3)$ correspondantes où $0 \leq x_2, x_3 \leq 1$ et $1 \leq x_2 + x_3$ (pour satisfaire l'inégalité triangulaire) (voir la figure 5.2 par exemple). Il est également utile en vue d'analyser les données de quantifier la corrélation entre différentes formes. Dans le cas du CMB par exemple, l'analyse des données fait intervenir la projection du bispectre sur la sphère. Pour obtenir un équivalent simple en espace de Fourier, on peut définir le produit scalaire entre deux formes

$$S \cdot S' \equiv \int_{V_k} S(k_1, k_2, k_3) S'(k_1, k_2, k_3) w(k_1, k_2, k_3) dV_k \ , \tag{5.5}$$

où V_k désigne la gamme de vecteur d'ondes couvertes et $w(k_1, k_2, k_3) = \frac{1}{k_1+k_2+k_3}$ est une fonction poids habilement choisie [1] [145]. La corrélation entre deux formes est alors donnée par [24, 145]

$$C(S, S') \equiv \frac{S \cdot S'}{(S \cdot S)^{1/2} (S' \cdot S')^{1/2}} \ . \tag{5.6}$$

5.2.2 Le trispectre

Dans les dernières années, et au cours de cette thèse en particulier, le trispectre (5.2) a également émergé comme une source d'information importante sur la physique de l'univers primordial [83, 101, 365, 200, 156, 99, 344, 253, 22, 308]. Sa dépendance géométrique est plus subtile que celle du bispectre. En particulier, elle ne peut pas être exprimée seulement en fonction des normes k_i des vecteurs d'onde. Pour déterminer le nombre de degrés de liberté correspondants, notons qu'il faut douze nombre réels pour décrire l'ensemble des quatre vecteurs d'onde tridimensionnels. La conservation de l'impulsion, $\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3 + \mathbf{k}_4 = 0$, en élimine trois et l'invariance par rotation trois autres. Six paramètres indépendants sont donc nécessaires et suffisants à la description de toutes les configurations inéquivalentes du tétraèdre formé par les quatre vecteurs d'onde. On peut, par exemple, utiliser l'ensemble $\{k_1, k_2, k_3, k_4, k_{12}, k_{23}\}$, où k_{ij} désigne $|\mathbf{k}_i + \mathbf{k}_j|$, les autres k_{ij} étant alors déterminés par

$$\begin{aligned} k_{13} &= k_{24} = \sqrt{k_1^2 + k_2^2 + k_3^3 + k_4^2 - k_{12}^2 - k_{23}^2} \, , \\ k_{14} &= k_{23} \, , \qquad k_{34} = k_{12} \, . \end{aligned} \tag{5.7}$$

Il existe également des restrictions géométriques sur l'espace des paramètres, sous la forme d'inégalités triangulaires par exemple (voir la référence [99] pour plus de détails). De manière similaire à (5.4), la dépendance géométrique du trispectre peut être représentée par le profil $\mathcal{T}$ tel que [99]

$$T_\zeta(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3, \mathbf{k}_4) = (2\pi)^6 \frac{\mathcal{T}(k_1, k_2, k_3, k_4, k_{12}, k_{14})}{(k_1 k_2 k_3 k_4)^3} \, A_s^3 \, . \tag{5.8}$$

1. Pour reproduire avec précision l'estimateur du bispectre mesuré grâce aux relevés de galaxies par exemple, la fonction poids devrait être différente.

Il faut par contre utiliser des plans de coupe à travers l'espace sixdimensionnel des paramètres pour le représenter graphiquement, ce qui est fait dans l'article reproduit à la section 8.3 par exemple.

5.2.3 Le résultat de Maldacena et au-delà

Maldacena a posé la base du calcul quantique des non-gaussianités (*c.f.* la section 5.4) dans la référence [286] en calculant pour la première fois de manière précise le bispectre généré dans les modèles les plus simples d'inflation à un champ en roulement lent (voir également la référence [2]). Le profil S correspondant est d'ordre $\mathcal{O}(\epsilon, \eta)$ (voir l'équation (5.101) pour le résultat exact) où ϵ (3.7) et η (3.11) sont les paramètres de variation lente. Ceux-ci étant au plus d'ordre $\mathcal{O}(0.01)$, $f_{NL} \sim \mathcal{O}(0.01)$ est donc trop petit pour être détectable comme annoncé plus haut. Des non-gaussianités primordiales importantes peuvent par contre être générées si une (ou plusieurs) des conditions dans lesquelles ce résultat a été démontré n'est pas satisfaite :

- **un champ :** un seul champ sous-tend l'inflation et génère les fluctuations primordiales.
- **termes cinétiques standard :** le terme cinétique de l'inflaton est tel que la vitesse de propagation des fluctuations scalaires associées est égale à la vitesse de la lumière.
- **variation lente :** l'évolution de l'inflaton est lente par rapport au temps de Hubble.
- **état initial du vide :** l'inflaton est dans le vide de Bunch-Davies (l'état du vide adiabatique).

Dans cette thèse, nous nous sommes particulièrement intéressés aux non-gaussianités générées dans les modèles multichamp et dans ceux avec des termes cinétiques non-standard. Nous mentionnerons également à la section 5.5 les signatures non-gaussiennes des modèles avec des irrégularités où des conditions initiales non-standard. Avant cela, nous décrivons, dans les deux prochaines sections, des méthodes permettant de calculer le bispectre et le trispectre primordial.

5.3 L'approche univers séparés et le formalisme δN

Lors de notre étude des perturbations linéaires pendant l'inflation, dans la partie II, nous avons vu que les champs scalaires sous-tendant l'inflation sont des variables naturelles jusqu'à la traversée du rayon de Hubble tandis qu'hors de celui-ci et jusqu'à l'époque primordiale, il est plus judicieux de considérer la perturbation de courbure ζ, celle-ci vérifiant une loi de (non)-conservation simple. Une question naturelle est donc l'existence d'une extension non-linéaire de ζ qui vérifierait également une loi de conservation simple. Plusieurs approches, souvent reliées, ont été proposées à cet égard [413, 278, 241, 240, 347, 346]. Nous présentons maintenant la plus connue et la plus utilisée, l'approche dite *univers séparés* [413, 278], étroitement reliée au formalisme δN.

5.3.1 L'approche univers séparés

Intéressés par la période entre la traversée du rayon de Hubble et l'époque primordiale où les perturbations cosmologiques sont de taille super-Hubble $k \ll aH$, on peut considérer une description lissée de l'univers avec une taille de lissage λ_s (pour *smooth*) telle que

$$\lambda \sim \frac{a}{k} \gg \lambda_s \gtrsim H^{-1} \tag{5.9}$$

pour toutes les échelles cosmologiques observables de taille physique λ (voir la figure 5.1). L'hypothèse de l'approche univers séparés [2] consiste alors à supposer que localement, *i.e.* à l'échelle $\sim \lambda_s$, chaque région de l'univers peut être considérée comme un univers homogène et isotrope évoluant de manière indépendante des autres. Aux échelles cosmologiques λ par contre, la juxtaposition d'univers indépendants évoluant chacun avec leur propres conditions initiales donne lieu à des perturbations, les perturbations de grandes longueurs d'onde λ qui nous intéressent. Notons que si on lissait encore l'univers à une échelle λ_0 supérieure à celles des perturbations cosmologiques observables [3], on obtiendrait par définition l'espace-temps de fond (1.1) qui nous a servi de point de départ et qui modélise l'univers observable.

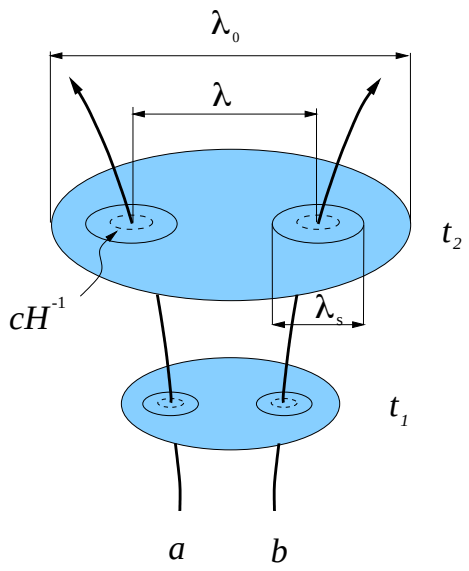

FIGURE 5.1 – Une illustration schématique de l'approche univers séparés, avec les symboles définis dans le texte. Figure extraite de [413].

Les corrections à l'approximation de localité de l'approche univers séparés font évidemment intervenir des termes contenant des gradients spatiaux. L'approche peut donc être vue en pratique comme un développement en ces gradients, chacun "coûtant" un facteur $\epsilon \equiv k/aH \ll 1$ [4]. Dans la suite, on travaille à l'ordre linéaire $O(\epsilon)$ dans ce développement.

2. *Separate universe approach* en anglais.

3. Cette échelle λ_0 doit cependant être plus petite qu'une hypothétique échelle au-delà de laquelle l'univers ne serait plus homogène et isotrope, comme suggéré par le concept d'inflation éternelle.

4. En pratique, on néglige également dans cette approche les perturbations de type vectoriel dont on a vu qu'elles sont nulles à l'ordre linéaire en présence uniquement de champs scalaires.

Rappelons que dans le formalisme ADM, on écrit la métrique de l'espace-temps sous la forme (3.43)

$$ds^2 = -\mathcal{N}^2 dt^2 + h_{ij}(dx^i + N^i dt)(dx^j + N^j dt) \tag{5.10}$$

(nous utilisons ici la notation $\mathcal{N}$ et non N pour la fonction décalage afin d'éviter toute confusion avec le nombre local de e-folds introduit plus bas). Chaque univers FLRW étant caractérisé par son facteur d'échelle, il est naturel de décomposer la métrique spatiale h_{ij} selon

$$h_{ij} = e^{2\tilde{\alpha}} \tilde{h}_{ij} \tag{5.11}$$

où $\det(\tilde{h}_{ij})$=1, de telle façon que $e^{\tilde{\alpha}}$ peut être interprété comme un facteur d'échelle local. Intéressés par les inhomogénéités de celui-ci, on le factorise ensuite selon

$$e^{\tilde{\alpha}} = a(t) e^{-\psi(t,x^i)} \tag{5.12}$$

où ψ s'annule quelque part dans l'univers observable de telle façon que $a(t)$ représente bien le facteur d'échelle de fond de celui-ci (on utilise la même notation ψ que dans la métrique (2.28) car les deux variables coïncident à l'ordre linéaire). D'après l'hypothèse d'univers séparés, la métrique (5.10) doit localement pouvoir être mise sous la forme d'un espace de FLRW

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t)\delta_{ij} dx^i dx^j \,. \tag{5.13}$$

Ainsi, N_i s'annule dans cette limite, $N_i = O(\epsilon)$, et $\tilde{h}_{ij}$ est indépendant du temps, $\dot{\tilde{h}}_{ij} = O(\epsilon)$. A l'ordre $O(\epsilon^2)$, la métrique (5.10) prend donc la forme

$$ds^2 = -\mathcal{N}^2 dt^2 + 2N_i dx^i dt + e^{2\tilde{\alpha}} \tilde{h}_{ij} dx^i dx^j \,. \tag{5.14}$$

Quant au contenu matériel de l'univers, son tenseur énergie-impulsion doit localement prendre la forme de celui d'un fluide parfait, *i.e.*

$$T_{\mu\nu} = (\rho + p)\, u_\mu u_\nu + p g_{\mu\nu} + O(\epsilon^2)\,, \tag{5.15}$$

où nous supposons que son tenseur de pression anisotrope est d'ordre $O(\epsilon^2)$ au moins (on peut le vérifier facilement dans le cas de champs scalaires par exemple). On *définit* alors ζ comme $-\psi$ sur les hypersurfaces spatiales de densité d'énergie uniforme

$$\zeta \equiv -\,\psi|_{\delta\rho=0} \,. \tag{5.16}$$

A l'ordre linéaire, on retrouve bien ζ_1 dont la définition invariante de jauge est donnée à l'équation (2.87). Suivant la démarche décrite à la sous-section 2.2.3, on peut de même donner une définition invariante de jauge de ζ à tout ordre perturbatif. Ceci est rendu explicite dans les articles reproduits aux sections 6.2 et 6.3 (voir également la référence [139]).

Montrons maintenant que ζ ainsi défini est non-linéairement conservé aux grandes échelles pour des perturbations adiabatiques. Utilisons par simplicité des coordonnées spatiales comobiles avec le fluide, *i.e.* telles que les courbes x^i = cte coïncident avec les courbes intégrales de la quadrivitesse u^μ [5]. Alors, $u^i = 0$ et $u^0 = \frac{dt}{d\tau} = 1/N + O(\epsilon^2)$ où τ – rien à

5. Tous les choix de filages sont équivalents dans l'approche univers séparés où tout vecteur spatial est considéré d'ordre au moins $O(\epsilon)$.

voir avec le temps conforme, le contexte est non ambigu ici – est le temps propre le long du champ de vecteur u^μ. On obtient alors

$$\theta \equiv \nabla_\mu u^\mu = \frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_\mu(\sqrt{-g}u^\mu) = \frac{1}{\mathcal{N}e^{3\tilde{\alpha}}}\partial_0(\mathcal{N}e^{3\tilde{\alpha}}u^0) = \frac{3\dot{\tilde{\alpha}}}{N} + O(\epsilon^2) \tag{5.17}$$

où on a utilisé la condition $\det(\tilde{h}_{ij}) = 1$ à la deuxième égalité. Notons qu'on obtiendrait le même résultat

$$\theta_n \equiv \nabla_\mu n^\mu = \frac{3\dot{\tilde{\alpha}}}{\mathcal{N}} + O(\epsilon^2) \tag{5.18}$$

pour le vecteur n^μ orthogonal aux hypersurfaces de temps constant $n_\mu = (-\mathcal{N}, 0)$. Ceci nous sera utile pour relier l'approche présentée ici à l'approche covariante à la section 6.1.

L'équation de conservation de l'énergie $u_\mu \nabla_\nu T^{\mu\nu} = 0$ s'écrit, en utilisant l'équation (5.17),

$$\dot{\rho} + 3\dot{\tilde{\alpha}}(\rho + p) + O(\epsilon^2) = 0 \tag{5.19}$$

ou encore

$$-\dot{\psi} = -\frac{\dot{a}}{a} - \frac{1}{3}\frac{\dot{\rho}}{\rho + p} + O(\epsilon^2)\,. \tag{5.20}$$

Supposons maintenant que, toujours au premier ordre en ϵ, la pression p est une fonction bien définie de la densité d'énergie ρ, *i.e.* le fluide est adiabatique, et évaluons l'équation (5.20) sur les hypersurfaces de densité d'énergie uniforme. On obtient alors que $\dot{\zeta}$ est spatialement homogène. Comme ψ s'annule quelque part dans l'univers, on en déduit que

$$\dot{\zeta} = O(\epsilon^2)\,. \tag{5.21}$$

La perturbation de courbure sur les hypersurfaces de densité d'énergie uniforme ζ est donc conservée non-linéairement si le fluide est adiabatique [278]. Notons évidemment que la perturbation de courbure non-linéaire ζ_i, définie par $\zeta_i \equiv -\psi|_{\delta\rho_i=0}$ pour chaque fluide i, est conservée aux grandes échelles quand le tenseur énergie-impulsion de celui-ci est conservé.

5.3.2 Le formalisme δN

Définissons maintenant le nombre local de e-folds d'expansion le long des lignes d'univers comobiles

$$N(t_2, t_1; x^i) \equiv \int_{t_1}^{t_2} \frac{\theta}{3} d\tau \bigg|_{x^i}\,. \tag{5.22}$$

De (5.17) on tire

$$\psi(t_2, x^i) - \psi(t_1, x^i) = \ln\left(\frac{a(t_2)}{a(t_1)}\right) - N(t_2, t_1; x^i)\,. \tag{5.23}$$

Ainsi, le nombre local de e-folds entre deux hypersurfaces plates, *i.e.* telles que $\psi = 0$ [6], est égal à sa valeur de fond $\bar{N}(t_2, t_1) = \ln\left(\frac{a(t_2)}{a(t_1)}\right)$. Considérons maintenant deux feuilletages

6. Les hypersurfaces spatiales ne sont strictement plates que pour $\psi = 0$ et $\tilde{h}_{ij} = \delta_{ij}$

A et B qui coïncident à $t = t_1$ en un point de coordonnées spatiales x^i quelconque. De l'équation (5.23) on tire

$$\psi_A(t_2, x^i) - \psi_B(t_2, x^i) = N_B(t_2, t_1; x^i) - N_A(t_2, t_1; x^i) \tag{5.24}$$

où les indices A et B désignent l'évaluation sur les hypersurfaces correspondantes. Choisissons maintenant le feuilletage A tel qu'il débute sur une hypersurface plate à $t = t_1$ et finisse sur une hypersurface de densité d'énergie uniforme à $t = t_2$, et le feuilletage B plat entre $t = t_1$ et $t = t_2$.On obtient alors

$$\zeta(t_2, x^i) = -\psi_A(t_2, x^i) = N_A(t_2, t_1; x^i) - \bar{N}(t_2, t_1)\,. \tag{5.25}$$

Autrement dit, on peut obtenir la valeur de ζ à un temps t comme la différence entre le nombre de e-folds d'expansion entre toute hypersurface plate et l'hypersurface de densité d'énergie uniforme au temps t et le nombre de e-folds de fond correspondant. Pour cette raison, ce moyen d'évaluer la perturbation de courbure est appelé le formalisme δN. Il est important d'insister sur le fait que le résultat (5.25), initialement démontré dans l'approximation linéaire [355], est valable de manière complètement non-perturbative [278].

Considérons maintenant la situation où l'univers est dominé par M champs scalaires ϕ^A pendant l'inflation [7] et utilisons l'hypothèse d'univers séparés. Celle-ci stipule que la physique est localement celle d'un espace de FLRW. Or, dans de tels espaces-temps, une fois donnée la valeur initiale des M champs scalaires sur une hypersurface spatiale (ainsi que la valeur de leurs dérivées temporelles en général), l'évolution ultérieure est entièrement déterminée, ainsi donc que le nombre de e-folds d'expansion $N(\phi^A)$ [8]. La valeur de $N_A(t_2, t_1; x^i)$ dans l'équation (5.25) peut ainsi être calculée en utilisant seulement la connaissance de l'évolution de fond et en utilisant des conditions initiales perturbées. Or, nous avons vu que le calcul quantique de l'amplification des fluctuations fournit précisément l'amplitude des fluctuations des champs scalaires sur une hypersurface plate peu de temps après que les modes observables soient devenus classiques pendant l'inflation, ce que nous notons par $*$. Il s'agit de l'époque de la traversée du rayon de Hubble dans l'inflation canonique et de la traversée de l'horizon du son dans la k-inflation par exemple. Choisissons donc l'hypersurface plate initiale du formalisme δN à cette époque [9] et décomposons tout champ en sa partie homogène et sa fluctuation sur cette hypersurface $\phi^A_* = \bar{\phi}^A_* + Q^A_*$, avec $Q^A_* \sim H_*/2\pi$ quitte à renormaliser les champs en présence de termes cinétiques non-standard. On obtient alors

$$\zeta(t, x^i) = N(\bar{\rho}(t), t_*)\left(\bar{\phi}^A_* + Q^A_*(x^i)\right) - N(\bar{\rho}(t), t_*)\left(\bar{\phi}^A_*\right) \tag{5.26}$$

où $\bar{\rho}(t)$ indique que le nombre de e-folds est calculé jusqu'à une hypersurface de densité

7. La discussion qui suit peut facilement être étendue à la présence d'autres types de champs comme des champs vectoriels [126].

8. Nous nous concentrons sur les situations où il existe des attracteurs dans l'espace des solutions tels que les dérivées temporelles des champs sont entièrement déterminées par eux $\dot{\phi}^A = f^A(\phi^B)$. C'est le cas de l'inflation de roulement lent et de l'inflation Dirac-Born-Infeld par exemple. Si cette hypothèse n'est pas valable, on peut recourir à un formalisme δN généralisé [249]

9. La référence [316] place l'hypersurface plate initiale du formalisme δN à l'instant auquel on souhaite évaluer ζ. L'équation (5.25) donne alors la formule de changement de jauge entre la jauge plate et la jauge de densité d'énergie uniforme (voir également la référence [278]).

d'énergie uniforme [10]. En effectuant un développement de Taylor de la fonction $N(\phi_*^A)$ centré en $\bar{\phi}_*^A$, on obtient donc

$$\zeta = N_A Q^A + \frac{1}{2} N_{AB} Q^A Q^B + \frac{1}{6} N_{ABC} Q^A Q^B Q^C + \dots \tag{5.27}$$

où nous avons omis l'indice $*$ par simplicité, nous utilisons la convention de sommation sur les indices $A, B, \dots$ et

$$N_A \equiv \left.\frac{\partial N}{\partial \phi_*^A}\right|_{\bar{\phi}_*^A}, \qquad N_{AB} \equiv \left.\frac{\partial^2 N}{\partial \phi_*^A \partial \phi_*^B}\right|_{\bar{\phi}_*^A} \dots \tag{5.28}$$

À partir du développement (5.27), on peut donc déterminer les propriétés statistiques de la perturbation de courbure ζ en fonction de celles des fluctuations des champs sur l'hypersurface plate initiale [11]. Nous verrons à la section 5.4 comment déterminer celles-ci grâce au formalisme "in-in" de Keldysh-Schwinger mais nous pouvons déjà donner les expressions formelles des spectre, bispectre et trispectre primordiaux. Pour cela, définissons le spectre de puissance des perturbations des champs

$$\langle Q^A_{\mathbf{k}} Q^B_{\mathbf{k}'} \rangle = C^{AB}(k)(2\pi)^3 \delta(\mathbf{k} + \mathbf{k}')\,, \tag{5.29}$$

leur bispectre

$$\langle Q^A_{\mathbf{k}_1}\, Q^B_{\mathbf{k}_2}\, Q^C_{\mathbf{k}_3} \rangle \equiv B^{ABC}(k_1, k_2, k_3)(2\pi)^3 \delta(\mathbf{k_1} + \mathbf{k_2} + \mathbf{k_3}) \tag{5.30}$$

et leur trispectre

$$\langle Q^A_{\mathbf{k}_1}\, Q^B_{\mathbf{k}_2}\, Q^C_{\mathbf{k}_3} Q^D_{\mathbf{k}_4} \rangle_c \equiv T^{ABCD}(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3, \mathbf{k}_4)(2\pi)^3 \delta(\sum_{\mathbf{i}} \mathbf{k_i})\,. \tag{5.31}$$

On obtient alors l'expression du spectre primordial

$$P_\zeta(k) = N_A N_B C^{AB}(k)\,, \tag{5.32}$$

du bispectre primordial [12]

$$\begin{aligned} B_\zeta(k_1, k_2, k_3) &= N_A N_B N_C B^{ABC}(k_1, k_2, k_3) \\ + \quad & N_A N_{BC} N_D \left[C^{AC}(k_1) C^{BD}(k_2) + C^{AC}(k_2) C^{BD}(k_3) + C^{AC}(k_3) C^{BD}(k_1) \right] \end{aligned} \tag{5.33}$$

et du trispectre primordial [83]

$$\begin{aligned} T_\zeta(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3, \mathbf{k}_4) \quad &= \quad N_A N_B N_C N_D T^{ABCD}(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3, \mathbf{k}_4) \\ &+ \quad N_{AB} N_C N_D N_E \left[C^{AC}(k_1) B^{BDE}(k_{12}, k_3, k_4) + 11 \text{ perms} \right] \\ &+ \quad N_{AB} N_{CD} N_E N_F \left[C^{BD}(k_{13}) C^{AE}(k_3) C^{CF}(k_4) + 11 \text{ perms} \right] \\ &+ \quad N_{ABC} N_D N_E N_F \left[C^{AD}(k_2) C^{BE}(k_3) C^{CF}(k_4) + 3 \text{ perms} \right] \end{aligned} \tag{5.34}$$

(où nous n'avons pas considéré les configurations exceptionnelles des vecteurs d'onde telles que l'un, ou la somme de deux d'entre eux, est nul). Nous nous sommes également restreints à l'ordre dominant dans les fluctuations, ce qui correspond, dans un langage de théorie des champs, à travailler à l'ordre des arbres (voir [81] pour un traitement diagrammatique du formalisme δN).

10. On peut utiliser le même formalisme pour calculer les ζ_i (2.118). Il suffit alors de remplacer l'hypersurface de densité d'énergie totale uniforme par l'hypersurface de i-densité uniforme [202, 245].

11. Notons que pour respecter $\langle \zeta \rangle = 0$, il faut soustraire au membre de droite de l'équation (5.27) sa valeur moyenne.

5.3.3 Les non-gaussianités locales

Bien que formels, les résultats (5.33) et (5.34) montrent que les non-gaussianités primordiales ont deux origines : les non-gaussianités intrinsèques aux champs à la traversée de l'horizon, quantifiées par les fonctions B^{ABC} et T^{ABCD}, et les non-linéarités de la relation entre la perturbation de courbure et les perturbations des champs à la traversée de l'horizon, quantifiées par les termes N_{AB} et N_{ABC}. Les premières se développent sous et à la traversée de l'horizon et sont de nature intrinsèquement quantiques tandis que les secondes proviennent de l'évolution classique non-linéaire hors de l'horizon. Concentrons-nous pour l'instant sur celles-ci et utilisons, pour simplifier les expressions obtenues, qu'à l'ordre dominant dans l'approximation de variation lente,

$$C^{AB}(k) = \frac{H_*^2}{2k^3}\delta^{AB} \tag{5.35}$$

(*c.f.* la sous-section 4.2.2) où δ^{AB} désigne la fonction de Kronecker.

Il sera également utile de considérer la limite où un champ seulement ϕ est dynamiquement important. Dans ce cas, on peut utiliser ce champ comme paramètre le long de l'unique trajectoire du système parmi l'espace des phases unidimensionnel [12] et écrire

$$N(\bar{\rho}(t), t_*)\,(\phi^*) = \int_{\phi^*}^{\phi(\bar{\rho}(t))} \left(\frac{H}{\dot{\phi}}\right) d\phi\,. \tag{5.36}$$

Autrement dit, dans le cas à un champ, l'univers suit la même histoire en tout point de l'espace, à un décalage temporel près dû aux fluctuations quantiques du champ à la traversée de l'horizon. Ceci explique pourquoi la perturbation de courbure est constante dans ce cas hors de l'horizon. Ceci implique également que les dérivées successives de la fonction N intervenant dans le développement (5.27) s'expriment uniquement en fonction de quantités évaluées à la traversée de l'horizon :

$$N_\phi = -\left(\frac{H}{\dot{\phi}}\right)\bigg|_*\,, \qquad N_{\phi\phi} = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\phi}\left(\frac{H}{\dot{\phi}}\right)\bigg|_*\,, \qquad N_{\phi\phi\phi} = -\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\phi^2}\left(\frac{H}{\dot{\phi}}\right)\bigg|_* \tag{5.37}$$

On déduit en particulier de la forme des dérivées d'ordre supérieur ou égal à deux que celles-ci sont négligeables dans l'inflation de variation lente.

Le spectre

Le spectre de puissance renormalisé s'écrit, en utilisant (5.32) et (5.35),

$$\mathcal{P}_\zeta(k) \equiv \frac{k^3}{2\pi^2}P_\zeta(k) = \left(\frac{H_*}{2\pi}\right)^2 N_A N^A\,. \tag{5.38}$$

De (5.38) et (5.37), et en utilisant (3.21), on retrouve par exemple le résultat un champ (3.88). Dans le cas multichamp, le résultat (5.38) offre une alternative à la résolution des équations de perturbations (4.41)-(4.42). La détermination analytique de la fonction N (et donc de ses dérivées) n'est cependant possible que dans des situations particulières, quand

12. Rappelons que nous considérons ici uniquement les scénarios qui suivent un attracteur dans l'espace des phases.

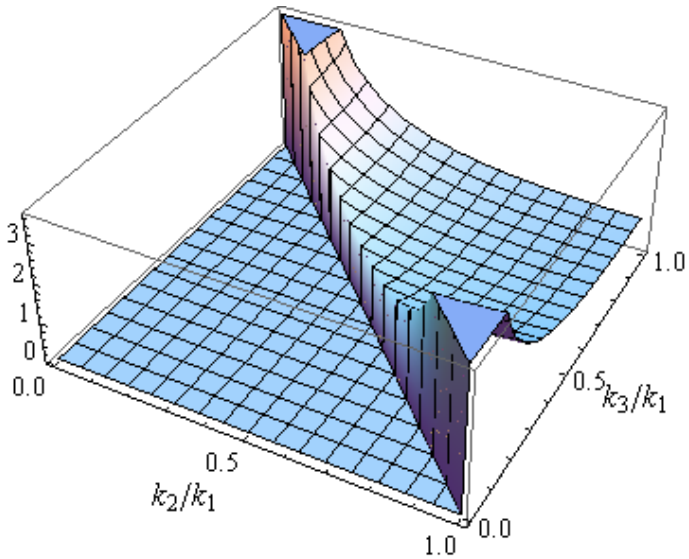

FIGURE 5.2 – Représentation graphique de la forme locale du bispectre (5.40). Figure extraite de [96].

le potentiel des champs est donné par la somme ou le produit de potentiels pour chacun des champs considérés par exemple [407, 107, 41, 365, 158, 84, 398]. Dans le cas général, on peut néanmoins déterminer les dérivées N_A (et celles d'ordre supérieur) numériquement [407]. Il suffit pour cela de résoudre les équations d'évolution de fond avec une grille suffisamment fine de conditions initiales sur les champs et d'approximer ensuite les dérivées par la méthode des différences finies [338].

Le bispectre

En utilisant l'équation (5.35) et en négligeant la partie quantique du bispectre (5.33), celui-ci prend la forme (5.3) avec [281]

$$f_{NL} = f_{NL}^{\rm loc} \equiv \frac{5}{6}\frac{N_A N_B N^{AB}}{(N_C N^C)^2} \,. \tag{5.39}$$

De manière équivalente, le profil S (5.4) s'écrit alors

$$S^{\rm loc} = \frac{3}{10} f_{NL}^{\rm loc} \left(\frac{k_1^2}{k_2 k_3} + 2 \text{ perm.} \right) \,, \tag{5.40}$$

où on a négligé la légère dépendance d'échelle du spectre primordial, $n_{\rm s} \approx 1$ [13]. Cette forme particulière de bispectre est appelée la forme *locale* du fait que, dans ce cas, la perturbation de courbure primordiale peut se mettre sous la forme

$$\zeta(x^i) = \zeta_G(x^i) + \frac{3}{5} f_{NL}^{\rm loc} \left(\zeta_G^2(x^i) - \langle \zeta_G^2 \rangle \right) \,, \tag{5.41}$$

13. Prendre en compte la dépendance d'échelle du spectre primordial mène naturellement à une dépendance d'échelle de la fonction f_{NL} (5.3) même dans le cas local. Ceci a été exploré en détail dans la référence [82].

ζ étant la somme de sa partie linéaire gaussienne ζ_G et d'une correction quadratique évaluée au *même* point. Notons que ceci est en accord avec l'approche univers-séparés (*c.f.* la sous-section 5.3.1) utilisée pour décrire l'univers sur des échelles plus grandes que celle du rayon de Hubble. Ces non-linéarités étant locales en espace réel, elles deviennent non-locales en espace de Fourier. Ceci est rendu explicite par la forme (5.40) qui diverge dans la limite resserrée $k_3 \ll k_1 = k_2$ comme $\sim (k_3/k_1)^{-1}$ (*c.f.* la figure 5.2). D'après l'expression (5.39) de $f_{NL}^{\rm loc}$, il est clair que ce type de non-gaussianités ne peut être important que si certaines des dérivées secondes N_{AB} sont grandes, autrement dit si l'évolution du nombre de e-folds local dépend fortement des valeurs des champs à la traversée de l'horizon. Ceci n'est pas le cas dans l'inflation à un champ (5.37). Mieux, un théorème [114] indique que, dans le cas un champ, le bispectre dans la limite resserrée est proportionnel à la déviation du spectre de l'invariance d'échelle [286, 114, 106] :

$$\lim_{k_3 \to 0} B_\zeta(k_1, k_2, k_3) = -(n_{\rm s} - 1) P_\zeta(k_1) P_\zeta(k_3) \,. \tag{5.42}$$

Le paramètre f_{NL} est donc d'ordre $\mathcal{O}(\epsilon)$ dans cette limite et est donc trop petit pour être observable. La détection de non-gaussianités locales, ou plus précisément d'un signal primordial non-gaussien dans la limite resserrée, exclurait donc tout modèle d'inflation basé sur un champ scalaire, et ce indépendamment de ses termes cinétiques ou de son potentiel ! [14]

Le trispectre

Dans la limite où on néglige les non-gaussianités intrinsèques aux champs, le trispectre (5.34) prend la forme

$$\begin{aligned} T_\zeta^{\rm loc}(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3, \mathbf{k}_4) &= \tau_{NL} \left[P_\zeta(k_{13}) P_\zeta(k_3) P_\zeta(k_4) + 11 \text{ perms} \right] \\ &+ \frac{54}{25} g_{NL} \left[P_\zeta(k_2) P_\zeta(k_3) P_\zeta(k_4) + 3 \text{ perms} \right] \end{aligned} \tag{5.43}$$

où

$$\tau_{NL} \equiv \frac{N_{AB} N^{AC} N^B N_C}{(N_D N^D)^3} \tag{5.44}$$

et

$$g_{NL} \equiv \frac{25}{54} \frac{N_{ABC} N^A N^B N^C}{(N_D N^D)^3} \tag{5.45}$$

désignent les deux paramètres nécessaires à caractériser les deux formes locales du trispectre [83]. Le profil $\mathcal{T}$ (5.8) correspondant s'écrit

$$\mathcal{T}^{\rm loc} = \frac{36}{25} \tau_{NL} T_{loc1} + g_{NL} T_{loc2} \,, \tag{5.46}$$

où

$$T_{loc1} = \frac{9}{50} \left(\frac{k_1^3 k_2^3}{k_{13}^3} + 11 \text{ perms} \right) \,, \tag{5.47}$$

$$T_{loc2} = \frac{27}{100} \sum_{i=1}^{4} k_i^3 \tag{5.48}$$

14. Ce théorème peut être étendu aux fonctions de corrélations d'ordre supérieur comme le trispectre [101, 366, 262] et dans ce cas à d'autres limites dans l'espace des impulsions [367].

dans la limite $n_s \approx 1$. D'après les expressions générales (5.39) et (5.44), on déduit de l'inégalité de Cauchy-Schwarz le résultat [397]

$$\tau_{NL} \geq \left(\frac{6}{5} f_{NL}^{\rm loc}\right)^2 \tag{5.49}$$

avec égalité si et seulement si le vecteur N_A est vecteur propre de la matrice N_{AB}. Notons enfin que de manière similaire au bispectre local, τ_{NL} et g_{NL} ne peuvent être importants que dans des modèles multichamps.

5.4 Le calcul quantique des non-gaussianités

Les non-gaussianités locales, qui se développent de manière classique hors du rayon de Hubble, ont ceci de particulier que leur dépendance géométrique en les vecteur d'ondes est en première approximation indépendante des modèles considérés (*c.f.* la sous-section 5.3.3), les non-linéarités ayant dans ce cas une origine très simple : le carré ou le cube d'une variable gaussienne n'est plus gaussien. Les bispectre (5.33) et trispectre (5.34) primordiaux reçoivent cependant également des contributions des non-gaussianités intrinsèques aux perturbations des champs à la traversée de l'horizon. Celles-ci dépendent fortement des modèles et la détermination de leur amplitude, aussi bien que de leur dépendance géométrique précise, requiert un calcul, quantique, pour chaque modèle ou classe de modèle considéré (voir [96, 225] pour des revues).

5.4.1 Le formalisme in-in

Suivant Weinberg [419], nous présentons maintenant le formalisme "in-in" [28, 205, 87, 194, 360], ou dit de Keldysh-Schwinger, utilisé pour calculer les fonctions de corrélations des perturbations cosmologiques au-delà de l'ordre linéaire. Contrairement à un calcul d'éléments de matrice S, on souhaite, en cosmologie, calculer la valeur moyenne d'un opérateur, $Q(t)$, produit de perturbations de champs $\delta\phi_a$ et de leur moments conjugués $\delta\pi_a$ – typiquement les perturbations de champs scalaires ou des perturbations de métrique – en général à des positions spatiales différentes, ou en espace de Fourier, pour des impulsions différentes, mais toutes évaluées au même temps t.

Pour étudier la dépendance temporelle de $Q(t)$, considérons l'Hamiltonien du système correspondant

$$H\left[\phi(t), \pi(t)\right] \equiv \int d^3x \mathcal{H}\left[\phi_a(\mathbf{x}, t), \pi_a(\mathbf{x}, t)\right] . \tag{5.50}$$

Les champs $\phi_a(\mathbf{x}, t)$ et leurs moments conjugués $\pi_a(\mathbf{x}, t)$ satisfont les relations de commutation canoniques

$$[\phi_a(\mathbf{x}, t), \pi_a(\mathbf{y}, t)] = i\delta_{ab}\delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}) , \tag{5.51}$$

$$[\phi_a(\mathbf{x}, t), \phi_b(\mathbf{y}, t)] = [\pi_a(\mathbf{x}, t), \pi_b(\mathbf{y}, t)] = 0 \tag{5.52}$$

et leur loi d'évolution est donnée par les équations de Hamilton

$$\dot{\phi}_a(\mathbf{x}, t) = i\left[H[\phi(t), \pi(t)], \phi_a(\mathbf{x}, t)\right] , \qquad \dot{\pi}_a(\mathbf{x}, t) = i\left[H[\phi(t), \pi(t)], \pi_a(\mathbf{x}, t)\right] . \tag{5.53}$$

Décomposons maintenant les opérateurs en leur partie homogène, $\bar{\phi}_a(\mathbf{x},t)$ et $\bar{\pi}_a(\mathbf{x},t)$, de purs nombres commutant avec tout opérateur, et leur perturbation $\delta\phi_a(\mathbf{x},t)$ et $\delta\pi_a(\mathbf{x},t)$

$$\phi_a(\mathbf{x},t) \equiv \bar{\phi}_a(\mathbf{x},t) + \delta\phi_a(\mathbf{x},t) \ , \quad \pi_a(\mathbf{x},t) \equiv \bar{\pi}_a(\mathbf{x},t) + \delta\pi_a(\mathbf{x},t) \ . \tag{5.54}$$

Alors que l'évolution de fond est déterminée par les équations classiques du mouvement

$$\dot{\bar{\phi}}_a(\mathbf{x},t) = \frac{\partial H}{\partial \bar{\pi}_a} \ , \quad \dot{\bar{\pi}}_a(\mathbf{x},t) = -\frac{\partial H}{\partial \bar{\phi}_a} \ , \tag{5.55}$$

comment évoluent les perturbations elles-mêmes ? Pour le déterminer, développons le Hamiltonien selon

$$\begin{aligned} H\left[\phi(t),\pi(t)\right] = H\left[\bar{\phi}(t),\bar{\pi}(t)\right] + \sum_a \int d^3x \frac{\partial H}{\partial \bar{\phi}_a(\mathbf{x},t)} \delta\phi_a(\mathbf{x},t) + \sum_a \int d^3x \frac{\partial H}{\partial \bar{\pi}_a(\mathbf{x},t)} \delta\pi_a(\mathbf{x},t) \\ + \tilde{H}\left[\delta\phi(t),\delta\pi(t);t\right] \end{aligned} \tag{5.56}$$

où $\tilde{H}$, qui regroupe les termes d'ordre quadratique et supérieur dans les perturbations, dépend explicitement du temps via l'évolution de fond. En utilisant les relations de commutations pour les perturbations

$$\begin{aligned} &[\delta\phi_a(\mathbf{x},t),\delta\pi_b(\mathbf{y},t)] = i\delta_{ab}\delta^3(\mathbf{x}-\mathbf{y}) \ , \\ &[\delta\phi_a(\mathbf{x},t),\delta\phi_b(\mathbf{y},t)] = [\delta\pi_a(\mathbf{x},t),\delta\pi_b(\mathbf{y},t)] = 0 \ , \end{aligned} \tag{5.57}$$

qui découlent de (5.51-5.52), ainsi que les relations (5.55) et (5.56), les équations d'évolution (5.53) prennent la forme

$$\delta\dot{\phi}_a(\mathbf{x},t) = i\left[\tilde{H}\left[\delta\phi(t),\delta\pi(t);t\right],\delta\phi_a(\mathbf{x},t)\right] \ , \quad \delta\dot{\pi}_a(\mathbf{x},t) = i\left[\tilde{H}\left[\delta\phi(t),\delta\pi(t);t\right],\delta\pi_a(\mathbf{x},t)\right] \ . \tag{5.58}$$

Autrement dit, l'évolution des perturbations est générée par le Hamiltonien $\tilde{H}$, auquel cas on vérifie que les solutions des équations (5.58) sont données par

$$\delta\phi_a(\mathbf{x},t) = U^{-1}(t,t_0)\delta\phi_a(\mathbf{x},t_0)U(t,t_0) \ , \quad \delta\pi_a(\mathbf{x},t) = U^{-1}(t,t_0)\delta\pi_a(\mathbf{x},t_0)U(t,t_0) \ , \tag{5.59}$$

où U est définie comme la solution de l'équation différentielle

$$\frac{d}{dt}U(t,t_0) = -i\tilde{H}\left[\delta\phi(t_0),\delta\pi(t_0);t\right]U(t,t_0) \tag{5.60}$$

satisfaisant la condition initiale

$$U(t_0,t_0) = 1 \tag{5.61}$$

et t_0 désigne un temps initial suffisamment reculé pour que toutes les longueurs d'ondes visées par le calcul soient largement sous l'horizon, en pratique, $t_0 = -\infty$.

Intéressés par l'évolution non-linéaire, séparons maintenant $\tilde{H}$ en sa partie quadratique dans les perturbations, H_0, et sa partie d'ordres supérieurs, incluant les interactions, H_{int} :

$$\tilde{H}\left[\delta\phi(t),\delta\pi(t);t\right] = H_0\left[\delta\phi(t),\delta\pi(t);t\right] + H_{\text{int}}\left[\delta\phi(t),\delta\pi(t);t\right] \ . \tag{5.62}$$

Introduisons également le schéma d'interaction, noté par un I : on y définit des opérateurs $\delta\phi_a^I(\mathbf{x},t)$ et $\delta\pi_a^I(\mathbf{x},t)$ dont la dépendance temporelle est générée par l'Hamiltonien de champ libre H_0

$$\delta\dot{\phi}_a^I(\mathbf{x},t) = i\left[H_0\left[\delta\phi^I(t),\delta\pi^I(t);t\right],\delta\phi_a^I(\mathbf{x},t)\right] \ , \quad \delta\dot{\pi}_a^I(\mathbf{x},t) = i\left[H_0\left[\delta\phi^I(t),\delta\pi^I(t);t\right],\delta\pi_a^I(\mathbf{x},t)\right] \tag{5.63}$$

et qui vérifient les conditions initiales

$$\delta\phi_a^I(\mathbf{x},t_0) = \delta\phi_a(\mathbf{x},t_0) \ , \quad \delta\pi_a^I(\mathbf{x},t_0) = \delta\pi_a(\mathbf{x},t_0) \, . \tag{5.64}$$

Les champs en schéma d'interaction coïncident donc avec ceux calculés à partir de l'action quadratique à la partie II. Ils peuvent s'exprimer comme

$$\delta\phi_a^I(\mathbf{x},t) = U_0^{-1}(t,t_0)\delta\phi_a(\mathbf{x},t_0)U_0(t,t_0) \ , \quad \delta\pi_a^I(\mathbf{x},t) = U_0^{-1}(t,t_0)\delta\pi_a(\mathbf{x},t_0)U_0(t,t_0) \tag{5.65}$$

où U_0 vérifie

$$\frac{d}{dt}U_0(t,t_0) = -iH_0\left[\delta\phi(t_0),\delta\pi(t_0);t\right]U_0(t,t_0) \tag{5.66}$$

et $U_0(t_0,t_0) = 1$. On peut donc réécrire l'opérateur $Q(t)$ sous la forme

$$\begin{aligned} Q\left[\delta\phi_a(\mathbf{x},t),\delta\pi_a(\mathbf{x},t)\right] &= U^{-1}(t,t_0)\ Q\left[\delta\phi_a(\mathbf{x},t_0),\delta\pi_a(\mathbf{x},t_0)\right]\ U(t,t_0) \\ &= F^{-1}(t,t_0)U_0^{-1}(t,t_0)\ Q\left[\delta\phi_a(\mathbf{x},t_0),\delta\pi_a(\mathbf{x},t_0)\right]\ U_0(t,t_0)F(t,t_0) \\ &= F^{-1}(t,t_0)\ Q\left[\delta\phi_a^I(\mathbf{x},t),\delta\pi_a^I(\mathbf{x},t)\right]\ F(t,t_0) \end{aligned} \tag{5.67}$$

où

$$F(t,t_0) \equiv U_0^{-1}(t,t_0)U(t,t_0) \ . \tag{5.68}$$

En utilisant les relations (5.60), (5.66) et (5.62), on vérifie que F satisfait l'équation d'évolution

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}F(t,t_0) &= -\,iU_0^{-1}(t,t_0)H_{\text{int}}\left[\delta\phi(t_0),\delta\pi(t_0);t\right]U_0(t,t_0)\ F(t,t_0) \\ &= -\,iH_{\text{int}}\left[\delta\phi^I(t),\delta\pi^I(t);t\right]\ F(t,t_0) \\ &\equiv -\,iH_I(t)F(t,t_0) \ , \end{aligned} \tag{5.69}$$

et la condition initiale $F(t_0,t_0) = 1$. La solution correspondante peut se mettre sous la forme compacte

$$F(t,t_0) = T\exp\left(-i\int_{t_0}^{t}H_I(t')dt'\right) \tag{5.70}$$

où T désigne le produit ordonné en temps, c'est-à-dire que les produits de H_I dans le développement en série de Taylor de l'exponentielle sont écrits de droite à gauche dans l'ordre chronologique [330]. On obtient donc

$$\begin{aligned} \langle Q(t)\rangle &= \langle F^{-1}(t,t_0)Q^I(t)F(t,t_0)\rangle \\ &= \langle\left[\bar{T}\exp\left(i\int_{t_0}^{t}H_I(t')dt'\right)\right]\ Q^I(t)\ \left[T\exp\left(-i\int_{t_0}^{t}H_I(t'')dt''\right)\right]\rangle \end{aligned} \tag{5.71}$$

où $\bar{T}$ désigne le produit anti-ordonné en temps et tous les opérateurs sont exprimés en fonction des variables en schéma d'interaction, *i.e.*

$$H_I(t) \equiv H_{\rm int}\left[\delta\phi^I(t), \delta\pi^I(t); t\right] \ , \tag{5.72}$$

$$Q^I(t) \equiv Q\left[\delta\phi^I_a(\mathbf{x},t), \delta\pi^I_a(\mathbf{x},t)\right] \ . \tag{5.73}$$

On souhaite enfin calculer la valeur moyenne des opérateurs dans l'état du vide de la théorie interactive, pas l'état du vide de la théorie libre. On sait pour cela qu'il suffit de déformer les contours d'intégration dans le plan complexe des intégrales temporelles de manière à rendre celles-ci convergentes à l'infini passé [15] [330, 415]. Avec ceci en tête, nous pouvons finalement écrire

$$\langle Q(t)\rangle = \langle 0|\left[\bar{T}\exp\left(i\int_{-\infty}^{t} H_I(t')dt'\right)\right] \ Q^I(t) \ \left[T\exp\left(-i\int_{-\infty}^{t} H_I(t'')dt''\right)\right]|0\rangle \ . \tag{5.74}$$

5.4.2 Développement perturbatif

Le développement du résultat (5.74) en puissance de l'Hamiltonien d'interaction H_I donne :

– à l'ordre zéro

$$\langle Q(t)\rangle^{(0)} = \langle 0|Q^I(t)|0\rangle \, . \tag{5.75}$$

– au premier ordre

$$\langle Q(t)\rangle^{(1)} = 2\,{\rm Re}\left[-i\int_{-\infty}^{t} {\rm d}t' \langle 0|Q^I(t)H_I(t')|0\rangle\right] \ . \tag{5.76}$$

– au second ordre

$$\begin{aligned}\langle Q(t)\rangle^{(2)} \quad = \quad & -2\,{\rm Re}\left[\int_{-\infty}^{t} {\rm d}t' \int_{-\infty}^{t'} {\rm d}t'' \langle 0|Q^I(t)H_I(t')H_I(t'')|0\rangle\right] \\ & + \int_{-\infty}^{t} {\rm d}t' \int_{-\infty}^{t} {\rm d}t'' \langle 0|H_I(t')Q^I(t)H_I(t'')|0\rangle \end{aligned} \tag{5.77}$$

(voir [104] pour des formules générales à un ordre quelconque). L'évaluation de ces termes se fait ensuite de manière standard en effectuant les contractions des divers champs suivant le théorème de Wick (rappelons que tous les champs sont en schéma d'interaction). Dans le cadre de cette thèse, nous avons travaillé au premier ordre dans l'Hamiltonien d'interaction. Le calcul complet du trispectre quantique nécessite cependant d'utiliser le résultat au second ordre (5.77). Il peut alors être utile d'avoir recours à des diagrammes de Feynman afin d'organiser les calculs [99, 22, 367]. Notons enfin que le développement perturbatif de l'équation (5.74) peut s'écrire d'au moins deux façons. Nous avons donné plus haut la forme dite factorisée mais il peut parfois être plus avantageux d'utiliser la forme, dite

15. Le choix précis des contours d'intégration dépend du choix du vide aussi bien que de la mise en pratique du développement perturbatif (*c.f.* la sous-section suivante), en particulier au second ordre dans l'Hamiltonien d'interaction (voir par exemple la note de bas de page 1 page 18 dans la référence [104].

commutateur, dans laquelle le résultat au n-ième ordre s'écrit, en utilisant l'hermiticité des opérateurs,

$$\langle Q(t)\rangle^{(n)} = i^n \int_{t_0}^{t} dt_1 \int_{t_1}^{t} dt_2 \cdots \int_{t_{n-1}}^{t} dt_n \, \langle 0| \left[H_I(t_1), \left[H_I(t_2), \cdots, \left[H_I(t_n), Q^I(t)\right] \cdots\right]\right] |0\rangle \ . \tag{5.78}$$

Les mérites respectifs des deux formes quant au calcul explicite des intégrales sont discutés en détail dans les références [104, 99]. La forme factorisée est particulièrement utile pour accomplir la régularisation ultraviolette ($\tau \to -\infty$) des intégrales tandis que la forme commutateur est plus appropriée pour évaluer leur comportement tardif. Pour cette raison, Chen et Wang ont proposé d'utiliser une forme mixte, en particulier au niveau numérique [104]. Dans la suite, nous n'aurons qu'à utiliser le résultat simple (5.76).

5.4.3 L'exemple de la k-inflation

Nous illustrons maintenant la procédure décrite plus haut en calculant la fonction de corrélation à trois points de la perturbation du champ scalaire ϕ dans la k-inflation de Lagrangien générique $P(X, \phi)$ (*c.f.* la section 3.4). Étant donné que les non-gaussianités primordiales sont négligeables dans le cas canonique (*c.f.* la sous-section 5.2.3), nous nous concentrons plus particulièrement sur celles provenant des termes cinétiques non-standard et développons par conséquent le Lagrangien P au troisième ordre dans la fluctuation du champ en ignorant les dérivées de P par rapport à l'inflaton ϕ [11, 171]. Ceci revient à négliger les contributions de la gravité et à prendre la limite d'une shift-symétrie exacte en terme de l'inflaton. Un calcul exact, suivant la démarche exposée à la sous-section 3.3.2, est tout à fait possible [100] et aboutit aux mêmes conclusions dans la limite de variation lente.

Écrivant donc $\phi(t, x^i) = \bar{\phi}(t) + Q(t, x^i)$, le Lagrangien d'ordre cubique dans les perturbations s'écrit

$$\mathcal{L}_{(3)} = a^3 \left(\frac{1}{2} P_{,XX} \dot{\phi} + \frac{1}{6} P_{,XXX} \dot{\phi}^3\right) \dot{Q}^3 - \frac{a}{2} P_{,XX} \, \dot{\phi} \, \dot{Q} (\nabla Q)^2 \tag{5.79}$$

où nous omettons la barre sur la partie non-perturbée du champ sans risque de confusion. L'Hamiltonien d'interaction nécessaire au calcul des fonctions de corrélations au-delà de l'ordre linéaire s'en déduit, en particulier sa partie cubique $H_{(3)} = -\int \mathrm{d}^3x \, \mathcal{L}_{(3)}$. En plus de la vitesse du son c_s^2 (3.110), il est courant d'introduire les combinaisons suivantes des dérivées de P [364] :

$$\Sigma \equiv X P_{,X} + 2X^2 P_{,XX} = \frac{H^2 \epsilon}{c_s^2} \ , \tag{5.80}$$

$$\lambda \equiv X^2 P_{,XX} + \frac{2}{3} X^3 P_{,XXX} \ , \tag{5.81}$$

avec lequel l'Hamiltonien d'interaction cubique s'écrit

$$\begin{aligned} H_{(3)} &= -\int \mathrm{d}^3x \, a^3 \left[\frac{2\lambda}{\dot{\phi}^3} \dot{Q}^3 - \frac{P_{,X}}{2\dot{\phi}} \left(\frac{1}{c_s^2} - 1\right) \dot{Q} \frac{(\nabla Q)^2}{a^2}\right] \\ &= -a^3 \int \frac{\mathrm{d}^3\mathbf{k}_1}{(2\pi)^3} \int \frac{\mathrm{d}^3\mathbf{k}_2}{(2\pi)^3} \int \frac{\mathrm{d}^3\mathbf{k}_3}{(2\pi)^3} \left\{ \frac{2\lambda}{\dot{\phi}^3} \dot{Q}_{\mathbf{k}_1} \dot{Q}_{\mathbf{k}_2} \dot{Q}_{\mathbf{k}_3} \right. \end{aligned}$$

$$+ \quad \frac{P_{,X}}{2\dot{\phi}}\left(\frac{1}{c_s^2}-1\right)\dot{Q}_{\mathbf{k}_1}\frac{\mathbf{k}_2\cdot\mathbf{k}_3}{a^2}Q_{\mathbf{k}_2}Q_{\mathbf{k}_3}\Bigg\}(2\pi)^3\delta(\mathbf{k_1}+\mathbf{k_2}+\mathbf{k_3}) \tag{5.82}$$

et où nous sommes passés en espace de Fourier à la deuxième ligne. D'après le résultat (5.76), il suffit ensuite, pour déterminer à l'ordre dominant le bispectre de la perturbation du champ, de calculer l'intégrale

$$\langle Q_{\mathbf{k}_1}(\tau)Q_{\mathbf{k}_2}(\tau)Q_{\mathbf{k}_3}(\tau)\rangle = -i\int_{-\infty}^{\tau}\mathrm{d}\tau'\,a(\tau')\langle 0|Q_{\mathbf{k}_1}(\tau)Q_{\mathbf{k}_2}(\tau)Q_{\mathbf{k}_3}(\tau)H_{(3)}(\tau')|0\rangle + \text{c.c.} \tag{5.83}$$

où tous les opérateurs dans le membre de droite sont dans le schéma d'interaction (on omet la notation I par simplicité), *i.e.* sont des opérateurs de champs libres tels que

$$Q_{\mathbf{k}}(\tau) = Q_k(\tau)\hat{a}_{\mathbf{k}} + Q^*_{-k}(\tau)\hat{a}^\dagger_{-\mathbf{k}}\,, \tag{5.84}$$

où

$$Q_k(\tau) \approx \frac{iH}{\sqrt{2k^3P_{,X}c_s}}(1+ikc_s\tau)e^{-ikc_s\tau}\,, \qquad Q'_k(\tau) \approx \frac{iH}{\sqrt{2k^3P_{,X}c_s}}(kc_s)^2\tau e^{-ikc_s\tau} \tag{5.85}$$

dans le régime de variation lente d'après les équations (3.111), (3.117) et (3.10). La fonction libre à deux points s'écrit alors

$$\langle 0|Q_{\mathbf{k}_1}(\tau_1)Q_{\mathbf{k}_2}(\tau_2)|0\rangle = (2\pi)^3\delta(\mathbf{k_1}+\mathbf{k_2})Q_{k_1}(\tau_1)Q^*_{k_2}(\tau_2)\,. \tag{5.86}$$

En appliquant le théorème de Wick, la contribution à l'intégrale (5.83) du premier terme de l'Hamiltonien (5.82), en $\dot{Q}^3$, s'écrit donc

$$6i(2\pi)^3\delta(\sum_{\mathbf{i}}\mathbf{k_i})\,Q_{k_1}(\tau)Q_{k_2}(\tau)Q_{k_3}(\tau)\int_{-\infty}^{\tau}\mathrm{d}\tau'\,a(\tau')\left(\frac{2\lambda}{\dot{\phi}^3}\right)(\tau')Q^{*'}_{k_1}(\tau')Q^{*'}_{k_2}(\tau')Q^{*'}_{k_3}(\tau') + \text{c.c.} \tag{5.87}$$

où le facteur 6 vient des différentes permutations. Un fait général quant aux intégrales à calculer dans le formalisme in-in est que les oscillations rapides des perturbations sous l'horizon ($|kc_s\tau| \gg 1$) impliquent que la contribution de cette période est nulle [16]. Comme on souhaite évaluer les fonctions de corrélations à un temps τ peu de temps après la traversée de l'horizon, on en déduit que la contribution dominante aux intégrales provient de la période de traversée de l'horizon [419]. On peut donc sortir de l'intégrale les paramètres lentement variable en les évaluant à cette époque et extrapoler le domaine d'intégration jusqu'à $\tau = 0$. La contribution (5.87) devient alors

$$-\,i(2\pi)^3\delta(\sum_{\mathbf{i}}\mathbf{k_i})\,\frac{3\lambda H^5c_s^3}{2\dot{\phi}^3P_{,X}^3}\frac{1}{k_1k_2k_3}\int_{-\infty}^{0}\mathrm{d}\tau\,\tau^2e^{iKc_s\tau} + \text{c.c.} \tag{5.88}$$

où toutes les quantités sont évaluées à l'époque de la traversée de l'horizon (y compris c_s dans l'intégrale) et $K = k_1+k_2+k_3$. Avec $\int_{-\infty}^{0}\mathrm{d}\tau\,\tau^2e^{iKc_s\tau} = \frac{2i}{(Kc_s)^3}$ (en déformant le contour d'intégration dans le plan complexe $-\infty \to -\infty(1-i\epsilon)$), on obtient

$$\langle Q_{\mathbf{k}_1}(\tau_*)Q_{\mathbf{k}_2}(\tau_*)Q_{\mathbf{k}_3}(\tau_*)\rangle_{\dot{Q}^3} = (2\pi)^3\delta(\sum_{\mathbf{i}}\mathbf{k_i})\,\frac{6\lambda H^5}{\dot{\phi}^3P_{,X}^3}\frac{1}{k_1k_2k_3K^3} \tag{5.89}$$

16. Il faut en général vérifier que les constantes de couplage, ici $\frac{2\lambda}{\dot{\phi}^3}$, n'entrent pas en résonance avec les oscillations des champs ou ne présentent pas de fortes variations (voir la sous-section 5.5.3).

ou encore, en utilisant qu'à l'ordre le plus bas, $\zeta = -\frac{H}{\dot\phi}Q$ (cela revient à ne considérer que le premier terme du membre de droite dans l'équation (5.33)),

$$B_\zeta(k_1,k_2,k_3)_{\dot Q^3} = -\frac{6\lambda H^8}{\dot\phi^6 P_{,X}^3}\frac{1}{k_1k_2k_3K^3}\,. \tag{5.90}$$

Avec l'amplitude du spectre $A_s = H^4/(4\pi^2 c_s P_{,X}\dot\phi^2)$ (*c.f.* les équations (3.118) et (3.109)), on obtient la contribution du vertex en $\dot Q^3$ au profil S du bispectre (5.4)

$$S_{\dot Q^3} = -\frac{3\lambda}{\Sigma}\frac{k_1k_2k_3}{K^3}\,. \tag{5.91}$$

En suivant la même démarche, le deuxième vertex dans l'Hamiltonien cubique, en $\dot Q(\nabla Q)^2$, contribue au bispectre selon

$$B_\zeta(k_1,k_2,k_3)_{\dot Q(\nabla Q)^2} = i\frac{H^8}{8\dot\phi^4 P_{,X}^2 c_s}\left(\frac{1}{c_s^2}-1\right)\times$$
$$\left[\frac{\mathbf{k}_2\cdot\mathbf{k}_3}{k_1k_2^3k_3^3}\int_{-\infty}^0 \mathrm{d}\tau\, e^{iKc_s\tau}(1-ik_2c_s\tau)(1-ik_3c_s\tau)+\text{perm.}\right]+\text{c.c.} \tag{5.92}$$

où perm. indique les deux perturbations inéquivalentes des trois vecteurs d'ondes. Avec $\int_{-\infty}^0 \mathrm{d}\tau\, e^{iKc_s\tau} = -\frac{i}{Kc_s}$ et $\int_{-\infty}^0 \mathrm{d}\tau\,\tau e^{iKc_s\tau} = \frac{1}{(Kc_s)^2}$, on trouve donc la contribution au profil S

$$S_{\dot Q(\nabla Q)^2} = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{c_s^2}-1\right)\left[\frac{k_1}{k_2k_3}\mathbf{k}_2\cdot\mathbf{k}_3\left(\frac{1}{K}+\frac{k_2+k_3}{K^2}+\frac{2k_2k_3}{K^3}\right)+\text{perm.}\right]$$
$$= \left(\frac{1}{c_s^2}-1\right)\left\{\frac{3k_1k_2k_3}{2K^3}+\frac{1}{k_1k_2k_3}\left(-\frac{1}{K}\sum_{i>j}k_i^2k_j^2+\frac{1}{2K^2}\sum_{i\neq j}k_i^2k_j^3+\frac{1}{8}\sum_i k_i^3\right)\right\} \tag{5.93}$$

où la deuxième ligne résulte d'un simple calcul algébrique. Regroupant les deux résultats (5.91) et (5.93) et réorganisant [17], on peut distinguer deux contributions au profil S :

$$S_\lambda = \left(\frac{1}{c_s^2}-1-\frac{2\lambda}{\Sigma}\right)\frac{3k_1k_2k_3}{2K^3}\,, \tag{5.94}$$

$$S_c = \left(\frac{1}{c_s^2}-1\right)\left(-\frac{1}{K}\sum_{i>j}k_i^2k_j^2+\frac{1}{2K^2}\sum_{i\neq j}k_i^2k_j^3+\frac{1}{8}\sum_i k_i^3\right)\frac{1}{k_1k_2k_3}\,, \tag{5.95}$$

dont les amplitudes, caractérisées pour chaque forme par le nombre f_{NL} tel que

$$S(k_1,k_2,k_3) \xrightarrow[\text{limite}]{k_1=k_2=k_3} \frac{9}{10}f_{NL} \tag{5.96}$$

(ceci est cohérent avec (5.3)), sont données par

$$f_{NL}^\lambda = \frac{5}{81}\left(\frac{1}{c_s^2}-1-\frac{2\lambda}{\Sigma}\right)\,, \tag{5.97}$$

$$f_{NL}^c = -\frac{35}{108}\left(\frac{1}{c_s^2}-1\right)\,. \tag{5.98}$$

17. Une motivation pour ce réagencement est que le paramètre $1/c_s^2-1-2\lambda/\Sigma$ déterminant l'amplitude de S_λ est identiquement nul dans le cas de l'inflation Dirac-Born-Infeld (voir le chapitre 7).

Le calcul complet [100] incluant le couplage à la gravité et la dépendance du Lagrangien en l'inflaton montre qu'on peut en fait décomposer le profil S selon six contributions

$$S = S_\lambda + S_c + S_o + S_\epsilon + S_\eta + S_s \tag{5.99}$$

où S_λ et S_c sont données en (5.94) et (5.95), les ordres de grandeur des autres profils étant donnés par

$$\begin{aligned} f_{NL}^{o} &= \mathcal{O}\left(\frac{\epsilon}{c_s^2}\,,\ \frac{\epsilon\lambda}{\Sigma}\right)\,, \\ f_{NL}^{\epsilon,\eta,s} &= \mathcal{O}(\epsilon,\eta,s) \end{aligned} \tag{5.100}$$

(les profils détaillés peuvent être trouvés dans la référence [100]). Leur contribution est donc négligeable dans la limite de variation lente. Les non-gaussianités associées aux termes cinétiques non-standard – les deux formes S_λ et S_c – sont elles importantes dans les limites $c_s \ll 1$ ou/et $\lambda/\Sigma \gg 1$. Dans le cas d'un Lagrangien canonique $P = X - V$ enfin, $c_s = 1$ et $\lambda = 0$ identiquement et on peut montrer qu'on retrouve alors le résultat de Maldacena [286]

$$\begin{aligned} S_{\text{Maldacena}} = \frac{\epsilon}{8}\left[-\left(\frac{k_1^2}{k_2k_3} + 2\text{ perm.}\right) + \left(\frac{k_1}{k_2} + 5\text{ perm.}\right) + \frac{8}{K}\left(\frac{k_1k_2}{k_3} + 2\text{ perm.}\right)\right] \\ + \frac{\eta}{8}\left(\frac{k_1^2}{k_2k_3} + 2\text{ perm.}\right)\,. \end{aligned} \tag{5.101}$$

Dans la suite de cette sous-section, nous nous concentrons sur la limite où les termes cinétiques non-standard sont importants et étudions les deux formes dominantes S_λ et S_c, représentées aux figures 5.3 et 5.4. On y voit que les deux formes sont similaires. En

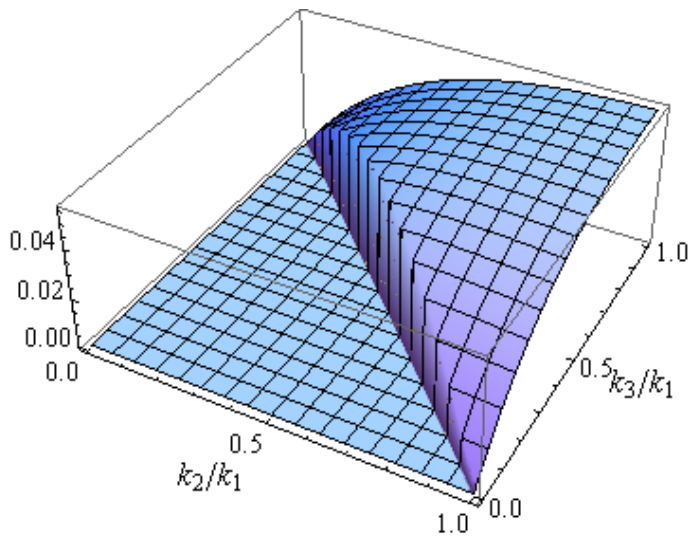

FIGURE 5.3 – La forme de S_λ (5.94). Figure extraite de [96].

particulier, elles s'annulent comme $S \sim k_3/k_1$ dans la limite resserrée $k_3 \ll k_1 = k_2$ tandis

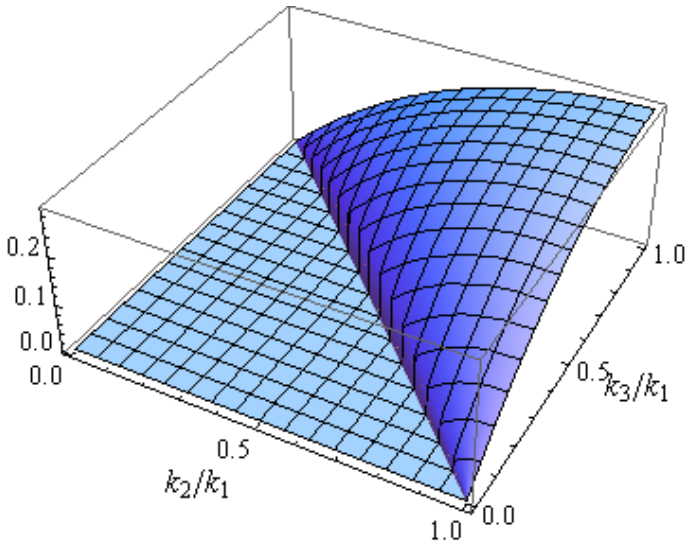

FIGURE 5.4 – La forme de S_c (5.95). Figure extraite de [96].

que leur amplitude est maximale dans la limite équilatérale $k_1 = k_2 = k_3$. Elles constituent les formes dites *équilatérales*. Elles présentent de petites différences, notamment autour de la limite aplatie $k_2 + k_3 = k_1$ mais la corrélation entre les deux est malgré tout très importante [145]

$$C(S_\lambda, S_c) = 0,98 \ , \tag{5.102}$$

ce qui implique qu'on peut difficilement les distinguer observationnellement. De plus, comme leur expression analytique est complexe, un ansatz séparable – c'est à dire exprimable comme la somme de produits de fonctions de chacun des vecteur d'onde séparément – pour les formes équilatérales a été introduit [111] pour simplifier l'analyse des données (voir le chapitre 9) :

$$S_{\rm eq} = \frac{9}{10} f_{NL}^{\rm eq} \left[-\left(\frac{k_1^2}{k_2 k_3} + 2 \text{ perm.} \right) + \left(\frac{k_1}{k_2} + 5 \text{ perm.} \right) - 2 \right] \ . \tag{5.103}$$

Celui-ci est représenté à la figure 5.5. On voit clairement que les caractéristiques principales des formes 5.3 et 5.4 y sont reproduites, ce qui est quantifié par les corrélations importantes [145]

$$C(S_{\rm eq}, S_\lambda) = 0,95 \, , \qquad C(S_{\rm eq}, S_c) = 0,99 \, . \tag{5.104}$$

La forme des non-gaussianités équilatérales est directement reliée à leur mécanisme de genèse. En effet, on a vu que dans l'inflation un champ, de grandes non-gaussianités ne peuvent être générées hors de l'horizon. On a vu également que, dans le régime de variation lente et si l'évolution de fond ne présente pas de caractère oscillant, les oscillations rapides des perturbations sous l'horizon ont un effet destructif. La seule possibilité pour générer de grandes non-gaussianités dans ce cas est donc via des interactions actives à la traversée de l'horizon. Le bispectre correspondant est alors maximum quand les trois perturbations

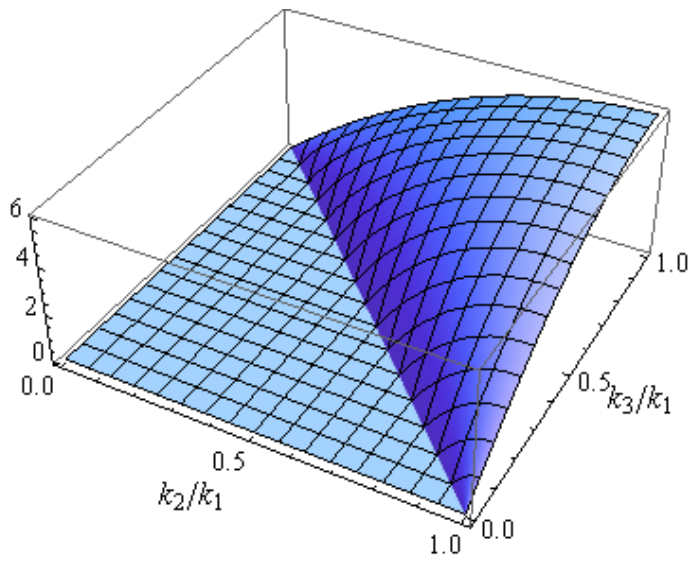

FIGURE 5.5 – La forme de l'ansatz équilatéral $S_{\rm eq}$ (5.103). Figure extraite de [96].

dont on calcule la corrélation traversent l'horizon à la même époque, c'est-à-dire quand $k_1 \simeq k_2 \simeq k_3$, autrement dit dans la limite équilatérale. Le même raisonnement indique que le trispectre, dans l'inflation à un champ, ne peut être important que dans la limite où toutes les normes des vecteurs d'ondes sont semblables $k_1 \simeq k_2 \simeq k_3 \simeq k_4$. Ceci peut être rendu explicite par le calcul détaillé du trispectre généré par la k-inflation dans la limite où les non-gaussianités générées par les termes cinétiques non-standard dominent [99, 22] (voir également [101, 365, 366, 367]). Nous ne reproduisons pas ici ce calcul plus complexe et plus long que celui du bispectre. Notons cependant deux subtilités qui n'ont été prises en compte correctement que récemment. L'Hamiltonien d'interaction à l'ordre quartique $H_{(4)}$ est en général différent de $-\int \mathrm{d}^3x\, \mathcal{L}_{(4)}$ [5] (voir l'appendice C de la référence [156] par exemple pour un calcul détaillé). Enfin, le trispectre est la somme du terme de contact (5.76) faisant intervenir l'Hamiltonien quartique et du terme d'échange (5.77) faisant intervenir l'Hamiltonien cubique [367, 99, 22].

5.5 Les grandes classes de modèles et leurs signatures non-gaussiennes

Nous avons énuméré à la sous-section 5.2.3 des conditions susceptibles de générer d'importantes non-gaussianités primordiales (la liste n'est pas exhaustive). Nous nous sommes jusqu'ici particulièrement penchés sur le cas des non-gaussianités générées hors de l'horizon par des effets multichamps (sous-section 5.3.3) et sur les effets de termes cinétiques non-standard dans le cas à un champ (sous-section 5.4.3). Dans cette section, nous indiquons les signatures non-gaussiennes associées à d'autres types d'interaction, donnons des exemples de modèles correspondants et indiquons les contraintes observationnelles existantes, pour le bispectre principalement mais également pour le trispectre. On peut se référer utilement

à la revue récente [96] pour plus de détails. Les contraintes observationnelles rapportées sont toujours données avec un niveau de confiance de 95 %.

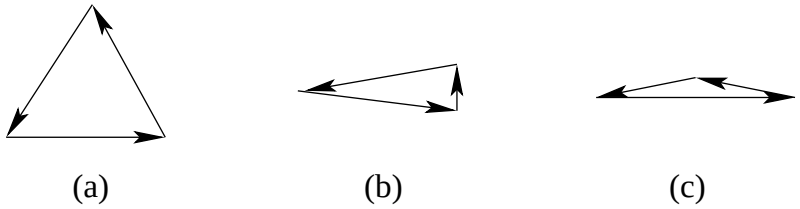

FIGURE 5.6 – Trois formes différentes de bispectre : (a) équilatérale (sous-section 5.5.2), (b) resserrée (sous-section 5.5.1) et (c) aplatie (sous-section 5.5.4).

5.5.1 Forme locale et effets multichamps

La présence de plusieurs champs scalaires légers pendant l'inflation ouvre la possibilité d'une variation temporelle de la perturbation de courbure ζ hors de l'horizon comme on peut le comprendre intuitivement avec le formalisme δN : aux grandes échelles, on peut identifier la perturbation de courbure comme la fluctuation du nombre de e-fold d'expansion locale et considérer l'univers comme une juxtaposition d'univers séparés évoluant indépendamment les uns des autres, ceci avec des conditions initiales héritées des fluctuations quantiques des champs scalaires sous l'horizon. Dans le cas à un champ, l'univers suit la même histoire en tout point de l'espace, à un décalage temporel initial près, et ζ est constant. Dans le cas multichamp, les histoires d'univers peuvent être différentes spatialement et ζ est en général dépendant du temps. Or, cette évolution classique, locale, peut être fortement non-linéaire, nourrissant alors des non-gaussianités importantes, locales en espace réel, et donc non-locales en espace de Fourier (5.40) (voir [411] pour une revue récente).

Pendant l'inflation par exemple, décomposant les perturbations en un mode adiabatique et des modes entropiques instantanés, respectivement parallèle et perpendiculaires à la trajectoire de fond dans l'espace des champs (*c.f.* la sous-section 4.2.3), les directions entropiques ne sont pas soumises aux conditions de roulement lent. Les champs entropiques peuvent donc avoir d'importantes non-linéarités dans leur potentiel, qu'elles peuvent transmettre, de manière également non-linéaire, à la perturbation de courbure [62, 61, 57, 56] (voir [79, 80] pour des études approfondies sur les conditions nécessaires pour générer d'importantes non-gaussianités par ce mécanisme et [78, 55] pour des revues récentes). Plus généralement, le transfert hors de l'horizon de non-linéarités de champs auxiliaires vers la perturbation de courbure peut générer d'importantes non-gaussianités locales à la fin de l'inflation et pendant la phase de réchauffement [62, 132, 215, 430, 60, 277, 351, 8, 57, 131, 9, 354] ou même pendant l'ère de radiation dans le scénario du curvaton [37, 288, 357, 245]. Notons que les non-gaussianités générées dans les scénarios ekpyrotiques, résultant d'un processus non-linéaire hors de l'horizon (*c.f* la section 6.3), sont également de forme locale.

La détection de non-gaussianités locales dans les données du CMB a été annoncée au début de cette thèse [429, 193] mais, après analyse par la communauté cosmologique, le consensus est qu'il ne s'agit que de traces de non-gaussianités locales, et non d'une détection non ambiguë. Les contraintes actuelles apportées par différentes observations

sur l'amplitude $f_{NL}^{\rm loc}$ (5.40) du bispectre local sont $-10 < f_{NL}^{\rm loc} < 74$ [222] dans le cas du CMB et $-29 < f_{NL}^{\rm loc} < 70$ [380] dans le cas des relevés de galaxies (SDSS) tandis que la combinaison des deux donne $-5 < f_{NL}^{\rm loc} < 59$ [222]. Le trispectre local (5.43) est également maintenant contraint. À partir du CMB, les mesures du trispectre angulaire donnent $-3.2 < \tau_{NL}/10^5 < 3.3$ et $-3.80 < g_{NL}/10^6 < 3.88$ [381] tandis que d'autres méthodes donnent $-5.6 < g_{NL}/10^5 < 6.4$ [408] et que la contrainte apportée par les relevés de galaxies est $-3.5 < g_{NL}/10^5 < 8.2$ [120].

5.5.2 Formes équilatérale et "orthogonale" et termes cinétiques non-standard

Dans l'inflation un champ avec des conditions initiales standard et sans irrégularités ou périodicité dans l'évolution de fond, la seule possibilité pour générer d'importantes non-gaussianités primordiales est via des interactions entre modes de Fourier qui traversent l'horizon à la même époque, résultant en des non-gaussianités dites équilatérales, ainsi nommées d'après la configuration de triangle pour laquelle le bispectre est maximal. On trouve par exemple ce type d'interactions dans les modèles présentant des termes cinétiques non-standard, comme celui d'inflation fantôme [16] ou ceux de k-inflation, en particulier dans la limite où la vitesse du son c_s est significativement inférieure à la vitesse de la lumière (5.97)-(5.98). Le bispectre dans ces théories est dominé par les deux formes (5.94) et (5.95) qui sont très similaires et qui ont été, pour cette raison, représentées jusqu'à récemment dans l'analyse des données par un ansatz commun, dit équilatéral (5.103). L'amplitude correspondante $f_{NL}^{\rm eq}$ est actuellement soumise aux contraintes observationnelles $-214 < f_{NL}^{\rm eq} < 266$ [222].

On peut cependant utiliser les légères différences entre les formes S_λ (5.94) et S_c (5.95) pour former une combinaison linéaire des deux orthogonale à S_c par exemple [373]. Un ansatz factorisable correspondant est alors donné par [373]

$$S_{\rm orth} = \frac{27}{10} f_{NL}^{\rm orth} \left[-\left(\frac{k_1^2}{k_2 k_3} + 2 \text{ perm.} \right) + \left(\frac{k_1}{k_2} + 5 \text{ perm.} \right) - \frac{8}{3} \right] \tag{5.105}$$

dont on peut trouver une représentation graphique à la figure 5.7. On y voit que le signal est important dans la limite équilatérale et dans la limite aplatie $k_2 + k_3 = k_1$, sans surprise car c'est dans cette région que les différences entre S_λ et S_c sont les plus importantes. $S_{\rm orth}$ est également de signe opposé dans ces deux régions afin d'assurer son orthogonalité avec S_c, partout positif.

Notons que la motivation pour considérer la forme orthogonale, résultant d'une soustraction fine des différences entre les deux formes génériques de la k-inflation, est moins une origine physique bien définie qu'une volonté d'utiliser pleinement les données et d'explorer tout l'espace des paramètres disponibles.

La contrainte apportée par le CMB sur l'ansatz orthogonal est $-410 < f_{NL}^{\rm orth} < 6$ [222].

5.5.3 Dépendances d'échelle sinusoïdale et "résonante" et irrégularités

On peut considérer l'effet d'une violation temporaire des conditions de variation lente, causée par des irrégularités dans le potentiel inflationnaire ou plus généralement dans les paramètres du Lagrangien de k-inflation. Ces modèles ont été proposés pour expliquer les

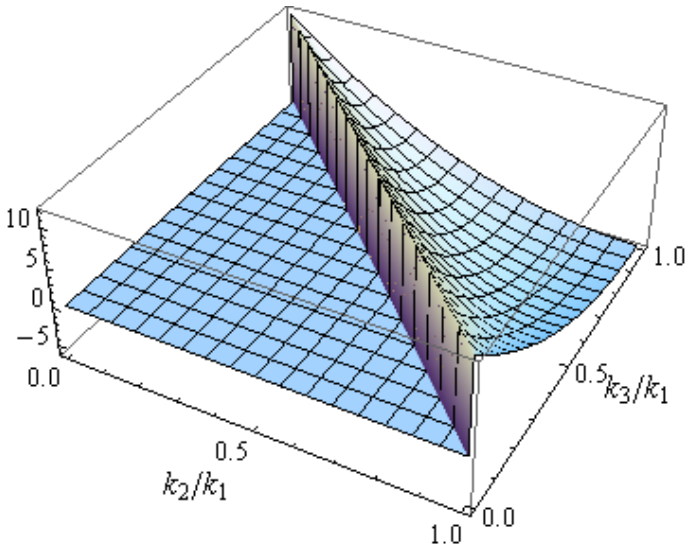

FIGURE 5.7 – La forme de $-S_{\rm orth}$ (5.105). Figure extraite de [96].

anomalies par rapport au modèle de concordance observées dans le spectre de puissance du CMB [3, 176, 195]. Il existe également des modèles d'inflation branaire (*c.f.* la partie IV) dans lesquels des irrégularités de ce type sont présentes et ont des effets observables [51]. De manière similaire au spectre de puissance, de brusques irrégularités dans l'évolution de fond de l'inflaton donnent un comportement oscillant au bispectre. Autrement dit, sa propriété caractéristique n'est pas alors sa forme mais sa dépendance d'échelle. Une façon simple de le voir est la suivante : approximons l'évolution des constantes de couplage irrégulières, typiquement la dérivée du paramètre η, par des fonctions delta. Le bispectre, résultant de l'intégration du produit de ces constantes de couplage par les modes oscillants selon $\sim e^{-iK\tau}$, contient donc des facteurs du type $\sim \sin(K/k_*)$ où $k_* \equiv -1/\tau_*$ est l'échelle traversant l'horizon au moment de l'irrégularité. Ainsi, le bispectre est typiquement donné par

$$S \sim f_{NL}^{\rm feat} \sin\left(\frac{K}{k_*} + \text{phase}\right) \tag{5.106}$$

où $f_{NL}^{\rm feat}$ est relié à la variation du paramètre η due à l'irrégularité (voir [97, 98] pour plus de détails).

Les non-gaussianités étudiées jusque-là sont générées à la traversée ou hors de l'horizon mais pas à l'intérieur car le comportement rapidement oscillant des perturbations pendant cette période rend généralement nulles les contributions correspondantes. Une exception est la situation où l'évolution de fond présente des irrégularités périodiques. Ceci crée un effet de résonance entre les constantes de couplage dans l'Hamiltonien d'interaction et les modes des perturbations eux-mêmes (tant que la fréquence ω des oscillations est supérieure à la fréquence minimale des perturbations sous l'horizon H), et donc un effet constructif pour les fonctions de corrélation [98]. Ceci peut par exemple être réalisé dans des scénarios

d'inflation branaire [51] où la gorge présente des irrégularités périodiques [175] ou dans l'inflation dite de monodronie [379, 301, 148, 177]. On peut montrer que le bispectre prend alors la forme [98, 149]

$$S^{\rm res} = f_{NL}^{\rm res}\left[\sin\left(C\ln K + \text{phase}\right) + \frac{1}{C}\sum_{i\neq j}\frac{k_i}{k_j}\cos\left(C\ln K + \text{phase}\right) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{C^2}\right)\right] \quad (5.107)$$

où les termes d'ordre $\mathcal{O}\left(\frac{1}{C^2}\right)$ ou supérieur sont négligées car $1/C \equiv H/\omega \ll 1$ pour obtenir d'importantes non-gaussianités. Ce profil est représenté à la figure 5.8 dans le cas $C = 100$. On y voit qu'il peut être considéré, en bonne approximation, comme une fonction de K

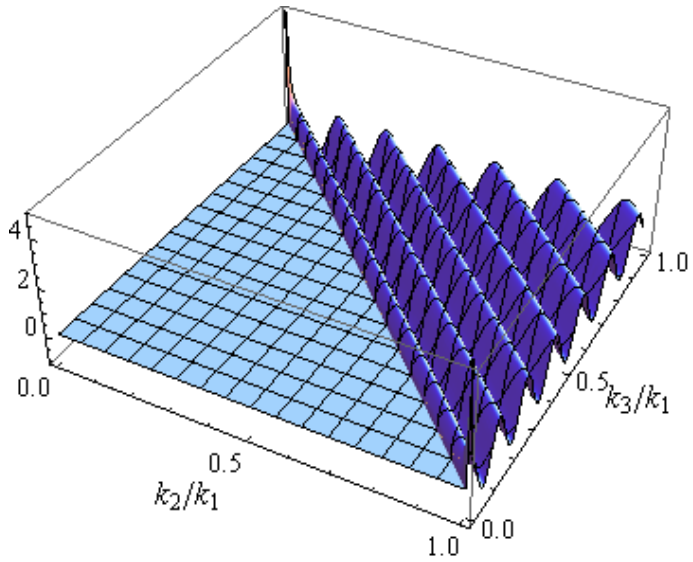

FIGURE 5.8 – La forme du bispectre (5.107) avec $C = 100$. Figure extraite de [96].

uniquement, ce qui correspond au premier terme dans l'équation (5.107). La propriété caractéristique de ce profil est donc sa dépendance d'échelle non-triviale.

5.5.4 Forme aplatie et vide différent de celui de Bunch-Davies.

Nous avons jusqu'ici considéré le vide de Bunch-Davies (3.77) dans lequel les modes des perturbations oscillent sous l'horizon comme $\sim e^{-ik\tau}$ (dans le cas de termes cinétiques standard par simplicité) mais les fluctuations avant la traversée de l'horizon peuvent plus généralement contenir une composante oscillant comme $\sim e^{ik\tau}$, par exemple sous l'effet d'une irrégularité et d'une déviation à la solution attracteur [51, 148] ou comme conséquence d'une physique trans-Planckienne inconnue [293, 118] (voir la référence [168] par exemple pour une revue). Malgré la diversité des modèles et des prescriptions pour étudier cette physique, ses conséquences sur le bispectre sont bien comprises quand la composante oscillant selon $e^{ik\tau}$ peut être considérée comme une perturbation. En effet, le bispectre résultant de l'intégration du produit des trois modes de perturbations de nombres d'onde

k_1, k_2 et k_3, l'effet dominant d'une telle modification du vide de Bunch-davies est de remplacer un des k_i par $-k_i$. Le facteur $K = k_1 + k_2 + k_3$ habituel se trouve alors modifié en $\tilde{K} = k_2 + k_3 - k_1$ et ses permutations. Après intégration temporelle, des facteurs de $\tilde{K}$ se retrouvent au dénominateur avec pour conséquence la divergence du signal dans la limite aplatie $k_2 + k_3 = k_1$ (*c.f.* la figure 5.6). Ceci est discuté en détail dans le cas de l'inflation canonique dans les références [188, 305] et dans les références [100, 306] dans le contexte de la k-inflation.

La liste dressée ci-dessus des différents types de non-gaussianités primordiales et des modèles associés ne peut évidemment pas être exhaustive. Ont par exemple été également étudiées les conséquences sur les non-gaussianités de champs additionnels à l'inflaton de masses de l'ordre de la constante de Hubble, résultant en des formes de bispectre interpolant entre celles équilatérale et locale [104, 103], les conséquences d'effets dissipatifs dans l'inflation dite chaude [172, 151, 313], de cordes cosmiques [343, 187] ou encore de champs vectoriels brisant l'isotropie statistique [125, 35, 34] (voir la référence [350] pour des aspects observationnels).

Chapitre 6

Formalisme covariant et non-gaussianités locales

Sommaire

6.1 Le formalisme covariant 1+3 157

6.2 Le formalisme 1+3 et les perturbations non-linéaires dans l'inflation multichamp généralisée (article) 160

6.2.1 Contexte scientifique et motivations 160

6.2.2 Article 161

6.2.3 Commentaires et précisions 203

6.3 Théorie des perturbations cosmologiques multichamp au troisième ordre et trispectre ekpyrotique (article) 204

6.3.1 Les scénarios ekpyrotiques 204

6.3.2 Non-gaussianités ekpyrotiques et contexte scientifique 206

6.3.3 Motivation et résultats 208

6.3.4 Article 208

6.1 Le formalisme covariant 1+3

Le formalisme utilisé le plus couramment pour traiter des perturbations cosmologiques est celui développé à la suite de Bardeen [30] que nous avons exposé jusque-là. Il s'agit d'une approche perturbative : le point de départ est la définition d'un espace idéalisé, dit de fond, sur lequel sont ensuite définies des perturbations, le tout dans un système de coordonnées. Une autre approche existe cependant, le formalisme covariant 1+3 développé par Ellis et Bruni [137] et Hawking [178] (*c.f.* également la référence [72]). Dans ce formalisme, toutes les quantités sont définies dans l'espace physique, sans référence à un espace de fond et donc sans référence à la notion de perturbation. On y détermine des équations exactes, complètement non-linéaires et de nature tensorielle. On peut trouver une excellente présentation de ce formalisme ainsi qu'une reformulation complète de la cosmologie dans

ce cadre dans la référence [401] (voir également [244] pour une revue directement reliée aux aspects présentés dans les sections suivantes).

L'idée du formalisme covariant 1+3 est de considérer des projections spatiales, dans un sens covariant, de diverses quantités scalaires comme la densité d'énergie ou le nombre de e-folds d'expansion locale. Étant donné que ces gradients spatiaux (des covecteurs) sont nuls dans un espace homogène et isotrope de FLRW, ils jouent naturellement le rôle de perturbations bien qu'ils soient définis de manière non-perturbative. Les équations exactes que vérifient ces covecteurs, facilement obtenues, peuvent ensuite être développées de manière perturbative à n'importe quel ordre une fois qu'un système de coordonnées a été choisi. Cette approche, utiliser le formalisme covariant pour déterminer de manière efficace des résultats dont l'obtention est laborieuse dans l'approche coordonnées, est utilisée dans deux des articles reproduits dans ce manuscrit, aux sections 6.2 et 6.3. Ils peuvent être lus de manière autonome mais, par souci de clarté, nous présentons ici rapidement le formalisme et nous reproduisons la preuve d'un résultat important démontré par Langlois et Vernizzi [241, 240, 242, 243] utilisé dans ces articles.

La séparation covariante entre l'espace et le temps est obtenue dans le formalisme 1+3 par l'intermédiaire d'un champ de vecteur unitaire de genre temps à priori arbitraire $u^a = dx^a/d\tau$ ($u_a u^a = -1$) jouant le rôle de la quadrivitesse d'observateurs fondamentaux (nous utilisons ici les caractères romains $a, b...$ et non grecs $\mu, \nu...$ pour rendre plus simple la comparaison avec les articles 6.2 et 6.3). Le tenseur de projection orthogonal à u^a, dit tenseur de projection spatiale, est alors donné par

$$h_{ab} \equiv g_{ab} + u_a u_b, \qquad (h^a{}_b h^b{}_c = h^a{}_c, \quad h_a{}^b u_b = 0) \tag{6.1}$$

où g_{ab} est la métrique de l'espace-temps. Pour décrire de manière covariante l'évolution temporelle, on utilise la dérivée de Lie par rapport à u^a, qu'on note par un point, définie dans le cas d'un covecteur par (voir la référence [409] par exemple)

$$\dot{Y}_a \equiv \pounds_u Y_a \equiv u^b \nabla_b Y_a + Y_b \nabla_a u^b, \tag{6.2}$$

et qui se réduit à une dérivée ordinaire pour les scalaires

$$\dot{f} = u^b \nabla_b f. \tag{6.3}$$

Pour décrire les "perturbations", l'objet fondamental est la dérivée covariante orthogonale à u^a, ou dérivée covariante spatiale, notée D_a, définie pour tout tenseur par

$$D_a T_{b\ldots}^{\ c\ldots} \equiv h_a{}^d h_b{}^e \ldots h_f{}^c \ldots \nabla_d T_{e\ldots}^{\ f\ldots} \tag{6.4}$$

et qui se réduit donc à

$$D_a f \equiv h_a{}^b \nabla_b f = \partial_a f + u_a \dot{f} \tag{6.5}$$

pour les scalaires.

La dérivée covariante du vecteur u^a peut se décomposer selon

$$\nabla_b u_a = \sigma_{ab} + \omega_{ab} + \frac{1}{3}\Theta h_{ab} - a_a u_b \tag{6.6}$$

où σ_{ab} ($\sigma_{ab}u^b = 0$, $\sigma^a_a = 0$) est un tenseur symétrique et de trace nulle, dit de *cisaillement*, ω_{ab} ($\omega_{ab}u^b = 0$) est un tenseur antisymétrique, dit de *vorticité*,

$$a^a \equiv u^b \nabla_b u^a = \dot{u}^a \tag{6.7}$$

est le vecteur accélération, et la trace

$$\Theta \equiv \nabla_a u^a \tag{6.8}$$

est appelé *expansion* et décrit la déformation isotrope. Une quantité reliée très importante est l'expansion intégrée le long de u^a, définie par

$$\alpha \equiv \frac{1}{3}\int d\tau\, \Theta \qquad (\Theta = 3\dot{\alpha}). \tag{6.9}$$

Comme $\Theta/3$ correspond à un paramètre de Hubble local, on voit que α peut être interprété comme le nombre de e-folds d'expansion mesuré le long de la ligne d'univers d'un observateur fondamental (*c.f.* $\tilde{\alpha}$ à l'équation (5.12)). Enfin, le tenseur énergie impulsion de la matière est décomposé comme donné aux équations (1.14)-(1.18)

$$T_{ab} = (\rho + P)u_a u_b + q_a u_b + u_a q_b + g_{ab}P + \pi_{ab}\,. \tag{6.10}$$

Muni de ces définitions, on peut considérer le covecteur [241, 240]

$$\zeta_a \equiv D_a\alpha - \frac{\dot{\alpha}}{\dot{\rho}} D_a\rho\,, \tag{6.11}$$

qui généralise dans le formalisme covariant la perturbation de courbure sur les hypersurfaces de densité d'énergie uniforme ζ (5.16) (voir la sous-section 6.2.3). Pour déterminer l'équation d'évolution de ζ^a, écrivons l'équation de conservation de l'énergie, *i.e.* la projection le long de u^a de l'équation de conservation du tenseur énergie-impulsion

$$\nabla_a T^a_b = 0\,. \tag{6.12}$$

Ceci s'écrit

$$\dot{\rho} + \Theta(\rho + p) = \mathcal{D}\,, \qquad \mathcal{D} = -\left(\pi^{ab}\sigma_{ab} + D_a q^a + 2q^a \dot{u}_a\right)\,, \tag{6.13}$$

où la quantité $\mathcal{D}$ peut être rendue nulle dans le cas d'un fluide parfait en choisissant pour vecteur u^a la quadrivitesse du fluide. En prenant la projection spatiale du gradient de cette équation, et en utilisant la relation [241, 240]

$$D_a(\dot{f}) = \pounds_u(D_a f) - \dot{u}_a \dot{f} \tag{6.14}$$

valable pour toute quantité scalaire f, on obtient

$$\dot{\zeta}_a = \frac{\Theta^2}{3\dot{\rho}}\left(\Gamma_a + \Sigma_a\right) \tag{6.15}$$

où

$$\Gamma_a \equiv D_a P - \frac{\dot{P}}{\dot{\rho}} D_a\rho \tag{6.16}$$

et

$$\Sigma_a \equiv -\left(D_a \left(\mathcal{D}/\Theta\right) - \frac{\left(\mathcal{D}/\Theta\right)^{\cdot}}{\dot{\rho}} D_a \rho \right) . \tag{6.17}$$

Γ_a est la généralisation dans le formalisme covariant de la perturbation de pression non-adiabatique $\delta p_{\rm nad}$ (2.99). On peut vérifier qu'une fois introduit un système de coordonnées, la loi de conservation linéaire de ζ (2.108) est une conséquence de la relation (6.15). Insistons sur le fait que celle-ci est valable en toute généralité, de manière non-perturbative, et indépendamment des équations gravitationnelles tant que le tenseur énergie-impulsion est conservé (6.12). Dans le cas d'un fluide parfait, $\mathcal{D} = 0$, et barotrope, $\Gamma_a = 0$, on déduit de (6.15) que ζ_a est exactement conservé. Dans le cas de champs scalaires, $\mathcal{D}$ est négligeable aux grandes échelles, auquel cas la relation (6.15) donne l'évolution de ζ_a en fonction de la perturbation de pression non-adiabatique généralisée Γ_a.

6.2 Le formalisme 1+3 et les perturbations non-linéaires dans l'inflation multichamp généralisée (article)

6.2.1 Contexte scientifique et motivations

Le formalisme δN (*c.f.* la sous-section 5.3.2) est un outil puissant et intuitif pour étudier l'évolution des perturbations aux échelles super-Hubble dans l'inflation multichamp. Sa mise en pratique analytique n'est cependant pas toujours aisée car elle nécessite la connaissance de l'évolution de fond d'un nombre quelconque de champs scalaires pour tout jeu de conditions initiales. Une alternative au niveau linéaire est la résolution directe des équations du mouvement pour les perturbations, particulièrement simples quand elles sont exprimées dans la base adiabatique/entropiques (voir les équations (4.41) et (4.42)). Motivés par l'étude des non-gaussianités locales générées hors du rayon de Hubble dans l'inflation multichamp, il est naturel de vouloir bénéficier d'une telle alternative au-delà de l'approximation linéaire. Ceci a été rendu possible pour l'inflation canonique à deux champs dans la référence [243]. Langlois et Vernizzi y ont en effet déterminé les équations du mouvement couplées pour les perturbations adiabatique et entropique au second ordre dans la théorie des perturbations dans la limite des grandes échelles. La méthode élégante mise en oeuvre pour cela est basée sur l'utilisation du formalisme covariant présenté à la section précédente. Grâce à lui, on peut en effet définir de manière non-perturbative des covecteurs adiabatique et isocourbe et déterminer facilement leurs équations exactes d'évolution. Développées de manière perturbative, elles permettent ensuite de retrouver facilement les résultats linéaires et de les étendre au-delà de cette approximation.

Comme une extension naturelle de mon travail sur l'inflation multichamp généralisée (*c.f.* la section 6.2), j'ai étendu avec Gianmassimo Tasinato les résultats de la référence [243] à cette situation, c'est-à-dire aux Lagrangiens à deux champs de la forme $P(X, \phi^I)$ où $X = -\frac{1}{2} G_{IJ} \nabla_\mu \phi^I \nabla^\mu \phi^J$ et G_{IJ} est une métrique dans l'espace des champs. Notre but était modeste : simplement déterminer les équations du mouvement aux grandes échelles pour les perturbations adiabatique et entropique au second ordre dans la théorie des perturbations. Ceci m'a cependant permis d'acquérir une connaissance précise du formalisme covariant qui m'a été utile par la suite, comme on le verra à la section 6.3. Nous avons également corrigé une erreur typographique dans les équations déterminées par Langlois et Vernizzi dans le cas canonique, équations qui avaient été utilisées dans les articles [255] et [254]. Ceci a eu

d'importantes conséquences, discutées à la section 6.3. Enfin, les équations obtenues dans cet article peuvent être utilisées pour déterminer l'amplitude des non-gaussianités locales (5.40) générées dans un scénario quelconque d'inflation DBI à deux champs (*c.f.* le chapitre 8), par exemple de manière numérique (voir la référence [253] reproduite à la section 6.3).

6.2.2 Article

Nous reproduisons à présent l'article [345] publié en 2008 par G. Tasinato et moi-même (S. R-P) dans le *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics (JCAP)* et intitulé *"Nonlinear perturbations of cosmological scalar fields with non-standard kinetic terms"*.

Journal of Cosmology and Astroparticle Physics
An IOP and SISSA journal

Nonlinear perturbations of cosmological scalar fields with non-standard kinetic terms

Sébastien Renaux-Petel[a] **and Gianmassimo Tasinato**[b,c]

[a]APC (Astroparticules et Cosmologie),
UMR 7164 (CNRS, Université Paris 7, CEA, Observatoire de Paris)
10, rue Alice Domon et Léonie Duquet, 75205 Paris Cedex 13, France

[b]Institut für Teoretische Physik, Universität Heidelberg, Philosophenweg 16 and 19,
D-69120 Heidelberg, Germany

[c]Instituto de Fisica Teorica, UAM/CSIS Facultad de Ciencias C-XVI,
C.U. Cantoblanco, E-28049-Madrid, Spain

E-mail: renaux@apc.univ-paris7.fr, g.tasinato@thphys.uni-heidelberg.de

Received October 21, 2008
Revised November 16, 2008
Accepted December 1, 2008
Published January 8, 2009

Abstract. We adopt a covariant formalism to derive exact evolution equations for nonlinear perturbations, in a universe dominated by two scalar fields. These scalar fields are characterized by non-canonical kinetic terms and an arbitrary field space metric, a situation typically encountered in inflationary models inspired by string theory. We decompose the nonlinear scalar perturbations into adiabatic and entropy modes, generalizing the definition adopted in the linear theory, and we derive the corresponding exact evolution equations. We also obtain a nonlinear generalization of the curvature perturbation on uniform density hypersurfaces, showing that on large scales it is sourced only by the nonlinear version of the entropy perturbation. We then expand these equations to second order in the perturbations, using a coordinate based formalism. Our results are relatively compact and elegant and enable one to identify the new effects coming from the non-canonical structure of the scalar fields Lagrangian. We also explain how to analyze, in our formalism, the interesting scenario of multi-field Dirac-Born-Infeld inflation.

Keywords: cosmological perturbation theory; string theory and cosmology

ArXiv ePrint: 0810.2405

© 2009 IOP Publishing Ltd and SISSA
doi:10.1088/1475-7516/2009/01/012

JCAP01(2009)012

Contents

1 Introduction **1**

2 Covariant formalism for scalars with non-canonical kinetic terms **3**

3 Single field **5**
3.1 Integrated expansion perturbation on comoving slices 6
3.2 Integrated expansion perturbation on uniform energy density slices 7

4 The two-field case **8**
4.1 Definition of adiabatic and entropy covectors 8
4.1.1 Adiabatic Klein-Gordon equation 9
4.1.2 Entropic Klein-Gordon equation 10
4.2 Evolution of the covectors 11
4.2.1 Evolution equation for the adiabatic covector 11
4.2.2 Evolution equation for the entropy covector 12
4.3 Generalized covariant perturbations 14
4.3.1 Comoving energy density covector 14
4.3.2 Comoving curvature covector 15

5 Approximate equations **17**
5.1 Homogeneous and linearized equations 17
5.2 Expansion in spatial gradients 18

6 Linear perturbations **21**

7 Second order perturbations **26**
7.1 Adiabatic and entropy fields 26
7.2 Generalized uniform density and comoving curvature perturbations 32

8 Conclusions **34**

A Useful identities in a two-field system **35**
A.1 Covariant identities 35
A.2 Background identities 35
A.3 First-order identities 36

JCAP01(2009)012

1 Introduction

Inflation offers a compelling mechanism to produce a spatially flat and approximately homogeneous universe. Moreover, it also provides a source for small primordial fluctuations that seed the observed large scale structures. Simple models of inflation are realized in terms of a single, slowly rolling scalar field characterized by canonical kinetic terms and a flat potential.

In this case, the spectrum of fluctuations is characterized by adiabatic, almost scale invariant density perturbations, with nearly Gaussian distribution on super-horizon scales.

While present-day observations are consistent with these models, there are good theoretical reasons to go beyond the simple hypotheses on which they are based. As an important example, string theory motivates frameworks in which many scalar fields, with non-canonical kinetic terms and not necessarily flat potential, play a role during inflation. Indeed, string theory predicts the existence of a large number of scalar fields, the moduli, which in the early universe may be sufficiently light to interact with the inflaton field, playing an active role during inflation. Moreover, the most studied stringy inflationary models are based on the dynamics of D-branes moving in higher dimensional spaces: in these set-ups, the inflaton field is governed by a Dirac-Born-Infeld (DBI) action characterized by non-canonical kinetic terms (see [1] for recent reviews). In some regimes, the non-canonical kinetic terms allow one to obtain inflation also with steep scalar potentials, as in the DBI-inflationary models of [2]–[5]. A more general analysis of the spectrum of primordial fluctuations for multi-field models with non-canonical kinetic terms, then, may allow one to understand how future observations will be able to probe, or exclude, inflationary models motivated or inspired by string theory.

Single-field inflationary models with non-canonical kinetic terms, of a class belonging to models of k-inflation [6], have received much attention in the past years, for the possibility to generate spectra of fluctuations with non-Gaussian features, at a level that can be probed by future observations (see [7] for review and a comprehensive analysis of this case). More recently, models of inflation with more than one scalar field with non-canonical kinetic terms have been also considered [8]–[16]. In this case, non-standard correlations between adiabatic and entropy modes can occur, and this affects the amplitude of non-Gaussianities in these models [13]–[15]. These correlations can even persist in the primordial radiation dominated era, as first pointed out in [17]. The analysis of the examples studied so far suggests that the dynamics of fluctuations, in string inspired multi-field inflationary models, have new and rich features, depending on the form of kinetic terms for the inflaton field(s).

In this paper, motivated by the previous arguments, we analyze cosmological fluctuations of a system of two scalar fields with non-canonical kinetic terms at a fully nonlinear level. We adopt the covariant formalism developed in [18]–[21], along the lines of earlier works by Ellis and Bruni [22] and Hawking [23] (see also [24]). This formalism is particularly suitable to analyze fluctuations of the system we consider, since it leads to a clear and natural decomposition of fluctuations in adiabatic and entropy components. This separation has been first studied, at the linear level, in [25] for the case of canonical kinetic terms (see [26] for a recent review). It is particularly convenient for analyzing the generation and conversion of adiabatic and isocurvature components of fluctuations produced during inflation. It also plays an important role in the previously mentioned recent papers, that analyze fluctuations for multi-field models with non-canonical kinetic terms.

Following [21], we generalize this decomposition into adiabatic and isocurvature components to a fully nonlinear set-up. In order to do so, we first define adiabatic and isocurvature covectors, representing the nonlinear generalization of linear fluctuations, in the case of general field space metric. Then, we obtain a set of *exact* evolution equations for these quantities, in our framework characterised by a non-standard Lagrangian. In addition, by defining a suitable nonlinear generalization of the curvature perturbation, we derive the evolution equation for this quantity and we determine how it is sourced by the nonlinear entropy covector. This result generalizes already known linear equations that play an important role for analyzing

JCAP01(2009)012

how entropy fluctuations are converted into adiabatic modes on superhorizon scales.

We then show how our results can be reexpressed in a more familiar coordinate based approach, and how our equations can be expanded to first and second order. Proceeding in this way, we re-obtain at first order the linear evolution equations determined in [11], while we find new results when pursuing the expansion up to second order. In particular, working in a large scale limit, we determine how the curvature perturbation is sourced by the entropy modes at second order. Our final equations are relatively compact, and allow one to clearly appreciate the impact of non-canonical kinetic terms on the evolution of fluctuations.

Our discussion closely follows [21], to which we refer the reader for further details and references. We show how to extend the methods of this paper to the case of non-canonical kinetic terms for the scalar fields, and for general field space metric. In doing so, we obtain nonlinear equations for the fluctuations, that can be expressed in a physically transparent way, and we show the usefulness of the covariant approach for analyzing cosmological models inspired by string theory.

2 Covariant formalism for scalars with non-canonical kinetic terms

We consider an arbitrary unit timelike vector $u^a = dx^a/d\tau$ ($u_a u^a = -1$), defining a congruence of cosmological observers. The spatial projection tensor orthogonal to the four-velocity u^a is provided by

$$h_{ab} \equiv g_{ab} + u_a u_b, \qquad (h^a{}_b h^b{}_c = h^a{}_c, \quad h_a{}^b u_b = 0). \tag{2.1}$$

To describe the time evolution, the covariant definition of the time derivative will be the *Lie derivative* with respect to u^a, defined for a generic covector Y_a by (see e.g. [27])

$$\dot{Y}_a \equiv \mathcal{L}_u Y_a \equiv u^b \nabla_b Y_a + Y_b \nabla_a u^b, \tag{2.2}$$

and will be denoted by *a dot*. For scalar quantities, one simply has

$$\dot{f} = u^b \nabla_b f. \tag{2.3}$$

To describe perturbations in the covariant approach, we consider the projected covariant derivative orthogonal to the four-velocity u^a, denoted by D_a. For a generic tensor, the definition is

$$D_a T_{b\ldots}{}^{c\ldots} \equiv h_a{}^d h_b{}^e \ldots h_f{}^c \ldots \nabla_d T_{e\ldots}{}^{f\ldots}. \tag{2.4}$$

In particular, when focussing on a scalar quantity f, this reduces to

$$D_a f \equiv h_a{}^b \nabla_b f = \partial_a f + u_a \dot{f}\,. \tag{2.5}$$

We can also decompose

$$\nabla_b u_a = \sigma_{ab} + \omega_{ab} + \frac{1}{3}\Theta h_{ab} - a_a u_b, \tag{2.6}$$

with the (symmetric) shear tensor σ_{ab} and the (antisymmetric) vorticity tensor ω_{ab}; the volume expansion, Θ, is defined by

$$\Theta \equiv \nabla_a u^a, \tag{2.7}$$

while

$$a^a \equiv u^b \nabla_b u^a \tag{2.8}$$

JCAP01(2009)012

is the acceleration vector.

Let us now consider N scalar fields minimally coupled to gravity with general Lagrangian density (see [11] for a study of the linear perturbations in this type of model):

$$\mathcal{L} = P(X, \phi^I)\,. \tag{2.9}$$

Here X is

$$X = -\frac{1}{2}\, G_{IJ}\, g^{ab}\, \nabla_a \phi^I \nabla_b \phi^J\,, \tag{2.10}$$

or, using eq. (2.5),

$$X = \frac{1}{2}\, G_{IJ} \dot{\phi}^I \dot{\phi}^J - \frac{1}{2} G_{IJ} D_a \phi^I D^a \phi^J \tag{2.11}$$

and $G_{IJ} \equiv G_{IJ}(\phi^K)$ is a metric in 'field space' that can be used to raise and lower field indices, denoted by capital letters. One can consider more general Lagrangians, like the ones studied in [13, 15].

However, the choice of Lagrangian density eq. (2.9) is suitable for describing most of k-inflationary models considered in the literature. Especially, it is important to point out that our formalism can be applied to two-field DBI inflationary models of the type studied in [12, 13]. One of the present author (S. RP) has shown in these works that the multi-field DBI Lagrangian can *not* be written in the form $P(X, \phi^I)$. It can however be written in the form $P(\tilde{X}, \phi^I)$ where X and $\tilde{X}$ only differs by terms in spatial gradients. Therefore, all the results derived in this paper *in the large scale limit*, where spatial gradients can be neglected, are readily applicable to multi-field DBI models simply by considering the specific Lagrangian

$$P(X, \phi^I) = -\frac{1}{f(\phi^I)} \left(\sqrt{1 - 2f(\phi^I) X} - 1 \right) - V(\phi^I) \tag{2.12}$$

where f is the so-called warp factor and V is a potential term (see [13] for more details on multi-field DBI models).

The energy momentum tensor derived from eq. (2.9) reads

$$T_{ab} = P_{,X} G_{IJ} \nabla_a \phi^I \nabla_b \phi^J + g_{ab}\, P\,. \tag{2.13}$$

Given an arbitrary unit timelike vector field u^a, it is always possible to decompose the total energy momentum tensor as

$$T_{ab} = (\rho + p) u_a u_b + q_a u_b + u_a q_b + g_{ab}\, p + \pi_{ab}, \tag{2.14}$$

where ρ, p, q_a and π_{ab} are respectively the energy density, pressure, momentum and anisotropic stress tensor measured in the frame defined by u^a. Starting from the expression for the energy-momentum tensor (2.13) one finds (we write $\dot{\phi}_I \equiv G_{IJ}\, \dot{\phi}^J$)

$$\rho \equiv T_{ab} u^a u^b = P_{,X}\, \dot{\phi}^I \dot{\phi}_I - P\,, \tag{2.15}$$

$$p \equiv \frac{1}{3} h^{ac} T_{ab} h^b_c = \frac{1}{3} P_{,X} G_{IJ} D_a \phi^I D^a \phi^J + P, \tag{2.16}$$

$$q_a \equiv -u^b T_{bc} h^c_a = -P_{,X} \dot{\phi}_I D_a \phi^I, \tag{2.17}$$

$$\pi_{ab} \equiv h^c_a T_{cd} h^d_b - p\, h_{ab} = P_{,X} \left(G_{IJ} D_a \phi^I D_b \phi^J - \frac{h_{ab}}{3}\, G_{IJ} D_c \phi^I D^c \phi^J \right). \tag{2.18}$$

JCAP01(2009)012

The evolution equations for the scalar fields are obtained from the variation of the action with respect to the fields themselves. In our case one gets

$$P_{,X}\, G_{IJ}\nabla^a\nabla_a\phi^J + P_{,X}\,\Gamma_{IJK}\left(\nabla_a\phi^J\right)\left(\nabla^a\phi^K\right) + \left(\nabla^a P_{,X}\right)\, G_{IJ}\nabla_a\phi^J + P_{,I} \;=\; 0 \tag{2.19}$$

where $\Gamma_{IJK} \equiv G_{IL}\Gamma^L_{JK} \equiv \frac{1}{2}\left(G_{IJ,K} + G_{IK,J} - G_{JK,I}\right)$ is the Christoffel symbol associated to the metric G_{IJ}. The previous equation reduces to the usual one, in the case one chooses $P = X - V(\phi^I)$, where V is a potential.

Notice that using the equalities, following from (2.5) and (2.6),

$$D_a D^a\,\phi^I \;=\; \nabla_a\nabla^a\phi^I + \ddot{\phi}^I + \Theta\,\dot{\phi}^I - a^b\,D_b\phi^I\,, \tag{2.20}$$

$$\nabla^a P_{,X}\,\nabla_a\phi^J \;=\; D^a P_{,X}\,D_a\phi^J - \dot{P}_{,X}\,\dot{\phi}^J\,, \tag{2.21}$$

$$\nabla^a\phi^J\,\nabla_a\phi^K \;=\; D^a\phi^J\,D_a\phi^K - \dot{\phi}^J\,\dot{\phi}^K\,, \tag{2.22}$$

equation (2.19) becomes

$$\begin{aligned}&\ddot{\phi}^I + \Gamma^I_{JK}\Big(\dot{\phi}^J\dot{\phi}^K - D_a\phi^J D^a\phi^K\Big) + \left(\Theta + !\frac{\dot{P}_{,X}}{P_{,X}}\right)\dot{\phi}^I\\ &-\frac{1}{P_{,X}}G^{IJ}P_{,J} - D_a D^a\phi^I - a^b D_b\phi^I - \frac{\left(D^b P_{,X}\right)}{P_{,X}}D_b\phi^I \;=\; 0\,.\end{aligned} \tag{2.23}$$

To simplify the notation, it is useful to define the spacetime derivative of field space vectors in curved coordinates

$$\mathcal{D}_a A^I \equiv \nabla_a A^I + \Gamma^I_{JK}\nabla_a\phi^J A^K\,, \tag{2.24}$$

with which we define a time derivative in field space

$$\mathcal{D}_u A^I \equiv u^a\mathcal{D}_a A^I \tag{2.25}$$

and a spatially projected derivative in field space

$$\mathcal{D}_{\perp a}T^{I\,c\ldots}_{b\ldots} \equiv h_a{}^d h_b{}^e \ldots h_f{}^c \ldots \mathcal{D}_d T^{I\,f\ldots}_{e\ldots}\,. \tag{2.26}$$

Notice that $\mathcal{D}_a$ acts as an ordinary time derivative on field space scalars (i.e. quantities without field space indices) and $\mathcal{D}_a G_{IJ} = 0$. Using these definitions, it is possible to rewrite (2.23) in a more condensed form as

$$\mathcal{D}_u\dot{\phi}^I \;+\; \left(\Theta + \frac{\dot{P}_{,X}}{P_{,X}}\right)\dot{\phi}^I \;-\; \frac{1}{P_{,X}}\,G^{IJ}P_{,J} \;-\; \mathcal{D}_{\perp a}\left(D^a\phi^I\right) \;-\; a^b D_b\phi^I \;-\; \frac{\left(D^b P_{,X}\right)}{P_{,X}}\,D_b\phi^I \;=\; 0\,. \tag{2.27}$$

3 Single field

We start our discussion examining the simple situation of a single field. This provides the opportunity to introduce some quantities that will play an important role in the following discussion.

Let us denote by ϕ the single scalar field we are considering and set the trivial field space metric $G_{11} = 1$. Then the Klein-Gordon equation (2.27) reads

$$\ddot{\phi} + \left(\Theta + \frac{\dot{P}_{,X}}{P_{,X}}\right)\dot{\phi} - \frac{1}{P_{,X}}\frac{dP}{d\phi} - D_a D^a\phi - a^b D_b\phi - \frac{\left(D^b P_{,X}\right)}{P_{,X}}\,D_b\phi \;=\; 0\,. \tag{3.1}$$

JCAP01(2009)012

By choosing

$$u^a_{com} = \pm \frac{\nabla^a \phi}{\sqrt{-\nabla_a \phi \nabla^a \phi}} \tag{3.2}$$

one finds $D_a \phi = 0$. Then (3.1) becomes formally identical to the well known homogeneous version, although it remains fully inhomogeneous and nonlinear.

One can proceed further, and derive an exact and covariant equation that mimics the equation of motion governing the linear perturbations of a scalar field in a perturbed FLRW (Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker) spacetime. The idea is to consider the evolution of the space-time gradient of the scalar field, i.e., the covector

$$\phi_a \equiv \nabla_a \phi. \tag{3.3}$$

Indeed this quantity can be decomposed into a spatial gradient and a longitudinal component,

$$\phi_a = -\dot{\phi}\, u_a + D_a \phi. \tag{3.4}$$

resembling, within our full nonlinear setting, the usual decomposition of a quantity in a homogeneous part, plus a perturbation. Notice that when making the particular choice (3.2) the spatial gradient disappears in the above expression, and indeed the evolution equation becomes in this case formally identical to the homogeneous one.

We then construct a second-order (in time) evolution equation for ϕ_a. We recall that a dot stands for the Lie derivative along u^a, as defined in eq. (2.2). We can derive the evolution equation for ϕ_a by taking the spacetime gradient of eq. (3.1) and noting that, for any scalar ϕ, the Lie derivative with respect to u^a and the spacetime gradient (but not the spatial gradient) commute, i.e.,

$$\nabla_a \dot{\phi} = (\nabla_a \phi)^{\cdot}. \tag{3.5}$$

Acting with the space-time gradient ∇_a on equation (3.1), and using the previous definitions, we obtain

$$\begin{aligned} &\ddot{\phi}_a + \left(\Theta + \frac{\dot{P}_{,X}}{P_{,X}}\right)\dot{\phi}_a + \dot{\phi}\nabla_a\left(\frac{\dot{P}_{,X}}{P_{,X}}\right) - \left[\frac{1}{P_{,X}}\frac{dP}{d\phi}\right]_{,X}\nabla_a X - \left[\frac{1}{P_{,X}}\frac{dP}{d\phi}\right]_{,\phi}\phi_a \\ &= -\dot{\phi}\,\nabla_a\Theta + \nabla_a\left(D_b D^b \phi\right) + \nabla_a\left(a^b D_b \phi\right) + \nabla_a\left(\frac{D^b P_{,X}}{P_{,X}} D_b \phi\right) \end{aligned} \tag{3.6}$$

This equation is similar to the analogous perturbation equation at linear order, but it additionally incorporates the fully nonlinear dynamics of the scalar field perturbation.

3.1 Integrated expansion perturbation on comoving slices

One can define a covariant generalization of the comoving curvature perturbation using appropriate combinations of spatially projected gradients. For a scalar field, a natural choice is the covariant integrated expansion perturbation on comoving hypersurfaces $\mathcal{R}_a$, defined as

$$\mathcal{R}_a \equiv -D_a \alpha + \frac{\dot{\alpha}}{\dot{\phi}} D_a \phi, \tag{3.7}$$

where α is the integrated volume expansion along u^a,

$$\alpha \equiv \frac{1}{3}\int d\tau\, \Theta \qquad (\Theta = 3\dot{\alpha}). \tag{3.8}$$

JCAP01(2009)012

Since $\Theta/3$ corresponds to the local Hubble parameter, one sees that the quantity α can be interpreted as the number of e-folds measured along the world-line of a cosmological observer with four-velocity u^a.

When the four-velocity u^a is chosen to be comoving with the scalar field, as defined in eq. (3.2), then the last term in the definition (3.7) drops out.

Note a useful property of $\mathcal{R}_a$: one can replace in its definition (3.7) the spatial gradients D_a by partial or covariant derivatives,

$$\mathcal{R}_a = -\nabla_a \alpha + \frac{\dot{\alpha}}{\dot{\phi}} \phi_a. \tag{3.9}$$

The same property applies to the nonlinear generalization of the comoving Sasaki-Mukhanov variable for a scalar field, which can be defined as

$$Q_a \equiv D_a \phi - \frac{\dot{\phi}}{\dot{\alpha}} D_a \alpha = \frac{\dot{\phi}}{\dot{\alpha}} \mathcal{R}_a. \tag{3.10}$$

3.2 Integrated expansion perturbation on uniform energy density slices

Following [18, 19], it is also possible to generalize the curvature perturbation on uniform energy density hypersurfaces. The key role is then played by the covector ζ_a defined as

$$\zeta_a \equiv D_a \alpha - \frac{\dot{\alpha}}{\dot{\rho}} D_a \rho. \tag{3.11}$$

For a perfect fluid, the quantity ζ_a satisfies a simple first-order evolution equation

$$\dot{\zeta}_a = \frac{\Theta^2}{3\dot{\rho}} \Gamma_a, \tag{3.12}$$

where

$$\Gamma_a \equiv D_a p - \frac{\dot{p}}{\dot{\rho}} D_a \rho \tag{3.13}$$

is the nonlinear nonadiabatic pressure perturbation (p is the pressure measured in the frame defined by u^a, defined in eq. (2.16)). For a barotropic fluid, $\Gamma_a = 0$ and ζ_a is conserved on *all scales*. The relation (3.12) for ζ_a can be seen as a generalization of the familiar conservation law for ζ, the linear curvature perturbation on uniform energy hypersurfaces [28]. In the next sections, we will analyze the form of Γ_a in various physically interesting situations.

For a single scalar field, the comoving and uniform density integrated expansion perturbations ζ_a and $\mathcal{R}_a$ satisfy

$$\zeta_a + \mathcal{R}_a = -\frac{\dot{\alpha}}{\dot{\rho}} \left(D_a \rho - \frac{\dot{\rho}}{\dot{\phi}} D_a \phi \right), \tag{3.14}$$

which simply follows from their respective definitions. The right hand side can be interpreted as the "shift" between hypersurfaces of constant ρ and hypersurfaces of constant ϕ and the term inside the parenthesis represents the nonlinear generalization of the so-called *comoving energy density* perturbation of a single scalar field.

By choosing $u^a = u^a_{\rm com}$ as defined in eq. (3.2), the energy-momentum tensor of a single scalar field can be written in the perfect fluid form, i.e., with vanishing q_a and π_{ab} and the energy density ρ and pressure p given by

$$\rho = P_{,X} \dot{\phi}^2 - P\,, \qquad p = P\,, \tag{3.15}$$

JCAP01(2009)012

as can be checked by specializing eqs. (2.15)–(2.18) to a single field and setting $D_a\phi = 0$.

After substitution in the definition (3.13) of the nonadiabatic pressure covector Γ_a, we have

$$\Gamma_a = \frac{\dot\phi^2}{\dot\rho} P_{,X} \left(- \left(1 + \frac{1}{c_s^2} \right) P_{,\phi} + P_{,X\phi} \dot\phi^2 \right) D_a \dot\phi \tag{3.16}$$

where we are using $D_a\phi = 0$ (implying also $2X = \dot\phi^2$). We also used

$$c_s^2 = \frac{p_{,X}}{\rho_{,X}} = \frac{P_{,X}}{P_{,X} + \dot\phi^2 P_{,XX}} \,. \tag{3.17}$$

Then, the evolution equation of ζ_a for a single scalar field is given by

$$\dot\zeta_a = \frac{D_a \dot\phi}{3 P_{,X}\, \dot\phi^2} \left[- \left(1 + \frac{1}{c_s^2} \right) P_{,\phi} + P_{,X\phi} \dot\phi^2 \right] \tag{3.18}$$

where we have used $\dot\rho = -\Theta\, P_{,X} \dot\phi^2$ (that can be obtain from the equation of motion for ϕ) to get this expression.

We will show in section 5.2, as a particular case of a more general discussion, that the quantity on the right hand side of equation (3.18) vanishes on large scales, so that ζ_a is conserved in this limit.

4 The two-field case

4.1 Definition of adiabatic and entropy covectors

In the two-field case, it is convenient to introduce a particular basis in the field space in which various field dependent quantities are decomposed into adiabatic and entropy components. In the linear theory, this decomposition was first introduced in [25] for two fields. For the multi-field case, it is discussed in [29] in the linear theory (see also [30]) and in [31] in the nonlinear context.

In our case, the corresponding basis consists, in the two-dimensional field space, of a unit vector e^I_σ defined in the direction of the velocity of the two fields, and thus *tangent* to the trajectory in field space, and of a unit vector e^I_s defined along the direction *orthogonal* to it (with respect to the field space metric), namely

$$\mathrm{e}^I_\sigma \equiv \frac{\dot\phi^I}{\dot\sigma}, \qquad G_{IJ}\, \mathrm{e}^I_s \mathrm{e}^J_s = 1, \qquad G_{IJ}\, \mathrm{e}^I_s \mathrm{e}^J_\sigma = 0\,, \tag{4.1}$$

with

$$\dot\sigma \equiv \sqrt{G_{IJ} \dot\phi^I \dot\phi^J}\,. \tag{4.2}$$

Notice that generically, the quantity $\dot\sigma$ *is not* the derivative along u^a of a scalar field σ; it is merely a notation. An important consequence of the above definitions is the identity

$$\delta^I{}_J = \mathrm{e}^I_\sigma \mathrm{e}_{\sigma J} + \mathrm{e}^I_s \mathrm{e}_{s J}\,. \tag{4.3}$$

From $e_{\sigma I} e^I_\sigma = 1$, one deduces that $\mathcal{D}_u \mathrm{e}^I_\sigma$ is proportional to e^I_s. It is then convenient to define $\dot\theta$ by

$$\mathcal{D}_u \mathrm{e}^I_\sigma = \dot\theta \mathrm{e}^I_s, \qquad \mathcal{D}_u \mathrm{e}^I_s = -\dot\theta \mathrm{e}^I_\sigma. \tag{4.4}$$

JCAP01(2009)012

Again, it is simply a short hand notation; $\dot{\theta}$ *is not* the derivative along u^a of an angle θ, although such an angle can be defined if the field space metric is trivial [21].

Making use of the basis (4.1), one can then introduce two linear combinations of the scalar field gradients and thus define two covectors, respectively denoted by σ_a and s_a, as

$$\sigma_a \equiv \mathrm{e}_{\sigma I}\nabla_a\phi^I, \tag{4.5}$$

$$s_a \equiv \mathrm{e}_{sI}\nabla_a\phi^I. \tag{4.6}$$

We will call these two covectors the *adiabatic* and *entropy* covectors, respectively, by analogy with the similar definitions in the linear context [11]. Whereas the entropy covector s_a is orthogonal to the four-velocity u^a, i.e., $u^a s_a = 0$, this is not the case for σ_a which contains a 'longitudinal' component: $u^a\sigma_a = \dot{\sigma}$. It turns out to be useful to introduce the spatially projected version of (4.5)–(4.6),

$$\sigma_a^\perp \equiv \mathrm{e}_{\sigma I}D_a\phi^I = \sigma_a + \dot{\sigma}u_a\,, \qquad s_a^\perp \equiv \mathrm{e}_{sI}D_a\phi^I = s_a\,. \tag{4.7}$$

4.1.1 Adiabatic Klein-Gordon equation

We start our analysis of the evolution equations considering the *adiabatic* combination of the Klein-Gordon equations, i.e., the contraction of (2.27) by $\mathrm{e}_{\sigma I}$. By noting that we can write

$$\dot{\sigma} = \mathrm{e}_{\sigma I}\dot{\phi}^I \qquad \ddot{\sigma} = \mathrm{e}_{\sigma I}\mathcal{D}_u\dot{\phi}^I, \tag{4.8}$$

and by defining[1]

$$P_{,\sigma} \equiv \mathrm{e}^I_\sigma P_{,I}\,, \tag{4.9}$$

one obtains

$$\ddot{\sigma} + \left(\Theta + \frac{\dot{P}_{,X}}{P_{,X}}\right)\dot{\sigma} - \frac{1}{P_{,X}}P_{,\sigma} - \mathrm{e}_{\sigma I}\mathcal{D}_{\perp a}\left(D^a\phi^I\right) - a^a\sigma_a^\perp - \frac{D^bP_{,X}}{P_{,X}}\sigma_b^\perp = 0. \tag{4.10}$$

The fourth term can be rewritten as

$$\mathrm{e}_{\sigma I}\mathcal{D}_{\perp a}\left(D^a\phi^I\right) = \mathcal{D}_{\perp a}\left(\mathrm{e}_{\sigma I}D^a\phi^I\right) - (\mathcal{D}_{\perp a}\mathrm{e}_{\sigma I})D^a\phi^I = D^a\sigma_a^\perp - (\mathrm{e}_{sI}\mathcal{D}_{\perp a}\mathrm{e}^I_\sigma)s^a, \tag{4.11}$$

where we have used the definition of $\sigma_a^\perp$, eq. (4.7), and the identity (4.3). Inserting

$$\mathcal{D}_a\dot{\phi}^I = u^b\mathcal{D}_b\left(\nabla_a\phi^I\right) + \left(\nabla_a u^b\right)\left(\nabla_b\phi^I\right) \tag{4.12}$$

into the calculation of the Lie derivative of s_a with respect to u_a, one gets

$$\mathrm{e}_{sI}\mathcal{D}_a\mathrm{e}^I_\sigma = -\mathrm{e}_{\sigma I}\mathcal{D}_a\mathrm{e}^I_s = \frac{1}{\dot{\sigma}}(\dot{s}_a + \dot{\theta}\sigma_a)\,, \tag{4.13}$$

from which one obtains

$$\mathrm{e}_{\sigma I}\mathcal{D}_{\perp a}\left(D^a\phi^I\right) = D^a\sigma_a^\perp - \frac{1}{\dot{\sigma}}(\dot{s}_a + \dot{\theta}\sigma_a^\perp)s^a\,. \tag{4.14}$$

The adiabatic combination of the Klein-Gordon equations can thus be written as

$$\ddot{\sigma} + \left(\Theta + \frac{\dot{P}_{,X}}{P_{,X}}\right)\dot{\sigma} - \frac{P_{,\sigma}}{P_{,X}} = \nabla^a\sigma_a^\perp - Y_{(s)}\,, \tag{4.15}$$

[1] Similar notations will be employed in the following, such as $P_{,X\sigma} \equiv e^I_\sigma P_{,XI}$, $P_{,Xs} \equiv e^I_s P_{,XI}\ldots$

JCAP01(2009)012

where we have defined

$$Y_{(s)} \equiv \frac{1}{\dot\sigma}(\dot s_a + \dot\theta\sigma^\perp_a)s^a - \frac{D^a P_{,X}}{P_{,X}}\sigma^\perp_a \ , \tag{4.16}$$

and used the property

$$D^a\sigma^\perp_a + a^a\sigma^\perp_a = \nabla^a\sigma^\perp_a, \tag{4.17}$$

which is valid for any covector *orthogonal to* u^a (and thus also for s_a). Note that our $Y_{(s)}$ coincides with the one of [21] in the case of canonical kinetic terms, in which situation the last term in (4.16) vanishes.

Second derivatives of the scalar fields are hidden in the term $\dot P_{,X}$. Explicitely, this gives

$$\frac{\ddot\sigma}{c_s^2} + \Theta\dot\sigma + \frac{P_{,X\sigma}}{P_{,X}}\dot\sigma^2 - \frac{P_{,\sigma}}{P_{,X}} = \nabla^a\sigma^\perp_a - Y_{(s)} + \frac{\dot\sigma P_{,XX}}{2P_{,X}}(\sigma^\perp_a\sigma^{\perp\,a} + s_a s^a)^{\cdot} \ , \tag{4.18}$$

where we have introduced the important, *spacetime dependent*, quantity

$$c_s^2 \equiv \frac{P_{,X}}{P_{,X} + \dot\sigma^2 P_{,XX}} \ . \tag{4.19}$$

Notice that c_s is a fully *nonlinear* quantity; this implies for example that one cannot replace $\dot\sigma^2$ by $2X$ in its definition, since these quantities differ by terms in spatial gradients (see (2.11)). At linear order however, c_s coincides with the now well known speed of sound of k-inflationary models [6, 11].

4.1.2 Entropic Klein-Gordon equation

Let us now consider the *entropic* combination of the Klein-Gordon equations, i.e., the contraction of (2.23) with e_{sI}. By using

$$\mathrm{e}_{sI}\mathcal{D}_u\dot\phi^I = \dot\theta\dot\sigma, \tag{4.20}$$

and by defining the entropic gradient of the potential,

$$P_{,s} \equiv \mathrm{e}^I_s P_{,I}, \tag{4.21}$$

one finds

$$P_{,X}\,\dot\sigma\dot\theta - P_{,s} - P_{,X}\,\mathrm{e}_{sI}\mathcal{D}_{\perp a}\left(D^a\phi^I\right) - P_{,X}\,a^a s_a - D^b P_{,X}\,s_b = 0. \tag{4.22}$$

One can rewrite the last three terms by using the identity

$$\mathrm{e}_{sI}\mathcal{D}_{\perp a}\left(D^a\phi^I\right) = D^a s_a + \frac{1}{\dot\sigma}(\dot s_a + \dot\theta\sigma^\perp_a)\sigma^{\perp\,a}, \tag{4.23}$$

derived by inserting (4.12) into the calculation of the Lie derivative of σ_a with respect to u_a. Applying the property (4.17) to the covector s_a, one finally gets

$$\dot\sigma\dot\theta - \frac{P_{,s}}{P_{,X}} \ = \ \nabla_a s^a + Y_{(\sigma)} \ , \tag{4.24}$$

with

$$Y_{(\sigma)} \equiv \frac{1}{\dot\sigma}(\dot s_a + \dot\theta\sigma^\perp_a)\sigma^{\perp\,a} + \frac{D^a P_{,X}}{P_{,X}}s_a \ . \tag{4.25}$$

To conclude, we have shown how to replace the Klein-Gordon equations for the fields by two new equations describing the evolution along the adiabatic and entropy directions

JCAP01(2009)012

respectively. Our covariant equations (4.18) and (4.24) look very similar to the homogeneous equations: on the other hand they capture the fully nonlinear dynamics of the scalar fields. Whereas these equations generalize the *background* evolution equations, we will proceed in the next subsection to derive fully nonlinear and exact equations for the covectors, which mimic and generalize the *linearized* equations for the adiabatic and entropy components.

4.2 Evolution of the covectors

We now derive evolution equations for the covectors σ_a and s_a. More precisely, our purpose is to find two evolution equations, which are second order in time (with respect to the Lie derivative along u^a) and which mimic the equations obtained in the linear theory for the perturbations $\delta\sigma$ and δs (see [11]).

4.2.1 Evolution equation for the adiabatic covector

Starting from the definition of σ_a in (4.5), one finds that its time derivative, i.e., the Lie derivative with respect to u^a, is given by

$$\dot{\sigma}_a = \mathrm{e}_{\sigma I}\mathcal{D}_a\dot{\phi}^I + \dot{\theta}s_a = \nabla_a\dot{\sigma} + \dot{\theta}s_a, \tag{4.26}$$

where the last equality is obtained by using $\dot{\phi}^I = \dot{\sigma}\mathrm{e}^I_\sigma$. A further time derivative yields

$$\ddot{\sigma}_a = \nabla_a\ddot{\sigma} + \ddot{\theta}s_a + \dot{\theta}\dot{s}_a. \tag{4.27}$$

The next step consists in using (4.15) to eliminate $\ddot{\sigma}$ in the above expression. This gives

$$\begin{aligned}\ddot{\sigma}_a + \Theta\dot{\sigma}_a + \dot{\sigma}\nabla_a\left(\Theta + \frac{\dot{P}_{,X}}{P_{,X}}\right) + \frac{\dot{P}_{,X}\,\dot{\sigma}_a}{P_{,X}} + \frac{P_{,\sigma}\,\nabla_a P_{,X}}{P^2_{,X}} - \left(\frac{P_{,\sigma\sigma}}{P_{,X}} + \dot{\theta}\frac{P_{,s}}{P_{,X}\,\dot{\sigma}}\right)\sigma_a - \nabla_a\left(\nabla^c\sigma^\perp_c\right)\\ -\frac{P_{,X\sigma}\,\nabla_a X}{P_{,X}} = \left(\dot{\theta} + \frac{P_{,s}}{\dot{\sigma}P_{,X}}\right)\dot{s}_a + \left[\ddot{\theta} + \frac{P_{,\sigma s}}{P_{,X}} + \dot{\theta}\left(\Theta + \frac{\dot{P}_{,X}}{P_{,X}}\right)\right]s_a - \nabla_a Y_{(s)}\,,\end{aligned} \tag{4.28}$$

where we have used the relation

$$\nabla_a P_{,\sigma} = P_{,\sigma\sigma}\sigma_a + P_{,\sigma s}s_a + \frac{P_{,s}}{\dot{\sigma}}(\dot{s}_a + \dot{\theta}\sigma_a) + P_{,X\sigma}\,\nabla_a X\,, \tag{4.29}$$

and introduced the notation

$$P_{,\sigma\sigma} \equiv \mathrm{e}^I_\sigma\mathrm{e}^J_\sigma\mathcal{D}_I\mathcal{D}_J P, \qquad P_{,ss} \equiv \mathrm{e}^I_s\mathrm{e}^J_s\mathcal{D}_I\mathcal{D}_J P, \qquad P_{,s\sigma} \equiv \mathrm{e}^I_s\mathrm{e}^J_\sigma\mathcal{D}_I\mathcal{D}_J P\ . \tag{4.30}$$

In the previous expressions, $\mathcal{D}_I$ denotes the covariant derivative associated with G_{IJ} (thus having $\mathcal{D}_I\mathcal{D}_J P \equiv P_{,IJ} - \Gamma^K_{IJ}P_{,K}$).

The evolution equation for σ_a can then be decomposed into a longitudinal part, obtained by contracting (4.28) with u^a, and an orthogonal part obtained by contraction with h_{ab}. By using the relation

$$\dot{P}_{,\sigma} = P_{,\sigma\sigma}\dot{\sigma} + \dot{\theta}P_{,s} + P_{,X\sigma}\,\dot{X}, \tag{4.31}$$

it is not difficult to see that the longitudinal part yields in fact the time derivative of (4.18). What is more interesting is the orthogonal or spatial part. Using several equations collected in the appendix, one can expand the various quantities inside the previous expression in terms

JCAP01(2009)012

of the perturbations $\sigma_a^\perp$ and s_a. After a long but straightforward calculation, the evolution equation for the adiabatic covector can be written in a form close its linear counterpart [11]:

$$(\ddot{\sigma}_a)^\perp + \left[\Theta + \frac{c_s^2}{P_{,X}}\left(\frac{P_{,X}}{c_s^2}\right)^{\cdot} + (c_s^2-1)\frac{Z_{(s)}}{\dot{\sigma}}\right](\dot{\sigma}_a)^\perp + \frac{c_s^2}{P_{,X}}\left[-P_{,\sigma\sigma} - \frac{\dot{\theta}P_{,s}}{\dot{\sigma}} + e^{-3\alpha}\left(e^{3\alpha}\dot{\sigma}P_{,X\sigma}\right)^{\cdot}\right.$$
$$\left. -P_{,X\sigma}Z_{(s)}\right]\sigma_a^\perp + \dot{\sigma}c_s^2 D_a\Theta - c_s^2 D_a(\nabla^c\sigma_c^\perp) = \left[\Xi + \frac{Z_{(\sigma)}}{\dot{\sigma}}\right]\dot{s}_a + \left[\dot{\Xi} - \Xi\left(2\frac{\dot{c}_s}{c_s} - \frac{P_{,\sigma}}{P_{,X}\dot{\sigma}}\right) + M\right]s_a$$
$$-c_s^2 D_a Y_{(s)} + \frac{1}{2\dot{\sigma}}(1-c_s^2)D_a\dot{\Pi} + \frac{c_s^2}{2P_{,X}}\left[P_{,X\sigma} - P_{,XX}Z_{(s)} + e^{-3\alpha}\left(e^{3\alpha}\dot{\sigma}P_{,XX}\right)^{\cdot}\right]D_a\Pi \quad (4.32)$$

In the previous equation we introduced various quantities:

$$Z_{(\sigma)} \equiv \nabla_a s^a + Y_{(\sigma)}\,, \qquad Z_{(s)} \equiv \nabla^a\sigma_a^\perp - Y_{(s)}\,, \quad (4.33)$$
$$\Pi \equiv \sigma_c^\perp\sigma^{\perp c} + s_c s^c\,, \quad (4.34)$$
$$\Xi \equiv \frac{1}{\dot{\sigma}P_{,X}}\left[(1+c_s^2)P_{,s} - c_s^2\dot{\sigma}^2 P_{,Xs}\right]\,, \quad (4.35)$$

and

$$M = \frac{\dot{Z}_{(\sigma)}}{\dot{\sigma}} + \frac{c_s^2 P_{,s}Z_{(s)}}{P_{,X}\dot{\sigma}^2} + \frac{c_s^2 Z_{(\sigma)}}{\dot{\sigma}}\left(2\Theta + \frac{P_{,X\sigma}\dot{\sigma}}{P_{,X}} + \frac{\dot{\sigma}P_\sigma P_{,XX}}{P_{,X}^2} - 2\frac{\dot{c}_s}{c_s^3} - \frac{P_{,XX}\dot{\Pi}}{P_{,X}} - \frac{Z_{(s)}}{\dot{\sigma}}\right)$$
$$+\frac{c_s^2\dot{\Pi}}{2P_{,X}\dot{\sigma}}\left[P_{,Xs} - \frac{P_{,XX}}{P_{,X}}P_{,s}\right]. \quad (4.36)$$

Moreover, we used the integrated volume expansion α introduced in eq. (3.8).

Let us make a few comparisions with the case of a standard Lagrangian: the friction term is not only given by the volume expansion Θ but has a non vanishing contribution coming from the nonlinear speed of sound c_s, which may vary in time ($\dot{c}_s \neq 0$) and may be different from unity $\left(c_s^2 \neq 1\right)$. The last two terms in (4.32), which exhibit a rich dependence on the form of the kinetic term, also vanish for a standard Langrangian $P = X - V(\phi^I)$. Moreover, in that case, Ξ reduces to $2\dot{\theta}$, which encodes all the multi-field effects at linear order, as shown in [25]. The important parameter Ξ plays an equivalent role for Lagrangians of the form $P(X,\phi^I)$ studied in this paper, as shown in [11]: if $\Xi = 0$, the situation is effectively single-field at linear order.

4.2.2 Evolution equation for the entropy covector

Let us now consider the evolution equation for s_a. From eq. (4.13) the time derivative of s_a is given by

$$\dot{s}_a = \dot{\sigma}\,\mathrm{e}_{sI}\mathcal{D}_a\mathrm{e}_\sigma^I - \dot{\theta}\sigma_a. \quad (4.37)$$

Taking another time derivative, one finds

$$\ddot{s}_a = -\ddot{\theta}\sigma_a - \dot{\theta}\dot{\sigma}_a + \frac{\ddot{\sigma}}{\dot{\sigma}}(\dot{s}_a + \dot{\theta}\sigma_a) + \dot{\sigma}\nabla_a\dot{\theta} - \dot{\sigma}^2 R^I_{KLJ}e_{sI}e^J_\sigma e^K_\sigma\nabla_a\phi^L, \quad (4.38)$$

where we have used (4.13) and (4.4) and the equality

$$\mathcal{D}_a\left(\mathcal{D}_u A^I\right) - \mathcal{D}_u\left(\mathcal{D}_a A^I\right) = R^I_{KLJ}\nabla_a\phi^L\dot{\phi}^J A^K \quad (4.39)$$

JCAP01(2009)012

applied to the vector e^I_σ and where R^I_{KLJ} is the Riemann tensor associated to the metric G_{IJ}.[2] We can now use the entropic equation (4.24) to get rid of $\nabla_a\dot\theta$. Furthermore, using the relation

$$\nabla_a P_{,s} = P_{,s\sigma}\sigma_a + P_{,ss}s_a - \frac{P_{,\sigma}}{\dot\sigma}(\dot s_a + \dot\theta\sigma_a) + P_{,Xs}\,\nabla_a X, \tag{4.40}$$

we obtain

$$\begin{aligned}\ddot s_a - \frac{1}{\dot\sigma}\left(\ddot\sigma - \frac{P_{,\sigma}}{P_{,X}}\right)\dot s_a - \left(\frac{P_{,ss}}{P_{,X}} + \dot\theta^2\right)s_a - \nabla_a\left(\nabla_c s^c\right) - \frac{P_{,Xs}}{P_{,X}}\nabla_a X + \dot\sigma^2 R^I_{KLJ}e_{sI}e^J_\sigma e^K_\sigma \nabla_a\phi^L \\ = -2\dot\theta\dot\sigma_a - P_{,s}\frac{\nabla_a P_{,X}}{P^2_{,X}} + \left[\frac{\dot\theta}{\dot\sigma}(\ddot\sigma - \frac{P_{,\sigma}}{P_{,X}}) - \ddot\theta + \frac{P_{,\sigma s}}{P_{,X}}\right]\sigma_a + \nabla_a Y_{(\sigma)}\ .\end{aligned} \tag{4.41}$$

As for the adiabatic equation, the longitudinal part of this equation, upon using the relation

$$\dot P_{,s} = P_{,\sigma s}\dot\sigma - \dot\theta P_{,\sigma} + P_{,Xs}\,\dot X, \tag{4.42}$$

yields the time derivative of eq. (4.24). The orthogonal part, instead, yields

$$\begin{aligned}\ddot s_a - \frac{1}{\dot\sigma}\left(\ddot\sigma - \frac{P_{,\sigma}}{P_{,X}}\right)\dot s_a - \left(\frac{P_{,ss}}{P_{,X}} + \dot\theta^2 - \dot\sigma^2 R_{IKLJ}e^I_s e^L_s e^J_\sigma e^K_\sigma\right)s_a - D_a\left(\nabla_c s^c\right) - \frac{P_{,Xs}}{P_{,X}}D_a X \\ = -2\dot\theta\left(\dot\sigma_a\right)^\perp - P_{,s}\frac{D_a P_{,X}}{P^2_{,X}} + \left[\frac{\dot\theta}{\dot\sigma}(\ddot\sigma - \frac{P_{,\sigma}}{P_{,X}}) - \ddot\theta + \frac{P_{,\sigma s}}{P_{,X}}\right](\sigma_a)^\perp + D_a Y_{(\sigma)}\,,\end{aligned} \tag{4.43}$$

where we have used the property that the covectors $\dot s_a$ and $\ddot s_a$ are purely spatial, i.e., that $(\dot s_a)^\perp = \dot s_a$ and $(\ddot s_a)^\perp = \ddot s_a$. Using (4.24) as well as various expressions collected in the appendix, we finally obtain

$$\begin{aligned}\ddot s_a + \left(\Theta + \frac{\dot P_X}{P_{,X}} - \frac{Z_{(s)}}{\dot\sigma}\right)\dot s_a + \left(\mu^2_s - \frac{Z^2_{(\sigma)}}{\dot\sigma^2} - \frac{Z_{(\sigma)}\Xi}{\dot\sigma c^2_s}\right)s_a - D_a\left(\nabla_c s^c\right) \\ = -\left(\frac{\Xi}{c^2_s} + 2\frac{Z_{(\sigma)}}{\dot\sigma}\right)(\dot\sigma_a)^\perp + \left[\frac{\ddot\sigma}{\dot\sigma}\left(\frac{\Xi}{c^2_s} + 2\frac{Z_{(\sigma)}}{\dot\sigma}\right) - \frac{\dot Z_{(\sigma)}}{\dot\sigma}\right](\sigma_a)^\perp + D_a Y_{(\sigma)} \\ -\frac{1}{2P_{,X}}\left(P_{,Xs} - \frac{P_{,XX}P_{,s}}{P_{,X}}\right)\left(D_a\Pi - \frac{\dot\Pi}{\dot\sigma}\sigma^\perp_a\right)\,,\end{aligned} \tag{4.44}$$

with

$$\mu^2_s \equiv -\frac{P_{,ss}}{P_{,X}} + \dot\sigma^2 R_{IKLJ}e^I_s e^L_s e^J_\sigma e^K_\sigma - \frac{P^2_{,s}}{c^2_s\dot\sigma^2 P^2_{,X}} + \frac{2P_{,Xs}P_{,s}}{P^2_{,X}}\,, \tag{4.45}$$

which mimics its linear counterpart in [11]. Let us remark that the last term in (4.44), absent in the linear theory, also vanishes for a standard Lagrangian.

Starting from the fully nonlinear Klein-Gordon equations, we thus obtained a system of two coupled equations (4.32) and (4.44), controlling the evolution of our nonlinear adiabatic and entropy components. Although they appear quite involved, we will learn that they simplify considerably in physically interesting situations, in particular when considering linear or large scale limits. Moreover, as we will see later, immediately deduced from these equations are the already known evolution equations for the *linear* adiabatic and entropy components. Furthermore, since our equations are exact, they can be used to go beyond the linear order, up to second or higher orders in the expansion.

[2] We thus have $R^I_{KLJ} = \partial_L\Gamma^I_{KJ} - \partial_J\Gamma^I_{KL} + \Gamma^I_{LM}\Gamma^M_{KJ} - \Gamma^I_{JM}\Gamma^M_{KL}$.

JCAP01(2009)012

4.3 Generalized covariant perturbations

In this subsection, we will be first interested in the covariant generalization of the comoving energy density and curvature perturbations in the context of a two-field system. We will then consider the generalization of the curvature perturbation on uniform energy density hypersurfaces.

4.3.1 Comoving energy density covector

Let us introduce the covector

$$\epsilon_a \equiv D_a\rho - \frac{\dot{\rho}}{\dot{\sigma}}\sigma_a^{\perp}\,, \tag{4.46}$$

which can be interpreted as a covariant generalization of the *comoving energy density* perturbation. In order to obtain the explicit expression of ϵ_a in terms of σ_a and s_a, let us rewrite the components (2.15)–(2.18) of the energy-momentum tensor in the form

$$\rho = P_{,X}\dot{\sigma}^2 - P, \tag{4.47}$$

$$p = \frac{P_{,X}}{3}\Pi + P, \tag{4.48}$$

$$q_a = -P_{,X}\dot{\sigma}\sigma_a^{\perp}\,, \tag{4.49}$$

$$\pi_{ab} = P_{,X}\left(\Pi_{ab} - \frac{1}{3}h_{ab}\Pi\right), \tag{4.50}$$

where we have defined

$$\Pi_{ab} \equiv \sigma_a^{\perp}\sigma_b^{\perp} + s_a s_b\,, \tag{4.51}$$

while the quantity Π has already been introduced in (4.34).
Using (4.47), one finds

$$D_a\rho = (P_{,XX}\dot{\sigma}^2 - P_{,X})\left(\dot{\sigma}D_a\dot{\sigma} - \frac{D_a\Pi}{2}\right) + 2P_{,X}\dot{\sigma}D_a\dot{\sigma} - P_{,\sigma}\sigma_a^{\perp} - P_{,s}s_a + \dot{\sigma}^2\left(P_{,X\sigma}\sigma_a^{\perp} + P_{,Xs}s_a\right),$$

$$\dot{\rho} = (P_{,XX}\dot{\sigma}^2 - P_{,X})\left(\dot{\sigma}\ddot{\sigma} - \frac{\dot{\Pi}}{2}\right) + 2P_{,X}\dot{\sigma}\ddot{\sigma} - P_{,\sigma}\dot{\sigma} + P_{,X\sigma}\,\dot{\sigma}^3\,, \tag{4.52}$$

from which one obtains

$$\epsilon_a = \frac{P_{,X}}{c_s^2}\left(\dot{\sigma}\,(\dot{\sigma}_a)^{\perp} - \ddot{\sigma}\sigma_a^{\perp}\right) - \frac{P_{,X}}{c_s^2}\left(\dot{\sigma}\Xi + Z_{(\sigma)}\right)s_a + \frac{1}{2}(P_{,X} - \dot{\sigma}^2 P_{,XX})\left(D_a\Pi - \frac{\dot{\Pi}}{\dot{\sigma}}\sigma_a^{\perp}\right). \tag{4.53}$$

This expression can be employed to rewrite eq. (4.44) for the entropy covector s_a in a useful different form. As noticed above, the longitudinal projection of eq. (4.41) yields the time derivative of (4.24), which reads

$$-\frac{\dot{\theta}}{\dot{\sigma}}\frac{P_{,\sigma}}{P_{,X}} - \ddot{\theta} + \frac{P_{,\sigma s}}{P_{,X}} = \frac{\dot{\theta}}{\dot{\sigma}}\ddot{\sigma} - \frac{P_{,Xs}\dot{X}}{P_{,X}\dot{\sigma}} + \frac{\dot{P}_{,X}P_{,s}}{\dot{\sigma}P_{,X}^2} - \frac{\dot{Z}_{(\sigma)}}{\dot{\sigma}}\,. \tag{4.54}$$

JCAP01(2009)012

This relation, together with eqs. (4.15) and (4.53), enables us to reexpress (4.44) as

$$\ddot{s}_a + \left[\Theta + \frac{\dot{P}_{,X}}{P_{,X}} - \frac{Z_{(s)}}{\dot{\sigma}}\right]\dot{s}_a + \left[\mu_s^2 + \frac{\Xi^2}{c_s^2} + \frac{Z_{(\sigma)}}{\dot{\sigma}}\left(\frac{Z_{(\sigma)}}{\dot{\sigma}} + 2\,\Xi\right)\right] s_a - D_a\left(\nabla_c s^c\right)$$
$$= -\frac{1}{P_{,X}\dot{\sigma}}\left(\Xi + 2\frac{c_s^2}{\dot{\sigma}}Z_{(\sigma)}\right)\epsilon_a + \frac{1}{\dot{\sigma}}\left(1 - \frac{1}{2c_s^2}\right)\left(\Xi + 2\frac{c_s^2}{\dot{\sigma}}Z_{(\sigma)}\right)\left(D_a\Pi - \frac{\dot{\Pi}}{\dot{\sigma}}\sigma_a^{\perp}\right)$$
$$-\frac{\dot{Z}_{(\sigma)}}{\dot{\sigma}}\sigma_a^{\perp} + D_a Y_{(\sigma)}\,. \tag{4.55}$$

As in the linear theory [11], this gives us an alternative expression for the evolution equation for s_a, in which the comoving energy density perturbation appears explicitely on the right hand side. This expression will be useful in section 5.2 when discussing the large-scale evolution of s_a.

4.3.2 Comoving curvature covector

Together with the comoving energy density, the comoving curvature perturbation can be generalized. For the general case of several scalar fields, this is done by defining the comoving integrated expansion perturbation (recall the expression for q_a in (4.49)),

$$\mathcal{R}_a \equiv -D_a\alpha - \frac{\dot{\alpha}}{P_{,X}\dot{\sigma}^2}q_a. \tag{4.56}$$

The definition of the Sasaki-Mukhanov covector given for a single scalar field in eq. (3.10) can then be extended to the case of several fields, by defining for each field

$$Q_a^I \equiv D_a\phi^I - \frac{\dot{\phi}^I}{\dot{\alpha}}D_a\alpha\,. \tag{4.57}$$

Thus, the comoving covector $\mathcal{R}_a$ can also be written as

$$\mathcal{R}_a = \frac{\dot{\alpha}}{(\dot{\phi}_J\dot{\phi}^J)}\,\dot{\phi}_I Q_a^I. \tag{4.58}$$

In the *two*-field case, the definition (4.56) reduces, using (4.49), to

$$\mathcal{R}_a \equiv -D_a\alpha + \frac{\dot{\alpha}}{\dot{\sigma}}\sigma_a^{\perp}. \tag{4.59}$$

Furthermore, one can generalize the Sasaki-Mukhanov variable to the *adiabatic* covector by defining

$$Q_a \equiv \mathrm{e}_{\sigma I}Q_a^I = \sigma_a^{\perp} - \frac{\dot{\sigma}}{\dot{\alpha}}D_a\alpha. \tag{4.60}$$

Following [21], instead of giving the evolution equation of $\mathcal{R}_a$, we will use a fluid description by considering the covariant generalization of the uniform density curvature perturbation, i.e., the integrated expansion perturbation on uniform density hypersurfaces ζ_a, defined in eq. (3.11). In the two-field case, these two quantities are related by

$$\zeta_a + \mathcal{R}_a = -\frac{\dot{\alpha}}{\dot{\rho}}\epsilon_a. \tag{4.61}$$

JCAP01(2009)012

In contrast with the case of a single scalar field, which can always be described as a perfect fluid, the total energy-momentum for two or more scalar fields corresponds in general to that of a dissipative fluid: the nonlinear formalism developed in [20] will thus be useful in this case.

The adiabatic Klein-Gordon equation (4.18) can be rewritten as a continuity equation for the total energy density (4.47) and pressure (4.48), which reads

$$\dot{\rho} + \Theta(\rho + p) = \mathcal{D}, \tag{4.62}$$

with the *dissipative* term

$$\mathcal{D} = P_{,X}\left(\dot{\sigma} Z_{(s)} + \frac{1}{3}\Theta\Pi + \frac{1}{2}\dot{\Pi}\right). \tag{4.63}$$

In [20] it was shown that the evolution equation for ζ_a for a dissipative fluid, which generalizes (3.12), is given by

$$\dot{\zeta}_a = \frac{\Theta^2}{3\dot{\rho}}\left(\Gamma_a + \Sigma_a\right), \tag{4.64}$$

where the second source term on the right hand side, due to the dissipative nature of the fluid, is defined in terms of $\mathcal{D}$ as

$$\Sigma_a \equiv -\frac{1}{\Theta}\left(D_a\mathcal{D} - \frac{\dot{\mathcal{D}}}{\dot{\rho}}D_a\rho\right) + \frac{\mathcal{D}}{\Theta^2}\left(D_a\Theta - \frac{\dot{\Theta}}{\dot{\rho}}D_a\rho\right). \tag{4.65}$$

Let us return to the covector Γ_a. Substituting the expression (4.48) for p into its definition (3.13), as well as using

$$\dot{P} = P_{,\sigma}\dot{\sigma} + P_{,X}\left(\dot{\sigma}\ddot{\sigma} - \frac{1}{2}\dot{\Pi}\right), \tag{4.66}$$

$$D_aP = P_{,\sigma}\sigma_a^{\perp} + P_{,s}s_a + P_{,X}\left(\dot{\sigma}(\dot{\sigma}_a^{\perp} - \dot{\theta}s_a) - \frac{1}{2}D_a\Pi\right), \tag{4.67}$$

one obtains

$$\begin{aligned}\Gamma_a = &-\epsilon_a\frac{\dot{\sigma}}{\dot{\rho}}\left[(1+c_s^2)P_{,\sigma} - c_s^2\dot{\sigma}^2P_{,X\sigma}\right] + P_{,X}\dot{\sigma}\Xi s_a - P_{,X}c_s^2\left(D_a\Pi - \frac{\dot{\Pi}}{\dot{\rho}}D_a\rho\right)\\ &+\frac{1}{3}\left(D_a\left(P_{,X}\Pi\right) - \frac{(P_{,X}\Pi)^{\cdot}}{\dot{\rho}}D_a\rho\right)\end{aligned} \tag{4.68}$$

where we have introduced ϵ_a defined in eq. (4.46). The above equation expresses the nonlinear nonadiabatic pressure perturbation in the two-field case, which sources eq. (4.64). It will be useful in the next section, where we will consider both the linear and super-Hubble approximations of our evolution equations.

The evolution of ζ_a, governed by eq. (4.64), is thus sourced by a rather complicated term obtained by summing Γ_a and Σ_a in eq. (4.65). We will learn in the next sections that this term simplifies considerably in physically interesting cases, when either the linear or the super-Hubble approximations are taken.

JCAP01(2009)012

5 Approximate equations

In this section we study the evolution equations of the two-field system under two types of approximations: the linear limit and the limit in which we neglect higher orders in spatial gradients. In an expanding FLRW universe, the latter corresponds to the *large scale* limit. In the rest of the paper we will use the symbol $\simeq$ to denote an equality at the linear level, and the symbol $\approx$ to denote an equality valid only on large scales.

5.1 Homogeneous and linearized equations

In many cosmological applications, since our Universe appears to be close to a FLRW universe on large scales, it is sufficient to restrict oneself to the *linearized* version of the evolution equations. We first consider this linearization procedure directly at the level of the covariant equations, as done in [22].

In a strictly FLRW universe, all the spatial gradients vanish and therefore

$$\sigma_a^\perp = 0 \qquad , \qquad s_a = 0 \,. \qquad \text{(FLRW)} \tag{5.1}$$

Consequently, the scalar quantities $Y_{(s)}$ and $Y_{(\sigma)}$, defined respectively in (4.16) and (4.25), vanish and the evolution equations for σ and θ, respectively (4.15) and (4.24), reduce to

$$\ddot{\sigma} + \left(3H + \frac{\dot{P}_{,X}}{P_{,X}}\right)\dot{\sigma} - \frac{P_{,\sigma}}{P_{,X}} = 0\,, \qquad \text{(FLRW)} \tag{5.2}$$

$$\dot{\sigma}\dot{\theta} - \frac{P_{,s}}{P_{,X}} = 0 \qquad \text{(FLRW)} \tag{5.3}$$

where we have introduced the Hubble parameter $H = \Theta/3$. Not surprisingly, the above equations exactly correspond to the homogeneous equations given in [11]. Furthermore, in a FLRW universe, all the terms in eq. (4.32) for $\sigma_a^\perp$ and eq. (4.55) for s_a vanish.

At linearized order, we treat the covectors $\sigma_a^\perp$ and s_a, vanishing at zeroth order, as *first-order* quantities. Similarly, their derivatives $\dot{s}_a$, $\ddot{s}_a$, $(\dot{\sigma}_a)^\perp$ and $(\ddot{\sigma}_a)^\perp$ are first-order quantities. Therefore the linearized version of the evolution equations are simply obtained by keeping only the homogeneous terms in the coefficients multiplying the spatial projection of σ_a, s_a and their derivatives. The linearized versions of (4.32) and (4.55) are thus (recall the definition of Ξ in (4.35))

$$\begin{aligned}(\ddot{\sigma}_a)^\perp &+ \left[3H + \frac{c_s^2}{P_{,X}}\left(\frac{P_{,X}}{c_s^2}\right)^{\cdot}\right](\dot{\sigma}_a)^\perp + \frac{c_s^2}{P_{,X}}\left[-P_{,\sigma\sigma} - P_{,X}\dot{\theta}^2 + e^{-3\alpha}\left(e^{3\alpha}\dot{\sigma}P_{,X\sigma}\right)^{\cdot}\right]\sigma_a^\perp \\ &+\dot{\sigma}c_s^2 D_a\Theta - c_s^2 D_a\left(D^c\sigma_c^\perp\right) \simeq \Xi\dot{s}_a + \left[\dot{\Xi} - \Xi\left(\frac{(Hc_s^2)^{\cdot}}{Hc_s^2} - \frac{P_{,\sigma}}{P_{,X}\dot{\sigma}} - \frac{\dot{H}}{H}\right)\right]s_a\end{aligned} \tag{5.4}$$

and

$$\ddot{s}_a + \left(3H + \frac{\dot{P}_{,X}}{P_{,X}}\right)\dot{s}_a + \left(\mu_s^2 + \frac{\Xi^2}{c_s^2}\right)s_a - D_a\left(D_c s^c\right) \simeq -\frac{\Xi}{P_{,X}\dot{\sigma}}\epsilon_a\,. \tag{5.5}$$

Note that the terms involving $Y_{(s)}$, $Y_{(\sigma)}$ and Π have disappeared, since these scalars are *quadratic* in first-order quantities. We have also replaced $\nabla^c\sigma_c^\perp$ by $D^c\sigma_c^\perp$, as well as $\nabla^c s_c$ by $D^c s_c$, since their difference is quadratic in first-order quantities, according to (4.17). Indeed,

JCAP01(2009)012

the acceleration vector a^b, which vanishes at zeroth order, is considered as a first-order quantity.

One can also linearize the evolution equation for ζ_a. As discussed above, the terms containing $Y_{(s)}$ and Π can be neglected. The dissipative term $\mathcal{D}$ thus reduces to

$$\mathcal{D} \simeq P_{,X}\dot{\sigma}D^a\sigma_a^{\perp}, \tag{5.6}$$

while the expression for ϵ_a becomes

$$\epsilon_a \simeq \frac{P_{,X}}{c_s^2}\left[\dot{\sigma}\dot{\sigma}_a^{\perp} - \ddot{\sigma}\sigma_a^{\perp} - \dot{\sigma}\Xi s_a\right]. \tag{5.7}$$

On the other hand, the expression for Γ_a becomes

$$\Gamma_a \simeq -\epsilon_a\frac{\dot{\sigma}}{\dot{\rho}}\left[(1+c_s^2)P_{,\sigma} - c_s^2\dot{\sigma}^2P_{,X\sigma}\right] + P_{,X}\dot{\sigma}\Xi s_a\,, \tag{5.8}$$

from which it is immediate to obtain the expression for $\dot{\zeta}_a$.

5.2 Expansion in spatial gradients

Apart from the linearization procedure, there is another approximation in the cosmological context that is used to describe the Universe on very large scales. This approximation is based on an expansion in spatial gradients, which are small for scales larger than the local Hubble radius [32–34]. Recently for instance, it has been adopted in [35] for studying nonlinear perturbations by means of the ADM formalism, in a system describing a single scalar field with arbitrary kinetic terms, up to second order in the gradient expansion. In the present article, we restrict ourselves to the leading order: in this perspective one sees, from their definition (4.7), that $\sigma_a^{\perp}$ and s_a are first-order quantities with respect to spatial gradients because they are linear combinations of spatial gradients. The scalars $Y_{(s)}$ and $Y_{(\sigma)}$ however are second-order with respect to spatial gradients since they are quadratic in $\sigma_a^{\perp}$ and s_a (or their time derivatives). Hence, the right hand side of eq. (4.15) and of eq. (4.24) can be neglected on large scales, so that these two equations become, in the large-scale limit,

$$\ddot{\sigma} + \left(\Theta + \frac{\dot{P}_{,X}}{P_{,X}}\right)\dot{\sigma} - \frac{P_{,\sigma}}{P_{,X}} \approx 0, \tag{5.9}$$

$$\dot{\theta} - \frac{P_{,s}}{P_{,X}\dot{\sigma}} \approx 0. \tag{5.10}$$

Although they look very similar to the homogeneous equations (5.2) and (5.3), these equations are fully inhomogeneous and encode the evolution of nonlinearities on large scales. This limit illustrates the separate universe picture [36, 37] where the inhomogeneous universe can be described, on large scales, as juxtaposed Friedmann homogeneous universes.

If, so far, the order in spatial gradients seems to coincide with the perturbative classification of the previous subsection, it differs however for the term

$$\nabla^c\sigma_c^{\perp} = D^c\sigma_c^{\perp} + a^c\sigma_c^{\perp}, \tag{5.11}$$

which is first order perturbatively but second order in spatial gradients, at least for the first term on the right hand side, since $\sigma_c^{\perp}$ is already first order in spatial gradients. For the

JCAP01(2009)012

second term, it has been shown in [21] that u^a can be chosen so that a^c is at least first order in spatial gradients. We will explicitly verify it in the next section by working in a coordinate system.

With these prescriptions, the evolution equation of $\sigma_a^\perp$ and s_a obtained at lowest order in spatial gradients become

$$\begin{aligned}(\ddot{\sigma}_a)^\perp + \left[\Theta + \frac{c_s^2}{P_{,X}}\left(\frac{P_{,X}}{c_s^2}\right)^{\cdot}\right](\dot{\sigma}_a)^\perp + \frac{c_s^2}{P_{,X}}\left[-P_{,\sigma\sigma} - P_{,X}\dot{\theta}^2 + e^{-3\alpha}\left(e^{3\alpha}\dot{\sigma}P_{,X\sigma}\right)^{\cdot}\right]\sigma_a^\perp + \dot{\sigma}c_s^2 D_a\Theta \\ \approx \quad \Xi\dot{s}_a + \left[\dot{\Xi} - \Xi\left(2\frac{\dot{c}_s}{c_s} - \frac{P_{,\sigma}}{P_{,X}\dot{\sigma}}\right)\right]s_a \end{aligned} \tag{5.12}$$

and

$$\ddot{s}_a + \left(\Theta + \frac{\dot{P}_{,X}}{P_{,X}}\right)\dot{s}_a + \left(\mu_s^2 + \frac{\Xi^2}{c_s^2}\right)s_a \approx -\frac{\Xi}{P_{,X}\dot{\sigma}}\epsilon_a \tag{5.13}$$

where we have dropped the terms containing Π in (4.55), which are two orders higher than s_a in spatial gradients.

We now expand the evolution equation for ζ_a, eq. (4.64), by neglecting higher-order spatial gradients in the two terms on the right hand side of this equation. The nonadiabatic pressure perturbation becomes

$$\Gamma_a \approx -\epsilon_a\frac{\dot{\sigma}}{\dot{\rho}}\left[(1+c_s^2)P_{,\sigma} - c_s^2\dot{\sigma}^2 P_{,X\sigma}\right] + P_{,X}\dot{\sigma}\Xi s_a, \tag{5.14}$$

while the dissipative nonadiabatic pressure perturbation Σ_a can be completely dropped, since the dissipative term $\mathcal{D}$ is at least second order in the spatial gradients and thus Σ_a is third order in the spatial gradients. Equation (4.64) therefore becomes, on large scales,

$$\dot{\zeta}_a \approx -\frac{1}{3P_{,X}^2\dot{\sigma}^3}\left[(1+c_s^2)P_{,\sigma} - c_s^2\dot{\sigma}^2 P_{,X\sigma}\right]\epsilon_a - \frac{\Theta\Xi}{3\dot{\sigma}}s_a. \tag{5.15}$$

Note that the lowest order limit in spatial gradients of the evolution equations of $\sigma_a^\perp$, s_a and ζ_a, respectively eqs. (5.12)–(5.13) and (5.15), are similar to their linear counterparts except for the terms $D_a(D^c\sigma_c^\perp)$ and $D_a(D^c s_c)$, which are third order in spatial gradients and therefore negligible in the spatial gradient expansion. This is because in these equations the terms that are higher than linear order in the perturbative expansion turn out to be also higher than first order in the spatial gradient expansion.

We now concentrate our attention on the comoving energy density perturbation, ϵ_a, defined in eq. (4.46). Until now we have only made use of the Klein-Gordon equations of the scalar fields. However, in order to study the behavior of the comoving energy density, we will now make use of the Einstein equations, in particular of the so-called *constraint equations*. The projection of the Einstein equations along u^a yields the *energy constraint* in a covariant form,

$$u^a G_{ab} u^b = 8\pi G\rho. \tag{5.16}$$

Assuming that the vector field u^a is hypersurface orthogonal, it is possible to use the Gauss-Codazzi equations and the decomposition

$$D_b u_a = \sigma_{ab} + \frac{1}{3}\Theta h_{ab}, \tag{5.17}$$

JCAP01(2009)012

which is the spatially projected version of (2.6) (with $\omega_{ab} = 0$ since u^a is here hypersurface orthogonal), in order to rewrite the energy constraint as

$$\frac{1}{2}\left({}^{(3)}R + \frac{2}{3}\Theta^2 - \sigma_{ab}\sigma^{ab}\right) = 8\pi G\rho, \tag{5.18}$$

where ${}^{(3)}R$ is the intrinsic Ricci scalar of the space-like hypersurfaces orthogonal to u^a.

The mixed projection of Einstein's equations yields the covariant *momentum constraint*

$$u^b G_{bc} h^c_a = 8\pi G q_a, \tag{5.19}$$

which can be rewritten, via Gauss-Codazzi relations and eq. (5.17), as

$$D_b \sigma_a{}^b - \frac{1}{3} D_a \Theta = 8\,\pi G q_a. \tag{5.20}$$

By combining the energy and momentum constraints, one obtains the *nonlinear covariant* version of the generalized Poisson equation, which in the linear theory relates the comoving energy density to the Bardeen's potential defined from the curvature perturbation. Here one finds

$$\frac{1}{2} D_a \left({}^{(3)}R - \sigma_{bc}\sigma^{bc}\right) + \Theta D_b \sigma^b_a = 8\pi G\, \tilde{\epsilon}_a, \tag{5.21}$$

where we have introduced on the right hand side the quantity

$$\tilde{\epsilon}_a \equiv D_a \rho - \Theta q_a = D_a \rho + P_{,X} \Theta \dot{\sigma} \sigma^{\perp}_a. \tag{5.22}$$

This quantity can be seen as an alternative generalization of the comoving energy density perturbation, since, in the linear limit, it is equivalent to ϵ_a defined in (4.46). In the fully nonlinear case, the two quantities in principle are different: using (4.62) one gets

$$\tilde{\epsilon}_a - \epsilon_a = \frac{1}{\dot{\sigma}} \left(\mathcal{D} - \frac{1}{3} P_{,X} \Theta \Pi\right) \sigma^{\perp}_a. \tag{5.23}$$

This difference becomes however negligible on large scales,

$$\epsilon_a \approx \tilde{\epsilon}_a. \tag{5.24}$$

Now, the left hand side of eq. (5.21) contains the projected gradient of the Ricci scalar, $D_a{}^{(3)}R$. From its definition in terms of derivatives of the metric, it can be shown that, for a perturbed FLRW universe, this term is of third order in the spatial gradients. Equation (5.21) can thus be used to show that ϵ_a in eqs. (4.61), (5.13) and (5.15) can be neglected on large scales, if the shear can also be neglected in this limit. Indeed, on large scales, the shear rapidly decreases in an expanding perturbed FLRW universe. Thus, in this limit the comoving and uniform density integrated expansion perturbations ζ_a and $\mathcal{R}_a$ *coincide* (up to a sign),

$$\zeta_a + \mathcal{R}_a \approx 0. \tag{5.25}$$

Furthermore, one can rewrite eqs. (5.13) and (5.15) as a closed coupled system of equations, describing the large-scale nonlinear evolution of adiabatic and entropy perturbations,

$$\ddot{s}_a + \left(\Theta + \frac{\dot{P}_{,X}}{P_{,X}}\right) \dot{s}_a + \left(\mu_s^2 + \frac{\Xi^2}{c_s^2}\right) s_a \approx 0 \tag{5.26}$$

JCAP01(2009)012

and

$$\dot{\zeta}_a \approx -\frac{\Theta\Xi}{3\dot{\sigma}} s_a. \tag{5.27}$$

Remarkably, these equations for the covectors ζ_a and s_a look very similar to their linear counterparts, studied in [11], although they extend them to describe the full nonlinear evolution for the perturbations. Despite their compact appearence, they exhibit a quite involved dependence on the form of the Lagrangian. For instance, the mass term μ_s^2, which reduces to $V_{ss} - \dot{\theta}^2$ for standard Lagrangian, also depends in our case on the entropic projection of the mixed derivative $P_{,XI}$, a characteristic shared by the important parameter Ξ.

As explained in section 2, we stress again that the equations derived in this subsection in the large scale limit are also valid for two-field DBI inflation with the adequate Lagrangian eq. (2.12). In the next sections, always following [21], we will show how to translate our results, obtained within the nonlinear formalism, in the more familiar coordinate-based approach, obtaining quite straightforwardly the evolution equations for the perturbations up to second order.

6 Linear perturbations

In this and next section, we relate the covariant approach to the more familiar coordinate based formalism. We analyze the linear perturbations in the present section, and we then consider an expansion up to second order in the next one.

Let us thus introduce generic coordinates $x^\mu = \{t, x^i\}$ to describe an almost-FLRW spacetime. Here a prime will denote a partial derivative with respect to the cosmic time t, i.e. $' \equiv \partial/\partial t$, since the dot has been used till now to denote the Lie derivative with respect to u^a.

The background spacetime is a FLRW spacetime, endowed with the metric

$$ds^2 = \bar{g}_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = -dt^2 + a(t)^2 \gamma_{ij} dx^i dx^j. \tag{6.1}$$

At linear order, the spacetime geometry is described by the perturbed metric

$$ds^2 = (\bar{g}_{\mu\nu} + \delta g_{\mu\nu})\, dx^\mu dx^\nu, \tag{6.2}$$

where the components of the metric perturbations can be written as

$$\delta g_{00} = -2A, \quad \delta g_{0i} = aB_i, \quad \delta g_{ij} = a^2 H_{ij}. \tag{6.3}$$

We decompose, as usual, B_i and H_{ij} in the forms

$$B_i = \vec{\nabla}_i B + B_i^V, \tag{6.4}$$

$$H_{ij} = -2\psi\gamma_{ij} + 2\vec{\nabla}_i\vec{\nabla}_j E + 2\vec{\nabla}_{(i} E_{j)}^V + 2E_{ij}^T, \tag{6.5}$$

where B_i^V and E_i^V are transverse, i.e., $\vec{\nabla}_i B^{Vi} = 0 = \vec{\nabla}_i E^{Vi}$, and E_{ij}^T is transverse and traceless, i.e., $\vec{\nabla}_i E^{Tij} = 0$ and $\gamma^{ij} E_{ij}^T = 0$. Here $\vec{\nabla}_i$ denotes the three-dimensional covariant derivative with respect to the homogeneous spatial metric γ_{ij} (which is also used to lower or raise the spatial indices). The matter fields are similarly decomposed into a background and a perturbed part,

$$\phi^I(t, x^i) = \bar{\phi}^I(t) + \delta\phi^I(t, x^i). \tag{6.6}$$

JCAP01(2009)012

We now need to specify the components of the unit vector u^a, which defines the time derivation in our covariant approach. At zeroth order, it is natural to take it orthogonal to the homogeneous slices. At first order, [21] chose, for simplicity, u^μ such that $u_i = 0$. This implies that, up to first order, the components of u^μ are given by

$$u^\mu = \{1 - A, -B^i/a\}, \tag{6.7}$$

and those of the *acceleration* vector are given by

$$a^\mu = \{0, \vec{\nabla}^i A/a^2\} \ . \tag{6.8}$$

This confirms that a^μ can be considered as first order in spatial gradients, in agreement with the assumption of the previous section.

Since the formalism relies on many covectors, it is useful to first consider a generic covector Y_a and work out the components of its time derivative $\dot{Y}_a$. To make the explicit calculation, it is convenient to replace in the definition of the Lie derivative (2.2) the covariant derivatives by partial derivatives and write

$$\dot{Y}_a = u^b \partial_b Y_a + Y_b \partial_a u^b. \tag{6.9}$$

At zeroth order, the components of $\dot{Y}_a$ are simply

$$\bar{\dot{Y}}_\mu = \{\bar{Y}_0', 0, 0, 0\}, \tag{6.10}$$

assuming that the spatial components $\bar{Y}_i$ vanish so as to respect the symmetries of the geometry. At first order, we get from (6.9) and (6.7)

$$\delta(\dot{Y}_0) = \delta Y_0' - (\bar{Y}_0 A)', \qquad \delta(\dot{Y}_i) = \delta Y_i' - \bar{Y}_0 \partial_i A. \tag{6.11}$$

Let us now consider, for the special case of two scalar fields, the adiabatic and entropic covectors σ_a and s_a, which we have introduced earlier. Note that with the choice of four-velocity (6.7) $\sigma_i^\perp = \sigma_i$. The background equations of motion can be deduced immediately from eqs. (4.18) and (4.24) and read

$$\frac{\bar{\sigma}''}{\bar{c}_s^2} + 3H\bar{\sigma}' + \frac{\bar{P}_{,X\sigma}}{\bar{P}_{,X}}\bar{\sigma}'^2 - \frac{\bar{P}_{,\sigma}}{\bar{P}_{,X}} = 0, \tag{6.12}$$

$$\bar{\sigma}'\bar{\theta}' - \frac{\bar{P}_{,s}}{\bar{P}_{,X}} = 0, \tag{6.13}$$

with

$$\bar{\sigma}_0 = \bar{\sigma}' \equiv \sqrt{\bar{G}_{IJ}\bar{\phi}^{I\prime}\bar{\phi}^{J\prime}}. \tag{6.14}$$

Note that we used the symbol $\bar{\theta}'$ to represent the background value of $\dot{\theta}$. Again, as there is no angle θ, this is merely a notational convenience.

From its definition, eq. (4.5), one finds that the *spatial* components of σ_a at linear order can be expressed as

$$\delta\sigma_i = \bar{e}_{\sigma I}\partial_i \delta\phi^I = \partial_i \delta\sigma \ . \tag{6.15}$$

We use the notation

$$\delta\sigma \equiv \bar{e}_{\sigma I}\partial_i \delta\phi^I, \tag{6.16}$$

JCAP01(2009)012

in agreement with previous studies in the literature. By using eq. (6.11) with (6.14)–(6.15) one finds that the spatial components of the first and second time derivatives are given by

$$\delta(\dot{\sigma}_i) = \partial_i \left(\delta\sigma' - \bar{\sigma}' A\right), \qquad \delta(\ddot{\sigma}_i) = \partial_i \left(\delta\sigma'' - \bar{\sigma}' A' - 2\bar{\sigma}'' A\right). \tag{6.17}$$

The same procedure for s_a gives

$$\delta s_i = \partial_i \delta s, \qquad \delta s \equiv \bar{e}_{sI} \partial_i \delta\phi^I, \tag{6.18}$$

which also coincides with the notation of [11]. Since s_a, in contrast to σ_a, has no longitudinal component, $\bar{s}_0 = 0$ and the spatial components of $\dot{s}_a$ and $\ddot{s}_a$ are simply

$$\delta(\dot{s}_i) = \partial_i \delta s', \qquad \delta(\ddot{s}_i) = \partial_i \delta s''. \tag{6.19}$$

Plugging the explicit components (6.17) and (6.19) into the linearized equations for σ_a and s_a, given by (5.4) and (5.5) respectively, one easily obtains the linearized equations for $\delta\sigma$ and δs. These read, respectively,

$$\begin{aligned}
&\delta\sigma'' + \left[3H + \frac{\bar{c}_s^2}{\bar{P}_{,X}}\left(\frac{\bar{P}_{,X}}{\bar{c}_s^2}\right)'\right]\delta\sigma' + \frac{\bar{c}_s^2}{\bar{P}_{,X}}\left[-\bar{P}_{,\sigma\sigma} - \bar{P}_{,X}\bar{\theta}'^2 + e^{-3\bar{\alpha}}\left(e^{3\bar{\alpha}}\bar{\sigma}'\bar{P}_{,X\sigma}\right)'\right]\delta\sigma \\
&-\bar{\sigma}'\left[A' + \left(2\frac{\bar{\sigma}''}{\bar{\sigma}'} + 3H\left(1+\bar{c}_s^2\right) + \frac{\bar{c}_s^2}{\bar{P}_{,X}}\left(\frac{\bar{P}_{,X}}{\bar{c}_s^2}\right)'\right)A + 3\bar{c}_s^2\psi' - \bar{c}_s^2\vec{\nabla}^2(E' - B/a)\right] - \frac{\bar{c}_s^2}{a^2}\vec{\nabla}^2\delta\sigma \\
&\quad = \bar{\Xi}\delta s' + \left[\bar{\Xi}' - \bar{\Xi}\left(2\frac{\bar{c}_s'}{\bar{c}_s} - \frac{\bar{P}_{,\sigma}}{\bar{P}_{,X}\bar{\sigma}'}\right)\right]\delta s
\end{aligned} \tag{6.20}$$

and

$$\delta s'' + \left(3H + \frac{\bar{P}_{,X}'}{\bar{P}_{,X}}\right)\delta s' + \left(\bar{\mu}_s^2 + \frac{\bar{\Xi}^2}{\bar{c}_s^2}\right)\delta s - \frac{1}{a^2}\vec{\nabla}^2\delta s = -\frac{\bar{\Xi}}{\bar{P}_{,X}\,\bar{\sigma}'}\delta\epsilon\,, \tag{6.21}$$

where we have used

$$\bar{\Theta} = 3\,H, \qquad \delta\Theta = -3HA - 3\psi' + \vec{\nabla}^2(E' - B/a)\,. \tag{6.22}$$

In the latter equation we have introduced the first-order comoving energy density perturbation $\delta\epsilon$, defined by

$$\delta\epsilon_i = \partial_i \delta\epsilon, \qquad \delta\epsilon \equiv \delta\rho - \frac{\bar{\rho}'}{\bar{\sigma}'}\delta\sigma, \tag{6.23}$$

which follows from the definition (4.46) of ϵ_a. Using

$$\begin{aligned}
\bar{\rho} &= \bar{P}_{,X}\bar{\sigma}'^2 - \bar{P}\,, \\
\delta\rho &= \frac{\bar{P}_{,X}\,\bar{\sigma}'}{\bar{c}_s^2}\left(\delta\sigma' - \bar{\sigma}' A - \bar{\Xi}\delta s\right) + \left(\bar{P}_{,X\sigma}\bar{\sigma}'^2 - \bar{P}_{,\sigma}\right)\delta\sigma,
\end{aligned} \tag{6.24}$$

one sees that $\delta\epsilon$ can be expressed as

$$\delta\epsilon = \frac{\bar{P}_{,X}\,\bar{\sigma}'}{\bar{c}_s^2}\left[\delta\sigma' - \bar{\sigma}' A - \frac{\bar{\sigma}''}{\bar{\sigma}'}\delta\sigma - \bar{\Xi}\delta s\right]. \tag{6.25}$$

Moreover, linearizing the spatial components of the energy constraint (5.18) yields

$$3H\left(\psi' + HA\right) - \frac{1}{a^2}\vec{\nabla}^2\left[\psi + H(a^2E' - aB)\right] = -4\pi G\,\delta\rho, \tag{6.26}$$

JCAP01(2009)012

while the momentum constraint (5.20) gives, since $\delta q_i = -\bar{P}_{,X}\,\bar{\sigma}'\partial_i\delta\sigma$,

$$\psi' + HA = 4\pi G\,\bar{P}_{,X}\,\bar{\sigma}'\delta\sigma. \tag{6.27}$$

Combining the two above constraints yields the relativistic Poisson-like equation

$$\frac{1}{a^2}\vec{\nabla}^2\left[\psi + H(a^2E' - aB)\right] = 4\pi G\,\delta\epsilon, \tag{6.28}$$

which can also be directly obtained by linearizing the spatial components of eq. (5.21). This equation shows that the comoving energy density perturbation $\delta\epsilon$ is second order in the spatial gradients, and thus negligible on large scales in eq. (6.21).

The quantity $\delta\sigma$ is not gauge-invariant, in contrast with δs. This is why it is useful to consider the gauge invariant Sasaki-Mukhanov variable $Q_{\rm SM}$, defined as [38]

$$Q_{\rm SM} \equiv \delta\sigma + \frac{\bar{\sigma}'}{H}\psi. \tag{6.29}$$

Note that the above traditional definition does not follow exactly from the definition of Q_a given earlier in eq. (4.60). Indeed, from Q_a, one can extract a scalar quantity Q defined as

$$Q_i = \partial_i Q, \qquad Q \equiv \delta\sigma - \frac{\bar{\sigma}'}{H}\delta\alpha, \tag{6.30}$$

where $\delta\alpha$ can be written in terms of metric perturbations by making use of eqs. (3.8) and (6.22) (see [19]),

$$\delta\alpha = -\psi + \frac{1}{3}\int \vec{\nabla}^2(E' - B/a)dt. \tag{6.31}$$

Thus the scalar variable Q coincides with $Q_{\rm SM}$ only in the large-scale limit.

In the flat gauge,[3] defined by $\hat{\psi} \equiv 0$, $\delta\sigma$ coincides with $Q_{\rm SM}$,

$$\hat{\delta\sigma} = Q_{\rm SM}. \tag{6.32}$$

In this gauge, it is possible to use the momentum constraint equations (6.27) to derive the metric perturbation A as a function of $Q_{\rm SM}$,

$$\hat{A} = -\frac{H'}{H\bar{\sigma}'}Q_{\rm SM}, \tag{6.33}$$

and one can write the Poisson equation (6.28) as

$$\vec{\nabla}^2(\hat{E}' - \hat{B}/a) = -\frac{H'}{H\,\bar{c}_s^2\,\bar{\sigma}'}\left[Q'_{\rm SM} + \left(\frac{H'}{H} - \frac{\bar{\sigma}''}{\bar{\sigma}'}\right)Q_{\rm SM} - \bar{\Xi}\delta s\right], \tag{6.34}$$

where we have used the expression (6.25) specialized to the flat gauge.

By replacing eqs. (6.33) and (6.34) into the evolution equation of $\hat{\delta\sigma}$, one finds the evolution equation of $Q_{\rm SM}$ [11],

$$Q''_{\rm SM} + \left(3H + \frac{\bar{c}_s^2}{\bar{P}_{,X}}\left(\frac{\bar{P}_{,X}}{\bar{c}_s^2}\right)'\right)Q'_{\rm SM} + \left(\mu_\sigma^2 - \frac{\bar{c}_s^2\vec{\nabla}^2}{a^2}\right)Q_{\rm SM} = (\bar{\Xi}\delta s)' - \bar{\Xi}\left(\frac{(H\bar{c}_s^2)'}{H\bar{c}_s^2} - \frac{\bar{P}_{,\sigma}}{\bar{\sigma}'\bar{P}_{,X}}\right)\delta s\,, \tag{6.35}$$

[3] In the following, a hat indicates that the corresponding quantity is evaluated in the flat gauge.

JCAP01(2009)012

with

$$\mu_\sigma^2 \equiv -\left[\frac{(\bar\sigma'/H)'}{\bar\sigma'/H}\right]' - \left(3H + \frac{\bar c_s^2}{\bar P_{,X}}\left(\frac{\bar P_{,X}}{\bar c_s^2}\right)' + \frac{(\bar\sigma'/H)'}{\bar\sigma'/H}\right)\frac{(\bar\sigma'/H)'}{\bar\sigma'/H}\,. \tag{6.36}$$

When one considers only *large scales*, the expression (6.34) reduces to

$$Q'_{\rm SM} + \left(\frac{H'}{H} - \frac{\bar\sigma''}{\bar\sigma'}\right) Q_{\rm SM} - \bar\Xi\,\delta s \approx 0, \tag{6.37}$$

which means that there exists a first integral for the quantity $Q_{\rm SM}$ and that the second-order equation of motion (6.35) is not necessary in this limit. In fact, one can easily check that the large-scale limit of (6.35) is an automatic consequence of the first integral (6.37).

Let us now consider the evolution equation for ζ_a with two scalar fields. The spatial components of ζ_a, at linear order, are given by [19]

$$\delta\zeta_i = \partial_i\zeta, \qquad \zeta \equiv \delta\alpha - \frac{H}{\bar\rho'}\delta\rho. \tag{6.38}$$

From eq. (6.31) the scalar variable ζ is thus related to the Bardeen gauge invariant variable $\zeta_{\rm B}$, defined as [39, 40]

$$\zeta_{\rm B} \equiv -\psi - \frac{H}{\bar\rho'}\delta\rho, \tag{6.39}$$

in a similar way to how Q is related to $Q_{\rm SM}$, and on large scales these two quantities coincide.

According to eq. (6.11), the spatial components of $\dot\zeta_a$ are

$$\delta(\dot\zeta_i) = \partial_i\zeta'. \tag{6.40}$$

On large scales, one then finds the relation

$$\zeta' \approx -\frac{H}{\bar\sigma'}\,\bar\Xi\,\delta s. \tag{6.41}$$

Note also that from eq. (4.61) there is a simple relation between ζ and $\mathcal{R}$,

$$\zeta + \mathcal{R} = -\frac{\bar\alpha'}{\bar\rho'}\delta\epsilon, \tag{6.42}$$

which shows that ζ and $-\mathcal{R}$ coincide on large scales.

In conclusion, all the equations in this section, derived directly from the covariant formalism, exactly reproduce the linear results of [11]. In particular, according to eqs. (6.21) and (6.35), whereas entropic perturbations are sensitive to the usual Hubble horizon ($k \approx aH$), adiabatic perturbations are amplified at *sound* horizon crossing, $c_s k \approx aH$. As shown in [12, 13], these equations are not directly applicable to two-field DBI inflation, whose Lagrangian is not of the form studied in this paper. Despite that, in that situation, it turns out that eq. (6.35) for the adiabatic perturbation is still valid and that eq. (6.21) for the entropy perturbation is minimally modified, simply replacing the gradient term $\frac{1}{a^2}\vec\nabla^2\delta s$ by $\frac{\bar c_s^2}{a^2}\vec\nabla^2\delta s$, for the adequate Lagrangian eq. (2.12), with the consequence that both types of perturbations are amplified at *sound* horizon crossing.

In the next section we turn to the second-order perturbations, and show the power of the method we are using to derive new results.

JCAP01(2009)012

7 Second order perturbations

In this section we consider second-order perturbations (for a recent review, see [41]). We will thus decompose any scalar quantity Y as

$$Y(t, x^i) \equiv \bar{Y}(t) + \delta Y^{(1)}(t, x^i) + \delta Y^{(2)}(t, x^i), \tag{7.1}$$

where $\bar{Y}(t)$ is the background part and $\delta Y^{(1)}$ and $\delta Y^{(2)}$ are respectively the first and second-order contributions (note that we do not follow here the convention of including a numerical factor 1/2 in front of the second-order contribution). In our subsequent equations, to simplify the notation, we will often omit the index $^{(1)}$ for the first-order quantities, unless it is required for clarity reasons.

Our main purpose will be to expand our equations governing σ_a, s_a and ζ_a at second order in the perturbations. We start with a brief discussion on the gauge invariance of the curvature perturbation. As shown in [19], the second-order expression of the spatial components ζ_i can be written, after some manipulations, in the form

$$\zeta_i^{(2)} = \partial_i \zeta^{(2)} + \frac{\delta\rho}{\bar{\rho}'} \partial_i \zeta^{(1)\prime} \tag{7.2}$$

with

$$\zeta^{(2)} \equiv \delta\alpha^{(2)} - \frac{H}{\bar{\rho}'} \delta\rho^{(2)} - \frac{\delta\rho}{\bar{\rho}'} \left[\zeta^{(1)\prime} + \frac{1}{2} \left(\frac{H}{\bar{\rho}'} \right)' \delta\rho \right], \tag{7.3}$$

and $\zeta^{(1)}$ being given in eq. (6.38). In [21] it has been shown that $\zeta^{(2)}$ is gauge invariant on large scales: their proof holds identical in our case and we then refer the reader to this paper for more details. We now pass to discuss the evolution equations for adiabatic and entropy fields up to second order, and analyze how they source the curvature perturbation on large scales. The reader should keep in mind that the following discussion, restricted to large scales, is applicable to two-field DBI models on using the adequate Lagrangian eq. (2.12).

7.1 Adiabatic and entropy fields

Here we derive the evolution equations for the adiabatic and entropy field perturbations at *second order*. We will restrict ourselves to *large scales*, a situation in which the equations become more tractable, starting from the equations expanded in spatial gradients discussed in section 5.2. For convenience, we have collected in the appendix various background and first-order expressions that will be used in the rest of this section.

Second-order evolution for the perturbations when several scalars are involved has been first studied in detail by Malik in [42] in the large-scale limit and with canonical kinetic terms (see also [43–45]), while it has been analyzed in [46, 47] using the separate universe approach. The second-order decomposition into adiabatic and entropy components however, has only been derived in [21], in the case of standard kinetic terms (see [48] for a recent application and [49, 50] for related studies). This decomposition can easily be derived since the fully nonlinear adiabatic and entropy components have already been identified. We will show how to extend this decomposition into adiabatic and entropy components to the case of non-trivial metric in field space, and use it to derive the corresponding evolution equations for these modes.

In order to pursue the decomposition, one starts by expanding the definition of σ_a in eq. (4.5) at second order. After some straightforward manipulations, one can write the spatial

JCAP01(2009)012

components of σ_i as

$$\delta\sigma_i^{(2)} = \partial_i \left[\bar{e}_{\sigma I}\delta^{(2)}\phi^I + \frac{1}{2}\bar{e}_\sigma^J \bar{\Gamma}_{JIK} \left(\bar{e}_\sigma^K \bar{e}_\sigma^I \delta\sigma^2 + \bar{e}_s^K \bar{e}_s^I \delta s^2 + 2\bar{e}_\sigma^K \bar{e}_s^I \delta\sigma\delta s \right) \right] + \frac{1}{\bar{\sigma}'} \left(\delta s' + \bar{\theta}'\delta\sigma \right) \partial_i \delta s. \tag{7.4}$$

To deal with the term $\delta s' \partial_i \delta s$, which cannot be written as a total gradient, it is convenient to introduce the spatial vector

$$V_i \equiv \frac{1}{2}(\delta s \partial_i \delta s' - \delta s' \partial_i \delta s) = -\delta s' \partial_i \delta s + \frac{1}{2}\partial_i(\delta s \delta s'), \tag{7.5}$$

which vanishes when $\delta s'$ and δs have the same spatial dependence, i.e., $\delta s' = f(t)\delta s$.

By expanding also the definition of s_a in eq. (4.6), one finds, for s_i and σ_i, respectively,

$$\delta\sigma_i^{(2)} = \partial_i \delta\sigma^{(2)} + \frac{\bar{\theta}'}{\bar{\sigma}'}\delta\sigma\partial_i\delta s - \frac{1}{\bar{\sigma}'}V_i, \tag{7.6}$$

$$\delta s_i^{(2)} = \partial_i \delta s^{(2)} + \frac{\delta\sigma}{\bar{\sigma}'}\partial_i \delta s', \tag{7.7}$$

with

$$\delta\sigma^{(2)} \equiv \bar{e}_{\sigma I}\delta^{(2)}\phi^I + \frac{1}{2}\bar{e}_\sigma^J \bar{\Gamma}_{JIK} \left(\bar{e}_\sigma^K \bar{e}_\sigma^I \delta\sigma^2 + \bar{e}_s^K \bar{e}_s^I \delta s^2 + 2\bar{e}_\sigma^K \bar{e}_s^I \delta\sigma\delta s \right) + \frac{1}{2\bar{\sigma}'}\delta s \delta s', \tag{7.8}$$

$$\delta s^{(2)} \equiv \bar{e}_{sI}\delta^{(2)}\phi^I + \frac{1}{2}\bar{e}_s^J \bar{\Gamma}_{JIK} \left(\bar{e}_\sigma^K \bar{e}_\sigma^I \delta\sigma^2 + \bar{e}_s^K \bar{e}_s^I \delta s^2 + 2\bar{e}_\sigma^K \bar{e}_s^I \delta\sigma\delta s \right) - \frac{\delta\sigma}{\bar{\sigma}'}\left(\delta s' + \frac{\bar{\theta}'}{2}\delta\sigma \right). \tag{7.9}$$

The form of the right hand side of eq. (7.7) has been chosen by analogy with the form (7.2). Since s_a vanishes at zeroth order, arguments similar to those used in [21] to prove gauge invariance for $\zeta^{(2)}$ ensure that $\delta s^{(2)}$, defined in eq. (7.9), is also gauge invariant on large scales. The form of $\delta s^{(2)}$ is, then, forced by our covariant definition. Let us remark that the non-flat nature of the field space metric manifests itsef in the appearance of the terms with Christoffel symbols in $\delta\sigma^{(2)}$ and $\delta s^{(2)}$. Otherwise, these are formally identical to the corresponding definitions in [21].

Note that $\delta s_i^{(2)}$ contains the first-order adiabatic perturbation. This is due to the fact that the adiabatic and entropy components are defined locally: whereas the first-order components are defined with respect to a background basis in field space, which is *only* time dependent, the second-order components will be sensitive to the first-order fluctuations of the field space basis, which can be expressed in terms of the first-order adiabatic and entropy components. Then, the adiabatic component σ_a does not vanish at zeroth order and $\delta\sigma^{(2)}$ is not a gauge invariant variable. It is then useful to consider our generalization of the Sasaki-Mukhanov variable, Q_a, defined in eq. (4.60). Its spatial components can be expanded at second order in the perturbations, similarly to what we have done with ζ_a,

$$Q_i^{(2)} = \partial_i Q^{(2)} + \frac{\delta\alpha}{H}\partial_i Q' + \frac{\bar{\theta}'}{\bar{\sigma}'}Q\partial_i\delta s - \frac{1}{\bar{\sigma}'}V_i, \tag{7.10}$$

where $Q^{(2)}$ is defined as

$$Q^{(2)} \equiv \delta\sigma^{(2)} - \frac{\bar{\sigma}'}{H}\delta\alpha^{(2)} - \frac{\delta\alpha}{H}\left[Q^{(1)\prime} + \frac{1}{2}\left(\frac{\bar{\sigma}'}{H}\right)'\delta\alpha - \bar{\theta}'\delta s \right]. \tag{7.11}$$

JCAP01(2009)012

From this expression it is natural to define

$$Q^{(2)}_{\rm SM} \equiv \delta\sigma^{(2)} + \frac{\bar\sigma'}{H}(\psi^{(2)} + \psi^2) + \frac{\psi}{H}\left[Q^{(1)\prime}_{\rm SM} - \frac{1}{2}\left(\frac{\bar\sigma'}{H}\right)'\psi - \bar\theta'\delta s\right] \tag{7.12}$$

as the local part of the scalar gauge invariant second-order Sasaki-Mukhanov variable. Restricted to a single scalar field, this definition coincides with the one given in [42]. Note that we cannot write eq. (7.10) in the same form as eq. (7.2) because the last two terms on the right hand side cannot be written as a total spatial gradient.

The second-order (in time) evolution of σ_a is given by eq. (5.12). However, on large scales we do not need to compute a second-order differential equation because the adiabatic evolution is governed by a first integral, as in the linear case. This first integral is obtained directly from the constraint equations and it is not necessary to expand (5.12) at second order in the perturbations.

In order to compute this first integral we need the second-order energy and momentum constraints, which can be derived by expanding eqs. (5.18) and (5.20) and by using

$$\delta\Theta^{(2)} \approx \frac{9}{2}HA^2 + 3A\psi' - 6\psi\psi' - 3HA^{(2)} - 3\psi^{(2)\prime}. \tag{7.13}$$

On large scales, one can write the second-order energy constraint equation as [21]

$$3H\left[HA^{(2)} + \psi^{(2)\prime} + 2\psi\psi' - \frac{1}{2}\frac{\psi'^2}{H} - 2A(HA + \psi')\right] \approx -4\pi G\delta\rho^{(2)}, \tag{7.14}$$

where $\delta\rho^{(2)}$ can be calculated using (note that the non-flat nature of the field space metric simply manifests itsef in the presence of the Riemann tensor)

$$\begin{aligned}\delta^{(2)}\dot\sigma^2 = {}& \overline{\sigma}'^2\left(4A^2 - 2A^{(2)}\right) - 4A\overline{\sigma}'\left(\delta\sigma' - \overline{\theta}'\delta s\right) + \left(\delta\sigma' - \overline{\theta}'\delta s\right)^2 + \left(\delta s' + \overline{\theta}'\delta\sigma\right)^2 \\ & -2\overline{\sigma}'\overline{\theta}'\delta s^{(2)} + 2\overline{\sigma}'\delta\sigma^{(2)\prime} - 2\overline{\theta}'\delta\sigma\left(\delta s' + \frac{\overline{\theta}'}{2}\delta\sigma\right) - \overline{\sigma}'\left(\frac{1}{\overline{\sigma}'}\delta s\delta s'\right)' \\ & +\overline{\sigma}'^2\bar e^I_\sigma\bar e^J_\sigma\bar e^K_s\bar e^L_s\bar R_{KIJL}\delta s^2\,.\end{aligned} \tag{7.15}$$

Explicitely, this gives

$$\delta\rho^{(2)} \approx \frac{\bar P_{,X}}{\bar c_s^2}\left(\bar\sigma'\delta\sigma^{(2)\prime} - \overline{\sigma}'^2A^{(2)} - \bar\sigma'\bar\Xi\delta s^{(2)}\right) + \left(\overline{\sigma}'^2\bar P_{,X\sigma} - \bar P_{,\sigma}\right)\delta\sigma^{(2)} + \Lambda_\rho \tag{7.16}$$

where Λ_ρ is a quadratic function of A, $\delta\sigma^{(1)}$, $\delta s^{(1)}$, and their first derivatives,

$$\begin{aligned}\Lambda_\rho \equiv {}& \frac{\bar P_{,X}}{2\bar c_s^2}\delta\sigma'(\delta\sigma' - 2\bar\theta'\delta s) + \frac{\delta s'}{\bar\sigma'}\left[\frac{1}{2\bar c_s^2}\left((1+\bar c_s^2)\bar P_{,\sigma} - \bar c_s^2\overline{\sigma}'^2\bar P_{,X\sigma}\right)\delta s - \left(\bar P_{,s} - \overline{\sigma}'^2\bar P_{,Xs}\right)\delta\sigma\right] \\ & -\frac{1}{2}\left[\bar P_{,\sigma\sigma} - \overline{\sigma}'^2\bar P_{,X\sigma\sigma} + \frac{\bar\theta'}{\bar\sigma'}\left(\bar P_{,s} - \overline{\sigma}'^2\bar P_{,Xs}\right)\right]\delta\sigma^2 + \left(\overline{\sigma}'^2\bar P_{,X\sigma s} - \bar P_{,\sigma s}\right)\delta s\delta\sigma \\ & +\frac{1}{2}\left[\overline{\sigma}'^2\bar P_{,Xss} - \bar P_{,ss} + \frac{\bar P_{,X}}{\bar c_s^2}\left(\bar\mu_s^2 + \frac{\bar\Xi^2}{\bar c_s^2} + \overline{\theta}'^2 + \overline{\sigma}'^2\bar e^I_\sigma\bar e^J_\sigma\bar e^K_s\bar e^L_s\bar R_{KIJL}\right)\right]\delta s^2 \\ & +\frac{1}{2}\left(\bar P_{,XXX}\overline{\sigma}'^4 + 3\bar P_{,XX}\overline{\sigma}'^2\right)\left(\delta\sigma' - \overline{\theta}'\delta s - A\overline{\sigma}'\right)^2 \\ & +\overline{\sigma}'\left[\left(\bar P_{,XX\sigma}\overline{\sigma}'^2 + \bar P_{,X\sigma}\right)\delta\sigma + \left(\bar P_{,XXs}\overline{\sigma}'^2 + \bar P_{,Xs}\right)\delta s - \frac{2\bar P_{,X}}{\bar c_s^2}A\right]\left(\delta\sigma' - \overline{\theta}'\delta s - A\overline{\sigma}'\right).\end{aligned} \tag{7.17}$$

JCAP01(2009)012

The second-order momentum constraint equation reads [21]

$$\partial_i \left[HA^{(2)} + \psi^{(2)\prime} + 2\psi\psi' - \frac{1}{2}HA^2 - A(HA + \psi') \right] \approx -4\pi G \delta q_i^{(2)}, \tag{7.18}$$

where the second-order momentum $\delta q_i^{(2)}$ is given, from eq. (4.49), by

$$\delta q_i^{(2)} = -\partial_i \left[\bar{P}_{,X}\bar{\sigma}'\delta\sigma^{(2)} + \frac{\bar{P}_{,X\sigma}\bar{\sigma}'}{2}\delta\sigma^2 + \frac{\bar{P}_{,X}}{2\,\bar{c}_s^2}\frac{\bar{\sigma}''}{\bar{\sigma}'}\delta\sigma^2 + \bar{P}_{,X}\bar{\theta}'\delta\sigma\delta s \right] - \frac{1}{\bar{\sigma}'}\delta\epsilon\partial_i\delta\sigma + \bar{P}_{,X}\, V_i. \tag{7.19}$$

As already noticed in [31] for large scales, $\delta q_i^{(2)}$ *cannot* be written as a total gradient when several scalar fields are present. After neglecting $\delta\epsilon$ on large scales in the above equation, this is manifest because of the presence of V_i. This implies that, in principle, if V_i does not vanish, one cannot define at second-order a comoving gauge, i.e., such that $\delta q_i^{(1)} = 0$ *and* $\delta q_i^{(2)} = 0$, in contrast with the linear theory or the single-field case.

However, it is instructive to derive the evolution equation for V_i on large scales by using the linear evolution equation for δs, eq. (6.21), neglecting the gradient term and $\delta\epsilon$ at first order. One finds a simple expression that generalizes the corresponding result of [21] to the case of non-canonical kinetic terms

$$V_i' + \left(3H + \frac{\bar{P}_{,X}'}{\bar{P}_{,X}} \right) V_i = 0. \tag{7.20}$$

This implies that, in an expanding universe, $\bar{P}_{,X}V_i$ will decay like a^{-3} and rapidly become negligible even if it is nonzero initially. Consequently, in an expanding universe one can in practice ignore V_i on large scales and thus define, *in an approximate sense*, a comoving gauge at second order, which coincides with $\delta\sigma^{(1)} = 0 = \delta\sigma^{(2)}$. In this approximate comoving gauge, the momentum (7.19) can be written as a total gradient. In the rest of the paper, in order to remain as general as possible, we will keep the term V_i.

Similarly to the first-order case, it is possible to combine the energy and momentum constraint equations and derive the relativistic Poisson-like equation analogous to eq. (6.28), which corresponds to the expansion, at second order and on large scales, of eq. (5.21). By expanding eq. (5.22) and using (5.24), one has

$$\delta\epsilon_i^{(2)} \approx \partial_i\delta\rho^{(2)} - 3H\delta q_i^{(2)} - \delta\Theta\delta q_i \approx 0, \tag{7.21}$$

where the last approximate equality is a consequence of eqs. (6.22), (6.27), (7.14) and (7.18) and confirms our conclusion of section 5.2 in a covariant context, namely that we can neglect ϵ_a on large scales. The second-order spatial components of ϵ_a defined in eq. (4.46), can be decomposed as

$$\delta\epsilon_i^{(2)} = \partial_i\delta\epsilon^{(2)} + \frac{\delta\sigma}{\bar{\sigma}'}\partial_i\delta\epsilon^{(1)\prime} - 3H\,\bar{P}_{,X}\,V_i, \tag{7.22}$$

with $\delta\epsilon^{(2)}$ defined by

$$\delta\epsilon^{(2)} \equiv \delta\rho^{(2)} - \frac{\bar{\rho}'}{\bar{\sigma}'}\delta\sigma^{(2)} - \frac{\delta\sigma}{\bar{\sigma}'}\left[\delta\epsilon^{(1)\prime} + \frac{1}{2}\left(\frac{\bar{\rho}'}{\bar{\sigma}'}\right)'\delta\sigma + \frac{\bar{\rho}'}{\bar{\sigma}'}\bar{\theta}'\delta s \right]. \tag{7.23}$$

It is only when V_i is negligible that the quantity $\delta\epsilon^{(2)}$ can be interpreted as the comoving energy density at second order. Otherwise, as discussed before, the comoving gauge cannot be defined.

JCAP01(2009)012

Using the decomposition (7.22) and the fact that $\delta\epsilon^{(1)}$ is negligible on large scales, eq. (7.21) can be written as

$$\partial^2\delta\epsilon^{(2)} \approx 3H\bar{P}_{,X}\partial^i V_i. \tag{7.24}$$

When V_i is negligible, and only then, one finds that, like at first order, the second-order comoving energy density is negligible on large scales,

$$\delta\epsilon^{(2)} \approx 0. \tag{7.25}$$

Having discussed the general properties of the second-order constraint equations, we can now derive the evolution equation of the gauge-invariant adiabatic component $Q^{(2)}_{\rm SM}$. Similarly to what we have shown in the previous section for the first-order variables, the simplest way to derive an equation satisfied by $Q^{(2)}_{\rm SM}$ is to work in the flat gauge $\hat{\psi}^{(1)} = 0 = \hat{\psi}^{(2)}$, where $\delta\sigma^{(2)}$ reduces to $Q^{(2)}_{\rm SM}$,

$$\hat{\delta\sigma^{(2)}} = Q^{(2)}_{\rm SM}. \tag{7.26}$$

In this gauge, eqs. (7.14) and (7.18) reduce, respectively, to

$$3H^2\left(\hat{A^{(2)}} - 2\hat{A}^2\right) \approx -4\pi G\hat{\delta\rho^{(2)}}, \tag{7.27}$$

$$H\partial_i\left(\hat{A^{(2)}} - \frac{3}{2}\hat{A}^2\right) \approx -4\pi G\hat{\delta q_i^{(2)}}. \tag{7.28}$$

Using the first-order constraint equations eqs. (6.33) and (6.37), these can be rewritten as

$$\hat{A^{(2)}} \approx \frac{1}{3H^2 + H'/\bar{c}_s^2}\Bigg[-\frac{\bar{\sigma}'\bar{P}_{,X}}{2\bar{c}_s^2}\left(Q^{(2)\prime}_{\rm SM} - \bar{\Xi}\delta s^{(2)}\right) + \frac{1}{2}\left(\bar{P}_{,\sigma} - \bar{\sigma}'^2\bar{P}_{,X\sigma}\right)Q^{(2)}_{\rm SM} + 6\left(\frac{H'}{\bar{\sigma}'}\right)^2 Q^2_{\rm SM} - \frac{\hat{\Lambda}_\rho}{2}\Bigg] \tag{7.29}$$

and

$$\hat{A^{(2)}} \approx -\frac{H'}{H\bar{\sigma}'}\left[Q^{(2)}_{\rm SM} + \frac{\bar{\theta}'}{\bar{\sigma}'}Q_{\rm SM}\delta s + \frac{1}{2\bar{\sigma}'}\left(\frac{\bar{\sigma}''}{\bar{c}_s^2\bar{\sigma}'} - 3\frac{H'}{H} + \frac{\bar{\sigma}'\bar{P}_{,X\sigma}}{\bar{P}_{,X}}\right)Q^2_{\rm SM} - \frac{1}{\bar{\sigma}'}\partial^{-2}\partial^i V_i\right]. \tag{7.30}$$

This last equation contains a nonlocal term because we have written the momentum constraint as a scalar equation while keeping the second-order vector V_i defined in (7.5). By combining these two relations to get rid of $A^{(2)}$ one obtains the following first integral for $Q^{(2)}_{\rm SM}$:

$$\begin{aligned} &Q^{(2)\prime}_{\rm SM} + \left(\frac{H'}{H} - \frac{\bar{\sigma}''}{\bar{\sigma}'}\right)Q^{(2)}_{\rm SM} - \bar{\Xi}\delta s^{(2)} \\ &\quad\approx \left[3\bar{\sigma}'\bar{P}_{,X}\bar{c}_s^2 - \frac{1}{2\bar{\sigma}'}\left(\frac{\bar{\sigma}''}{\bar{c}_s^2\bar{\sigma}'} - 3\frac{H'}{H} + \frac{\bar{\sigma}'\bar{P}_{,X\sigma}}{\bar{P}_{,X}}\right)\left(3H\bar{c}_s^2 + \frac{H'}{H}\right)\right]Q^2_{\rm SM} - \frac{\bar{c}_s^2\hat{\Lambda}_\rho}{\bar{P}_{,X}\bar{\sigma}'} \\ &\quad - \left(3H\bar{c}_s^2 + \frac{H'}{H}\right)\left(\frac{\bar{\theta}'}{\bar{\sigma}'}Q_{\rm SM}\delta s - \frac{1}{\bar{\sigma}'}\partial^{-2}\partial^i V_i\right). \end{aligned} \tag{7.31}$$

This equation is the second-order equivalent of (6.37). We have put together on the left hand side all the terms depending on purely second-order quantities, and on the right hand side all the terms which are quadratic in first-order quantities. As in the first-order case, the

JCAP01(2009)012

entropy perturbation sources the evolution of the adiabatic perturbation. The nonlocal term containing V_i comes from the momentum constraint and is a new feature with respect to the first-order case (or the second-order case for a *single* scalar field). However, as we have discussed earlier, it becomes quickly negligible on large scales in an expanding universe, in which case the first integral (7.31) becomes a scalar local equation.

We eventually derive a second-order equation for the entropy mode $\delta s^{(2)}$, which will be second order in time. Since we are restricting ourselves to *large scales*, we simply expand the spatial components of eq. (5.13) up to second order. This gives

$$\delta(\ddot{s}_i)^{(2)}+\left(3H+\frac{\bar{P}'_{,X}}{\bar{P}_{,X}}\right)\delta(\dot{s}_i)^{(2)}+\left(\bar{\mu}_s^2+\frac{\bar{\Xi}^2}{\bar{c}_s^2}\right)\delta s_i^{(2)}+\delta\left(\Theta+\frac{\dot{P}_{,X}}{P_{,X}}\right)\partial_i\delta s' \\ +\delta\left(\mu_s^2+\frac{\Xi^2}{c_s^2}\right)\partial_i\delta s \approx -\frac{\bar{\Xi}}{\bar{P}_{,X}\bar{\sigma}'}\delta\epsilon_i^{(2)}, \quad (7.32)$$

where we have neglected the gradient of the comoving energy density at first order, $\delta\epsilon_i^{(1)}$ which according to eq. (6.28) is subdominant on large scales.

To proceed, we need the spatial components of the first and second time derivatives of the covectors s_a. By using eq. (6.9) for s_i at second order and ignoring the higher-order terms in the gradient expansion, one obtains

$$\delta(\dot{s}_i)^{(2)} \approx \delta s_i^{(2)\prime} - A\partial_i\delta s', \quad (7.33)$$

and, by applying once more (6.9),

$$\delta(\ddot{s}_i)^{(2)} \approx \delta s_i^{(2)\prime\prime} - A'\partial_i\delta s' - 2A\partial_i\delta s''. \quad (7.34)$$

Recalling that

$$\delta s_i^{(2)} = \partial_i\delta s^{(2)} + \frac{\delta\sigma}{\bar{\sigma}'}\partial_i\delta s',$$

we can then substitute the expressions (7.7) and (7.33–7.34) for the second-order entropy component and its derivatives, and use equation (6.21) and its time derivative. Defining

$$M_{IJ} \equiv -\frac{\mathcal{D}_I\mathcal{D}_J P}{P_{,X}} + \dot{\sigma}^2 R_{IKJL}e_\sigma^K e_\sigma^L + \frac{1}{\dot{\sigma}^2 P_X^2}\Big[(2+c_s^2)P_{,I}P_{,J} + c_s^2\dot{\sigma}^4\, P_{,XI}P_{,XJ} \\ -c_s^2\dot{\sigma}^2 P_{,XI}P_J - c_s^2\dot{\sigma}^2 P_{,XJ}P_I\Big] \quad (7.35)$$

such that

$$\mu_s^2 + \frac{\Xi^2}{c_s^2} = e_s^I e_s^J M_{IJ}, \quad (7.36)$$

the equation (7.32) can be written as the spatial gradient of the following scalar equation

$$\delta s^{(2)\prime\prime} + \left(3H+\frac{\bar{P}'_{,X}}{\bar{P}_{,X}}\right)\delta s^{(2)\prime} + \left(\bar{\mu}_s^2+\frac{\bar{\Xi}^2}{\bar{c}_s^2}\right)\delta s^{(2)} \approx -\frac{\overline{\theta}'}{\overline{\sigma}'}\delta s'^2 - \left(3H\frac{\bar{\Xi}}{2\overline{\sigma}'} - \frac{2}{\overline{\sigma}'}\bar{e}_\sigma^I\bar{e}_s^J\bar{M}_{IJ}\right)\delta s\delta s' \\ -\frac{\bar{e}_s^I\bar{e}_s^J}{2}\left[\overline{\sigma}'(\bar{\Xi}-\bar{\theta}')\,\bar{M}_{IJ,X} + \bar{e}_s^K\,\mathcal{D}_K\bar{M}_{IJ} - 2\,\frac{\bar{\Xi}}{\overline{\sigma}'}\,\bar{M}_{IJ}\right]\delta s^2 - \frac{\bar{\Xi}}{\bar{P}_{,X}\overline{\sigma}'}\delta\epsilon^{(2)}. \quad (7.37)$$

Let us make a few clarifying comments: when calculating the various derivatives of M_{IJ} with respect to the fields and to X, $\dot{\sigma}^2$ is replaced by $2X$ and the basis vectors $\bar{e}_\sigma^I, \bar{e}_s^I$ are

JCAP01(2009)012

considered as constant (they are not *functions* of X and the fields); eventually, $\mathcal{D}_K \bar{M}_{IJ} \equiv \partial_K \bar{M}_{IJ} - \bar{\Gamma}^L_{KI}\bar{M}_{LJ} - \bar{\Gamma}^L_{KJ}\bar{M}_{IL}$.

Note that this equation is closed, in the sense that only the entropy field perturbation appears: even when $\delta\epsilon^{(2)}$ is not negligible, it can be written in terms of δs and $\delta s'$ by using eqs. (7.24) and (7.5). Thus, on large scales the entropy field evolves independently of the adiabatic components, as in the linear theory.

7.2 Generalized uniform density and comoving curvature perturbations

We now derive the large-scale evolution equation for $\zeta^{(2)}$, expanding to second order eq. (5.15). In the fluid description, it was shown in [19, 51] that on large scales the evolution equation for $\zeta^{(2)}$ can be written as

$$\zeta^{(2)\prime} \approx -\frac{H}{\bar{\rho}+\bar{P}}\Gamma^{(2)} - \frac{1}{\bar{\rho}+\bar{P}}\Gamma_1\zeta_1', \tag{7.38}$$

where $\Gamma^{(2)}$ can be read from the second-order decomposition of the quantity Γ_a for a fluid, defined in eq. (3.13), i.e.,

$$\delta\Gamma_i^{(2)} = \partial_i\Gamma^{(2)} + \frac{\delta\rho}{\bar{\rho}'}\partial_i\Gamma^{(1)\prime}. \tag{7.39}$$

In the two-scalar field case considered here we must compare this expansion with the expression for Γ_a given in the large-scale limit by eq. (5.14). Expanding this equation to second order, using eq. (7.7), one obtains

$$\begin{aligned}\delta\Gamma_i^{(2)} \approx & -\delta\epsilon_i^{(2)}\left\{\frac{\overline{\sigma}'}{\overline{\rho}'}\left[\left(1+\bar{c}_s^2\right)\bar{P}_{,\sigma} - \bar{c}_s^2\overline{\sigma}'^2\bar{P}_{,X\sigma}\right]\right\} + \left(\bar{P}_{,X}\overline{\sigma}'\,\bar{\Xi}\right)\left(\partial_i\delta s^{(2)} + \frac{\delta\sigma}{\overline{\sigma}'}\partial_i\delta s\right) \\ & +\partial_i\delta s\,\delta\left(P_{,X}\dot{\sigma}\,\Xi\right)\end{aligned} \tag{7.40}$$

where we have used that $\delta\epsilon^{(1)}$ is negligible at large scales. From this, defining ξ_I as

$$\xi_I \equiv (1+c_s^2)P_{,I} - c_s^2\dot{\sigma}^2 P_{,XI} \tag{7.41}$$

such that

$$P_{,X}\dot{\sigma}\,\Xi = e_s^I\,\xi_I\,, \tag{7.42}$$

one obtains the expression

$$\Gamma^{(2)} \approx -\bar{e}_\sigma^I\bar{\xi}_I\left(\frac{\overline{\sigma}'}{\overline{\rho}'}\delta\epsilon^{(2)} + \frac{1}{2\overline{\sigma}'}\,\delta s\delta s'\right) + \bar{e}_s^I\bar{\xi}_I\delta s^{(2)} + \left[\bar{e}_s^I\bar{e}_s^J\bar{\xi}_{I;J} - \overline{\sigma}'(\overline{\theta}' - \bar{\Xi})\bar{e}_s^I\bar{\xi}_{I,X}\right]\frac{\delta s^2}{2}\,. \tag{7.43}$$

From the previous expression it is immediate to rewrite the second-order evolution equation for $\zeta^{(2)}$ at large scales, eq. (7.38), as

$$\begin{aligned}\zeta^{(2)\prime} \approx -\frac{H}{\bar{P}_{,X}\,\bar{\sigma}'^2}\Bigg[& -\bar{e}_\sigma^I\bar{\xi}_I\left(\frac{\overline{\sigma}'}{\overline{\rho}'}\delta\epsilon^{(2)} + \frac{1}{2\overline{\sigma}'}\,\delta s\delta s'\right) + \bar{e}_s^I\bar{\xi}_I\,\delta s^{(2)} \\ & +\left(\bar{e}_s^I\bar{e}_s^J\bar{\xi}_{I;J} - \overline{\sigma}'(\overline{\theta}' - \bar{\Xi})\bar{e}_s^I\bar{\xi}_{I,X} - 2\bar{P}_{,X}\,\bar{\Xi}^2\right)\frac{\delta s^2}{2}\Bigg].\end{aligned} \tag{7.44}$$

The previous expression shows that the second-order curvature perturbation is, as expected, sourced only by entropy modes on large scales. On the other hand, it depends in a much richer way on ξ_I and on the derivatives of P, that is on the form of the kinetic

JCAP01(2009)012

terms, than its linear counterpart in eq. (6.41). Moreover, ξ_I reduces to $-2V_{,I}$ for a standard Lagrangian, with no dependence on the kinetic term X. The appearence of $\bar{\xi}_{,IX}$ on the right hand side of (7.44), acting as a source for the large-scale evolution of the curvature perturbation, is thus solely due to the non-standard nature of the Lagrangian we are considering. It is important to emphasize that the nonlinear formalism we adopted, as well as the fact that we considered a very general Lagrangian, have allowed us to straightforwardly obtain a relatively elegant and compact expression. The same would be difficult to get working directly in a coordinate based approach, or considering a specific Lagrangian.

It is also useful to express our results in terms of $\mathcal{R}_a$. The spatial components of $\mathcal{R}_a$ can be decomposed as

$$\mathcal{R}_i^{(2)} = \partial_i \mathcal{R}^{(2)} + \frac{\delta\sigma}{\bar{\sigma}'}\partial_i \mathcal{R}^{(1)\prime} - \frac{H}{\bar{\sigma}'^2} V_i, \tag{7.45}$$

with

$$\mathcal{R}^{(2)} \equiv -\delta\alpha^{(2)} + \frac{H}{\bar{\sigma}'}\delta\sigma^{(2)} + \frac{\delta\sigma}{\bar{\sigma}'}\left[-\mathcal{R}^{(1)\prime} + \frac{1}{2}\left(\frac{H}{\bar{\sigma}'}\right)'\delta\sigma + \bar{\theta}'\frac{H}{\bar{\sigma}'}\delta s\right]. \tag{7.46}$$

The last term in eq. (7.45) comes from the fact that, like ϵ_a and in contrast to ζ_a, $\mathcal{R}_a$ is defined in terms of the spatial momentum which cannot be expressed in general as a pure gradient. When this term can be neglected, and only then, $\mathcal{R}^{(2)}$ coincides with the second-order comoving curvature perturbation defined in [52, 53].

It is easy to derive a first-order (in time) evolution equation for $\mathcal{R}^{(2)}$ by noting that $\zeta^{(2)}$ and $\mathcal{R}^{(2)}$ are related on large scales. Indeed, expanding eq. (5.25) to second order using (7.2) and (7.45), and neglecting terms proportional to $\delta\epsilon^{(1)}$, one gets

$$\zeta^{(2)} + \mathcal{R}^{(2)} \approx \frac{1}{3\bar{P}_{,X}\bar{\sigma}'^2}\delta\epsilon^{(2)}. \tag{7.47}$$

When $\delta\epsilon^{(2)}$ is negligible on large scales, like in an expanding universe where we can neglect V_i, $\zeta^{(2)}$ and $\mathcal{R}^{(2)}$ coincide on large scales as in the single-field case [53]. However, this is not true in general in the multi-field case if V_i cannot be neglected.

From this relation and the evolution equation of $\zeta^{(2)}$, eq. (7.44), one can find a large-scale evolution equation for $\mathcal{R}^{(2)}$,

$$\begin{aligned}\mathcal{R}^{(2)\prime} \approx \frac{H}{\bar{P}_{,X}\bar{\sigma}'^2}\Bigg[&-\frac{\bar{e}^I_\sigma \bar{\xi}_I}{2\bar{\sigma}'}\,\delta s\delta s' + \bar{e}^I_s\bar{\xi}_I\,\delta s^{(2)} + \left(\bar{e}^I_s\bar{e}^J_s\bar{\xi}_{I;J} - \bar{\sigma}'(\bar{\theta}' - \bar{\Xi})\bar{e}^I_s\bar{\xi}_{I,X} - 2\bar{P}_{,X}\,\bar{\Xi}^2\right)\frac{\delta s^2}{2} \\ &+\left(\bar{c}_s^2 + \frac{H'}{3H^2}\right)\delta\epsilon^{(2)}\Bigg].\end{aligned} \tag{7.48}$$

The second-order uniform adiabatic field perturbation $\mathcal{R}^{(2)}$ can be related on large scales to $Q^{(2)}_{\rm SM}$, by combining eqs. (7.12) and (7.46). One obtains

$$\mathcal{R}^{(2)} \approx \frac{H}{\bar{\sigma}'}\left[Q^{(2)}_{\rm SM} - \frac{1}{\bar{\sigma}'}\left(Q'_{\rm SM} - \bar{\theta}'\delta s\right)Q_{\rm SM} - \frac{1}{2H}\left(\frac{H}{\bar{\sigma}'}\right)' Q^2_{\rm SM}\right], \tag{7.49}$$

which can be used, together with the linear first integral (6.37), to show that eq. (7.48) is equivalent to the first integral (7.31).

JCAP01(2009)012

8 Conclusions

In this work, we adopted a covariant formalism to derive exact evolution equations for non-linear perturbations, in a universe dominated by two scalar fields. These scalar fields are characterized by non-canonical kinetic terms and an arbitrary field space metric, a situation typically encountered in inflationary models inspired by string theory. Our exact equations can be expressed in a relatively compact way, and in physically interesting limits they closely resemble their linear counterpart. They acquire a quite simple and elegant form, due to the fact that we considered a very general Lagrangian to perform our calculations.

Extending the methods of [21] to a general field space metric, we have decomposed our non-linear scalar perturbations into adiabatic and entropy modes, corresponding to a generalization of analogous definitions adopted in the linear theory. Then, we derived the corresponding evolution equations, that acquire several new contributions associated with the non-canonical kinetic terms for the scalar fields. We also obtained a nonlinear generalization of the curvature perturbation on uniform energy density hypersurfaces, showing that on large scales it is sourced only by the nonlinear entropy perturbation.

We have used these nonlinear equations as a starting point to show how to extend and generalize some results previously obtained in the literature, in a relatively straightforward way. In particular, we went beyond previous works by computing explicitly the evolution of the *second-order* adiabatic and entropy components on *large scales*, in the case in which the scalar fields have non-canonical kinetic terms. The second-order adiabatic component is, in this limit, governed by a local first-order (in time) evolution equation, sourced by terms depending on the second-order entropy perturbation as well as, quadratically, on the first-order entropy perturbation. Both first and second order entropy perturbations satisfy a second order (in time) evolution equation and the full system of equations, valid on large scales, is thus closed. The final system of equations enables one to clearly identify new effects due to the non-canonical structure of the scalar fields Lagrangian. A representative example is equation (7.44), that governs the second-order evolution equation for the curvature perturbation on large scales. This quantity is sourced by combinations of first and second-order entropy perturbations, with coefficients depending on the form of the kinetic terms. As discussed in section 7.2, in some situations, cancellations can occur, reducing the size of some coefficients with respect to the others. In these cases, the curvature pertubation would be sensitive only to some type of terms, with important consequences for the evolution of second-order perturbations and thus for non-Gaussianities. All the results derived on large scales in section 7 are applicable to the interesting scenario of multifield DBI inflation of the type studied in [12, 13].

In conclusions, we have shown that our results, and more in general the covariant approach to the dynamics of fluctuations, can be important to analyze the evolution of perturbations in multi-field models of inflation inspired by high-energy physics or string theory. This interesting subject will offer, in the near future, unique opportunities to allow comparisons between predictions of high-energy physics motivated inflationary models, and observations of the cosmic microwave background radiation.

Acknowledgments

We thank David Langlois, Danièle A. Steer and Filippo Vernizzi for very useful discussions and for their careful reading of the draft. We also would like to thank Jean-Luc Lehners

JCAP01(2009)012

for pointing out a typo in eq. (7.13). Most of this work has been done while G. T. was partially supported by MEC and FEDER under grant FPA2006-05485, by CAM under grant HEPHACOS P-ESP-00346, and by the UniverseNet network (MRTN-CT-2006-035863). He thanks the kind hospitality of APC, Paris, where this work was initiated.

A Useful identities in a two-field system

A.1 Covariant identities

$$D_a\dot\sigma = \dot\sigma_a + \ddot\sigma u_a - \dot\theta s_a = \dot\sigma_a^\perp - \dot\theta s_a\,, \tag{A.1}$$

$$D_a X = \dot\sigma\, D_a\dot\sigma - \frac{1}{2} D_a\Pi\,, \tag{A.2}$$

$$D_a P_{,X} = P_{,XX}\, D_a X + P_{,X\sigma}\,\sigma_a^\perp + P_{,Xs}\, s_a\,, \tag{A.3}$$

$$\dot P_{,X} = P_{,XX}\left[\dot\sigma\,\ddot\sigma - \frac{1}{2}\dot\Pi\right] + P_{,X\sigma}\,\dot\sigma\,, \tag{A.4}$$

$$D_a P_{,XX} = P_{,XXX}\, D_a X + P_{,XX\sigma}\,\sigma_a^\perp + P_{,XXs}\, s_a\,, \tag{A.5}$$

$$D_a P_{,X\sigma} = P_{,XX\sigma}\, D_a X + P_{,X\sigma\sigma}\,\sigma_a^\perp + P_{,X\sigma s}\, s_a\,, \tag{A.6}$$

$$\begin{aligned} D_a\dot P_{,X} &= (D_a P_{,XX})\left[\dot\sigma\,\ddot\sigma - \frac{1}{2}\dot\Pi\right] + D_a\left(P_{,X\sigma}\,\dot\sigma\right) \\ &\quad + P_{,XX}\left[(D_a\dot\sigma)\,\ddot\sigma - \frac{1}{2} D_a\,\dot\Pi\right] + P_{,XX}\dot\sigma\left[\ddot\sigma_a^\perp - \ddot\theta s_a - \dot\theta\dot s_a\right] \end{aligned} \tag{A.7}$$

A.2 Background identities

$$H' = -4\pi G\bar P_{,X}\bar\sigma'^2. \tag{A.8}$$

$$\bar P'_{,\sigma} = \bar\sigma'\left(\bar P_{,\sigma\sigma} + \bar\sigma''\bar P_{,X\sigma}\right) + \bar\theta'\bar P_{,s}, \tag{A.9}$$

$$\bar P'_{,s} = \bar\sigma'\left(\bar P_{,\sigma s} + \bar\sigma''\bar P_{,Xs}\right) - \bar\theta'\bar P_{,\sigma}, \tag{A.10}$$

$$\bar P'_{,\sigma s} = \bar\sigma'\left(\bar P_{,\sigma\sigma s} + \bar\sigma''\bar P_{,X\sigma s}\right) + \bar\theta'\left(\bar P_{,ss} - \bar P_{,\sigma\sigma}\right), \tag{A.11}$$

$$\bar P'_{,ss} = \bar\sigma'\left(\bar P_{,\sigma ss} + \bar\sigma''\bar P_{,Xss}\right) - 2\bar\theta'\bar P_{,\sigma s}, \tag{A.12}$$

$$\bar P'_{,X} = \bar\sigma'\left(\bar P_{,X\sigma} + \bar\sigma''\bar P_{,XX}\right), \tag{A.13}$$

$$\bar P'_{,XX} = \bar\sigma'\left(\bar P_{,XX\sigma} + \bar\sigma''\bar P_{,XXX}\right), \tag{A.14}$$

$$\bar P'_{,X\sigma} = \bar\sigma'\left(\bar P_{,X\sigma\sigma} + \bar\sigma''\bar P_{,XX\sigma}\right) + \bar\theta'\bar P_{,Xs}, \tag{A.15}$$

$$\bar P'_{,Xs} = \bar\sigma'\left(\bar P_{,X\sigma s} + \bar\sigma''\bar P_{,XXs}\right) - \bar\theta'\bar P_{,X\sigma}, \tag{A.16}$$

$$\bar\theta' = \frac{\bar P_{,s}}{\bar P_{,X}\bar\sigma'}, \tag{A.17}$$

$$\bar\theta'' = \frac{1}{\bar P_{,X}}\left(\bar P_{\sigma s} + \bar\sigma''\bar P_{,Xs}\right) - \frac{\bar\theta'}{\bar P_{,X}\bar\sigma'}\left(\bar P_{,\sigma} + \bar P_{,X\sigma}\bar\sigma'^2 + \bar\sigma''\frac{\bar P_{,X}}{\bar c_s^2}\right), \tag{A.18}$$

JCAP01(2009)012

A.3 First-order identities

$$\delta e^I_\sigma = \frac{1}{\bar\sigma'}\left(\delta s' + \bar\theta'\delta\sigma\right)\bar e^I_s - \bar\Gamma^I_{JK}\bar e^J_\sigma\left(\bar e^K_\sigma\delta\sigma + \bar e^K_s\delta s\right), \tag{A.19}$$

$$\delta e^I_s = -\frac{1}{\bar\sigma'}\left(\delta s' + \bar\theta'\delta\sigma\right)\bar e^I_\sigma - \bar\Gamma^I_{JK}\bar e^J_s\left(\bar e^K_\sigma\delta\sigma + \bar e^K_s\delta s\right), \tag{A.20}$$

$$\delta(\dot\sigma) = \delta\sigma' - \bar\theta'\delta s - \bar\sigma' A, \tag{A.21}$$

$$\delta P_{,s} = \bar P_{,s\sigma}\delta\sigma + \bar P_{,ss}\delta s + \bar P_{,Xs}\left(\bar\sigma'\delta(\dot\sigma) - \frac{1}{2}\delta\Pi\right) - \frac{\bar P_{,\sigma}}{\bar\sigma'}(\delta s' + \bar\theta'\delta\sigma), \tag{A.22}$$

$$\delta P_{,Xs} = \bar P_{,Xs\sigma}\delta\sigma + \bar P_{,Xss}\delta s + \bar P_{,XXs}\left(\bar\sigma'\delta(\dot\sigma) - \frac{1}{2}\delta\Pi\right) - \frac{\bar P_{,X\sigma}}{\bar\sigma'}(\delta s' + \bar\theta'\delta\sigma), \tag{A.23}$$

$$\delta P_{ss} = \bar P_{,ss\sigma}\delta\sigma + \bar P_{,sss}\delta s + \bar P_{,Xss}\left(\bar\sigma'\delta(\dot\sigma) - \frac{1}{2}\delta\Pi\right) - 2\frac{\bar P_{,s\sigma}}{\bar\sigma'}\left(\delta s' + \bar\theta'\delta\sigma\right), \tag{A.24}$$

$$\delta P_{,X} = \bar P_{,X\sigma}\delta\sigma + \bar P_{,Xs}\delta s + \bar P_{,XX}\left(\bar\sigma'\delta(\dot\sigma) - \frac{1}{2}\delta\Pi\right), \tag{A.25}$$

$$\delta\dot P_{,X} = (\delta P_{,X})' - A\bar P_{,X}. \tag{A.26}$$

References

[1] L. McAllister and E. Silverstein, *String cosmology: a review*, *Gen. Rel. Grav.* **40** (2008) 565 [arXiv:0710.2951] [SPIRES];
C.P. Burgess, *Lectures on cosmic inflation and its potential stringy realizations*, *PoS* **P2GC** (2006) 008 [*Class. Quant. Grav.* **24** (2007) S795] [arXiv:0708.2865] [SPIRES].

[2] E. Silverstein and D. Tong, *Scalar speed limits and cosmology: acceleration from D-cceleration*, *Phys. Rev.* **D 70** (2004) 103505 [hep-th/0310221] [SPIRES].

[3] M. Alishahiha, E. Silverstein and D. Tong, *DBI in the sky*, *Phys. Rev.* **D 70** (2004) 123505 [hep-th/0404084] [SPIRES].

[4] X. Chen, *Multi-throat brane inflation*, *Phys. Rev.* **D 71** (2005) 063506 [hep-th/0408084] [SPIRES].

[5] X. Chen, *Inflation from warped space*, *JHEP* **08** (2005) 045 [hep-th/0501184] [SPIRES].

[6] C. Armendariz-Picon, T. Damour and V.F. Mukhanov, *k-Inflation*, *Phys. Lett.* **B 458** (1999) 209 [hep-th/9904075] [SPIRES];
J. Garriga and V.F. Mukhanov, *Perturbations in k-inflation*, *Phys. Lett.* **B 458** (1999) 219 [hep-th/9904176] [SPIRES].

[7] X. Chen, M.-x. Huang, S. Kachru and G. Shiu, *Observational signatures and non-Gaussianities of general single field inflation*, *JCAP* **01** (2007) 002 [hep-th/0605045] [SPIRES].

[8] D. Easson, R. Gregory, G. Tasinato and I. Zavala, *Cycling in the throat*, *JHEP* **04** (2007) 026 [hep-th/0701252] [SPIRES].

[9] D.A. Easson, R. Gregory, D.F. Mota, G. Tasinato and I. Zavala, *Spinflation*, *JCAP* **02** (2008) 010 [arXiv:0709.2666] [SPIRES].

JCAP01(2009)012

[10] M.-x. Huang, G. Shiu and B. Underwood, *Multifield DBI Inflation and Non-Gaussianities*, *Phys. Rev.* **D 77** (2008) 023511 [arXiv:0709.3299] [SPIRES].

[11] D. Langlois and S. Renaux-Petel, *Perturbations in generalized multi-field inflation*, *JCAP* **04** (2008) 017 [arXiv:0801.1085] [SPIRES].

[12] D. Langlois, S. Renaux-Petel, D.A. Steer and T. Tanaka, *Primordial fluctuations and non-Gaussianities in multi- field DBI inflation*, *Phys. Rev. Lett.* **101** (2008) 061301 [arXiv:0804.3139] [SPIRES].

[13] D. Langlois, S. Renaux-Petel, D.A. Steer and T. Tanaka, *Primordial perturbations and non-Gaussianities in DBI and general multi-field inflation*, *Phys. Rev.* **D 78** (2008) 063523 [arXiv:0806.0336] [SPIRES].

[14] X. Gao, *Primordial Non-Gaussianities of General Multiple Field Inflation*, *JCAP* **06** (2008) 029 [arXiv:0804.1055] [SPIRES].

[15] F. Arroja, S. Mizuno and K. Koyama, *Non-Gaussianity from the bispectrum in general multiple field inflation*, *JCAP* **08** (2008) 015 [arXiv:0806.0619] [SPIRES].

[16] Y.-F. Cai and W. Xue, *N-flation from multiple DBI type actions*, arXiv:0809.4134 [SPIRES].

[17] D. Langlois, *Correlated adiabatic and isocurvature perturbations from double inflation*, *Phys. Rev.* **D 59** (1999) 123512 [astro-ph/9906080] [SPIRES].

[18] D. Langlois and F. Vernizzi, *Evolution of non-linear cosmological perturbations*, *Phys. Rev. Lett.* **95** (2005) 091303 [astro-ph/0503416] [SPIRES].

[19] D. Langlois and F. Vernizzi, *Conserved non-linear quantities in cosmology*, *Phys. Rev.* **D 72** (2005) 103501 [astro-ph/0509078] [SPIRES].

[20] D. Langlois and F. Vernizzi, *Nonlinear perturbations for dissiPative and interacting relativistic fluids*, *JCAP* **02** (2006) 014 [astro-ph/0601271] [SPIRES].

[21] D. Langlois and F. Vernizzi, *Nonlinear perturbations of cosmological scalar fields*, *JCAP* **02** (2007) 017 [astro-ph/0610064] [SPIRES].

[22] G.F.R. Ellis and M. Bruni, *Covariant and gauge invariant approach to cosmological density fluctuations*, *Phys. Rev.* **D 40** (1989) 1804 [SPIRES].

[23] S.W. Hawking, *Perturbations of an expanding universe*, *Astrophys. J.* **145** (1966) 544 [SPIRES].

[24] M. Bruni, G.F.R. Ellis and P.K.S. Dunsby, *Gauge invariant perturbations in a scalar field dominated universe*, *Class. Quant. Grav.* **9** (1992) 921 [SPIRES].

[25] C. Gordon, D. Wands, B.A. Bassett and R. Maartens, *Adiabatic and entropy perturbations from inflation*, *Phys. Rev.* **D 63** (2001) 023506 [astro-ph/0009131] [SPIRES].

[26] D. Wands, *Multiple field inflation*, *Lect. Notes Phys.* **738** (2008) 275 [astro-ph/0702187] [SPIRES].

JCAP01(2009)012

[27] R.M. Wald, *General relativity*, Chicago University Press, Chicago U.S.A. (1984) [SPIRES].

[28] D.H. Lyth, K.A. Malik and M. Sasaki, *A general proof of the conservation of the curvature perturbation*, *JCAP* **05** (2005) 004 [astro-ph/0411220] [SPIRES].

[29] S. Groot Nibbelink and B.J.W. van Tent, *Density perturbations arising from multiple field slow- roll inflation*, hep-ph/0011325 [SPIRES];
S. Groot Nibbelink and B.J.W. van Tent, *Scalar perturbations during multiple field slow-roll inflation*, *Class. Quant. Grav.* **19** (2002) 613 [hep-ph/0107272] [SPIRES].

[30] F. Di Marco, F. Finelli and R. Brandenberger, *Adiabatic and isocurvature perturbations for multifield generalized Einstein models*, *Phys. Rev.* **D 67** (2003) 063512 [astro-ph/0211276] [SPIRES].

[31] G.I. Rigopoulos, E.P.S. Shellard and B.J.W. van Tent, *Non-linear perturbations in multiple-field inflation*, *Phys. Rev.* **D 73** (2006) 083521 [astro-ph/0504508] [SPIRES].

[32] D.S. Salopek and J.R. Bond, *Nonlinear evolution of long wavelength metric fluctuations in inflationary models*, *Phys. Rev.* **D 42** (1990) 3936 [SPIRES].

[33] G.L. Comer, N. Deruelle, D. Langlois and J. Parry, *Growth or decay of cosmological inhomogeneities as a function of their equation of state*, *Phys. Rev.* **D 49** (1994) 2759 [SPIRES].

[34] N. Deruelle and D. Langlois, *Long wavelength iteration of Einstein's equations near a space-time singularity*, *Phys. Rev.* **D 52** (1995) 2007 [gr-qc/9411040] [SPIRES].

[35] Y.-i. Takamizu and S. Mukohyama, *Nonlinear superhorizon perturbations of non-canonical scalar field*, arXiv:0810.0746 [SPIRES].

[36] M. Sasaki and E.D. Stewart, *A General analytic formula for the spectral index of the density perturbations produced during inflation*, *Prog. Theor. Phys.* **95** (1996) 71 [astro-ph/9507001] [SPIRES].

[37] A.A. Starobinsky, *Multicomponent de Sitter (inflationary) stages and the generation of perturbations*, *JETP Lett.* **42** (1985) 152 [*Pisma Zh. Eksp. Teor. Fiz.* **42** (1985) 124] [SPIRES].

[38] M. Sasaki, *Large Scale Quantum Fluctuations in the Inflationary Universe*, *Prog. Theor. Phys.* **76** (1986) 1036 [SPIRES];
V.F. Mukhanov, *Quantum Theory of Gauge Invariant Cosmological Perturbations*, *Zh. Eksp. Teor. Fiz.* **94** (1988) 1 [*Sov. Phys. JETP* **68** (1988) 1297].

[39] J.M. Bardeen, *Gauge Invariant Cosmological Perturbations*, *Phys. Rev.* **D 22** (1980) 1882 [SPIRES].

[40] J.M. Bardeen, P.J. Steinhardt and M.S. Turner, *Spontaneous creation of almost scale — Free density perturbations in an inflationary universe*, *Phys. Rev.* **D 28** (1983) 679 [SPIRES].

[41] K.A. Malik and D. Wands, *Cosmological perturbations*, arXiv:0809.4944 [SPIRES].

JCAP01(2009)012

[42] K.A. Malik, *Gauge-invariant perturbations at second order: multiple scalar fields on large scales*, *JCAP* **11** (2005) 005 [astro-ph/0506532] [SPIRES].

[43] K. Enqvist and A. Vaihkonen, *Non-Gaussian perturbations in hybrid inflation*, *JCAP* **09** (2004) 006 [hep-ph/0405103] [SPIRES].

[44] A. Jokinen and A. Mazumdar, *Very Large Primordial Non-Gaussianity from multi-field: application to Massless Preheating*, *JCAP* **04** (2006) 003 [astro-ph/0512368] [SPIRES].

[45] N. Barnaby and J.M. Cline, *NonGaussian and nonscale-invariant perturbations from tachyonic preheating in hybrid inflation*, *Phys. Rev.* **D 73** (2006) 106012 [astro-ph/0601481] [SPIRES].

[46] D.H. Lyth and Y. Rodriguez, *Non-Gaussianity from the second-order cosmological perturbation*, *Phys. Rev.* **D 71** (2005) 123508 [astro-ph/0502578] [SPIRES]; D.H. Lyth and Y. Rodriguez, *The inflationary prediction for primordial non-Gaussianity*, *Phys. Rev. Lett.* **95** (2005) 121302 [astro-ph/0504045] [SPIRES].

[47] F. Vernizzi and D. Wands, *Non-Gaussianities in two-field inflation*, *JCAP* **05** (2006) 019 [astro-ph/0603799] [SPIRES].

[48] D. Langlois, F. Vernizzi and D. Wands, *Non-linear isocurvature perturbations and non-Gaussianities*, *JCAP* **12** (2008) 004 [arXiv:0809.4646] [SPIRES].

[49] M. Kawasaki, K. Nakayama, T. Sekiguchi, T. Suyama and F. Takahashi, *Non-Gaussianity from isocurvature perturbations*, *JCAP* **11** (2008) 019 [arXiv:0808.0009] [SPIRES].

[50] M. Kawasaki, K. Nakayama, T. Sekiguchi, T. Suyama and F. Takahashi, *A General Analysis of Non-Gaussianity from Isocurvature Perturbations*, arXiv:0810.0208 [SPIRES].

[51] K.A. Malik and D. Wands, *Evolution of second order cosmological perturbations*, *Class. Quant. Grav.* **21** (2004) L65 [astro-ph/0307055] [SPIRES].

[52] J.M. Maldacena, *Non-Gaussian features of primordial fluctuations in single field inflationary models*, *JHEP* **05** (2003) 013 [astro-ph/0210603] [SPIRES].

[53] F. Vernizzi, *On the conservation of second-order cosmological perturbations in a scalar field dominated Universe*, *Phys. Rev.* **D 71** (2005) 061301 [astro-ph/0411463] [SPIRES].

JCAP01(2009)012

6.2.3 Commentaires et précisions

Il est utile de faire quelques commentaires sur le lien entre le formalisme covariant, l'approche coordonnées et l'approche univers séparés (sous-section 5.3.1).

Choix du vecteur u^a et définition de ζ

L'objet fondamental dans le formalisme 1+3 est le champ de vecteur unitaire de genre temps u^a permettant la séparation covariante entre l'espace et le temps. Quand on fait le lien avec l'approche coordonnées, il faut préciser celui-ci. Une question naturelle est donc l'indépendance des résultats obtenus vis-à-vis de ce choix. Dans l'article [345], on a utilisé à la suite de Langlois et Vernizzi [243] u^a tel que $u_i = 0$ dans un système générique de coordonnées $x^\mu = (t, x^i)$. Ceci revient donc à identifier u^μ avec le vecteur n^μ orthogonal aux hypersurfaces de temps constant. Comme discuté après l'équation (2.36), il s'agit de l'unique choix pour que les composantes spatiales de la perturbation de densité d'impulsion mesurée dans le référentiel défini par u^μ, $\delta q_i \equiv \delta\left(-u^\nu T_{\nu\rho} h_i^\rho\right)$ (1.17), coïncident à l'ordre linéaire avec δT_i^0, où 0 fait référence au temps cosmique, également utilisé à l'ordre linéaire sous la notation q_i.

Plus important est le lien entre ζ_a défini à l'équation (6.11) et ζ défini à l'équation (5.16). Les quantités $\zeta^{(1)}$, $\zeta^{(2)}$ (et $\zeta^{(3)}$ dans l'article [253]) définies à partir de ζ_a dans le formalisme covariant coïncident-elles avec les coefficients du développement perturbatif de ζ (5.16) ? Évidemment oui ! mais il est utile de le voir plus en détails. De l'égalité entre θ (5.17) et θ_n (5.18) aux grandes échelles, on en déduit l'égalité entre le nombre de e-folds local d'expansion N (5.22) du formalisme δN et l'expansion intégrée α (6.9) du formalisme covariant, ou encore l'égalité aux grandes échelles entre celui-ci et le paramètre $\tilde{\alpha} = \ln a - \psi$ (5.12) utilisé dans l'approche univers séparés. Les quantités $\zeta^{(n)}$ extraites de $\zeta_a \equiv D_a\alpha - \frac{\dot{\alpha}}{\dot{\rho}} D_a\rho$ sont définies comme les quantités invariantes de jauge coïncidant avec $\delta\alpha^{(n)}$ sur les hypersurfaces de densité d'énergie uniforme (jusqu'à l'ordre n) [243, 345, 253, 139]. Comme $\delta\alpha^{(n)} = \delta\tilde{\alpha}^{(n)} = -\delta\psi^{(n)}$ d'après ce qui précède, elles coïncident donc bien avec les quantités extraites à partir de la définition $\zeta \equiv -\psi|_{\delta\rho=0}$ [1].

Une alternative à l'approche covariante ?

Qu'avons-nous fait dans l'approche covariante pour déterminer les équations du mouvement aux grandes échelles au second ordre dans les perturbations ? Premièrement, nous avons déterminé les équations scalaires exactes du mouvement dont nous avons considéré le gradient spatial de manière covariante. Nous nous sommes ensuite placés dans la limite des grandes échelles pour négliger les termes d'ordre $\mathcal{O}(\epsilon^2)$ (dans les notations de la sous-section 5.3.1). Nous plaçant dans un système de coordonnées, nous avons enfin développé perturbativement les équations obtenues, montrant qu'elles s'écrivent comme le gradient

1. Il convient de faire attention à la définition de ψ. Celle-ci apparaît pour nous dans le facteur $e^{-2\psi}$ dans la partie spatiale de la métrique (5.11). Malik et Wands [290] (ainsi que les références [243, 345]) appellent la même quantité $1-2\psi$. Ainsi, Malik et Wands définissent naturellement $\zeta^{(2)}_{\mathrm{MW}} = \zeta^{(2)} + \left(\zeta^{(1)}\right)^2$. Chacune des quantités $\zeta^{(2)}_{\mathrm{MW}}$ et $\zeta^{(2)}$ est évidemment conservée pour des perturbations adiabatiques. Seul cette-dernière est par contre naturellement reliée aux fluctuations au second ordre du nombre de e-folds d'expansion.

spatial d'une équation scalaire [2]. Ne serait-il pas plus simple de se débarrasser des gradients spatiaux en considérant directement la limite aux grandes échelles des équations scalaires exactes puis en les développant perturbativement ? Des calculs simples montrent qu'effectivement, on peut reproduire les équations de perturbations linéaires et non-linéaires obtenues dans les références [243, 345, 253] en suivant cette méthode. En travaillant dans une jauge donnée pour simplifier les calculs intermédiaires et en réécrivant les équations ainsi obtenues en fonction de quantités invariantes de jauge, les calculs sont même assez rapides. Une étape cruciale dans ces calculs est l'identification, à l'ordre perturbatif auquel on travaille, de la perturbation de densité d'énergie comobile négligeable aux grandes échelles. Pour cela, il est évidemment nécessaire de connaître la jauge comobile – approximative aux ordres non-linéaires [243, 253] – et donc de travailler d'une façon ou d'une autre avec la densité d'impulsion q_i et les gradients spatiaux associés.

Un avantage, relié au point précédent, du formalisme 1+3 est que nombre de manipulations, sans quoi laborieuses ordre par ordre, y sont faites une fois pour toute de manière exacte et covariante. Ceci permet ainsi l'identification de manière non-perturbative du covecteur de densité d'énergie comobile ϵ_a par exemple. Enfin, alors qu'il est facile d'oublier un terme dans une équation scalaire à priori arbitraire, une telle erreur est repérable dans le formalisme 1+3 où les équations obtenues doivent pouvoir s'écrire sous la forme d'un gradient spatial.

6.3 Théorie des perturbations cosmologiques multichamp au troisième ordre et trispectre ekpyrotique (article)

6.3.1 Les scénarios ekpyrotiques

Les scénarios ekpyrotiques sont des modèles d'univers primordiaux dans lesquels l'inflation est remplacée par une phase de contraction lente avant le Big-Bang (voir [250] pour une revue) [3]. Nous avons en effet indiqué à la sous-section 3.1.2 qu'une phase pendant laquelle l'univers se contracte sous l'effet d'une matière d'équation d'état $w > 1$ est à même de résoudre les problèmes conceptuels du modèle du Big Bang chaud [207, 140]. Il n'est pas inutile de donner quelques précisions à ce sujet. Premièrement, il n'existe pas de problème de l'horizon dans ce genre de modèles car les différentes parties de l'univers actuellement observable ont eu le temps de devenir en contact causal avant le Big Bang. Concernant la résolution du problème de la platitude, considérons l'équation de Friedmann (1.28) :

$$H^2 = \frac{1}{3}\left(\frac{-3K}{a^2} + \frac{\rho_m}{a^3} + \frac{\rho_r}{a^4} + \frac{\rho_a}{a^6} + \ldots + \frac{\rho_w}{a^{3(1+w)}}\right) \tag{6.18}$$

où les ρ_i sont constants, les indices font respectivement référence à la matière non-relativiste (m), à la radiation (r), à la densité d'énergie associée aux anisotropies de l'univers (a) et où on a ajouté une autre composante d'équation d'état supposée constante w. Dans un

2. Ceci est cohérent avec l'approche univers séparés qui stipule que la physique hors de l'horizon est locale.

3. Le premier modèle ekpyrotique [207] usait de branes dans un espace-temps à cinq dimensions. Il ne s'agit cependant que d'une réalisation particulière du mécanisme ekpyrotique qui lui peut être discuté plus généralement dans le cadre d'une théorie effective à quatre dimensions. C'est ce point de vue que nous adoptons par la suite.

univers en expansion, la contribution dominant à terme le contenu énergétique de l'univers est celle décroissant le moins vite avec le facteur d'échelle : le terme de courbure en absence de la dernière composante, d'où le problème de la platitude, résolue par l'introduction d'une matière d'équation d'état w telle que $3(1+w) < 2 \Leftrightarrow w < -\frac{1}{3}$, autrement dit par une phase d'inflation (*c.f.* la sous-section 3.1.2). Dans un univers en contraction, ce sont, sans ajout d'ingrédients supplémentaires, les anisotropies qui dominent à terme le contenu énergétique de l'univers. On voit cependant qu'une matière d'équation d'état w telle que $3(1+w) > 6 \Leftrightarrow w > 1$ suffit à résoudre ce problème. Une phase dominée par un tel type de matière est par définition appelée une phase ekpyrotique. Si celle-ci dure suffisamment longtemps (voir [250] pour une discussion quantitative), le problème de la platitude peut donc être résolu. De la même façon que nous nous sommes concentrés sur les phases d'inflation telles que $w \approx -1$, nous considérons en pratique des phases ekpyrotiques telles que $w \gg 1$.

Quel type de matière peut soutenir une telle phase ? L'équation d'état d'un champ scalaire canoniquement normalisé est (3.17)

$$w_\phi \equiv \frac{p_\phi}{\rho_\phi} = \frac{\frac{1}{2}\dot{\phi}^2 - V}{\frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + V} \,. \tag{6.19}$$

Un champ scalaire de potentiel vérifiant $V \approx -\frac{1}{2}\dot{\phi}^2$ est donc parfaitement adapté et, plus précisément, un champ scalaire muni d'un potentiel abrupt et négatif, du type $V(\phi) = -V_0 e^{-c\phi}$ où $c \gg 1$. Ceci peut en fait être généralisé au cas d'un nombre quelconque de champs scalaires ϕ_i en interactions purement gravitationnelles, *i.e.* de potentiel $V = \sum_i V_i(\phi_i)$. Dans le cas $V_i(\phi_i) = -V_{i0} e^{-c_i \phi_i}$, $c_i \gg 1$, les équations couplées d'Einstein et des champs scalaires admettent la solution

$$a = (-t)^{1/\epsilon} \,, \qquad \phi_i = \frac{2}{c_i} \ln\left(-\sqrt{c_i^2 V_{i0}/2t}\right) \,, \qquad \frac{1}{\epsilon} = \sum_i \frac{2}{c_i^2} \tag{6.20}$$

où on utilise un système de coordonnée tel que le temps t est négatif et où ϵ désigne, comme dans l'inflation, le paramètre de décélération $-\dot{H}/H^2$ tel que $\epsilon = \frac{3}{2}(1+w)$. Ainsi, contrairement à l'inflation, $\epsilon \gg 1$ dans la phase ekpyrotique, autrement dit le paramètre de Hubble, négatif, y évolue très rapidement.

Avant de discuter des perturbations cosmologiques générées dans les scénarios ekpyrotiques, il convient de replacer ces derniers dans le contexte du modèle cosmologique standard. Pour relier la phase ekpyrotique (avec $H < 0$) et les phases d'expansion du modèle du Big Bang chaud (avec $H > 0$), il est nécessaire de passer par une phase de rebond et donc par une phase où le paramètre de Hubble croît. Or, les équations de Friedmann (1.19) et (1.20) dans un univers plat fournissent la relation

$$\dot{H} = -\frac{1}{2}\left(\rho + p\right) \tag{6.21}$$

et toutes les formes de matière connues vérifient la condition, dite d'énergie nulle, $\rho + p \geq 0$, empêchant de relier une phase de contraction cosmologique avec une phase d'expansion. Ceci constitue la faiblesse des scénarios ekpyrotiques. Pour cette raison, des modèles violant la condition d'énergie nulle lors de la phase de rebond au moyen d'un "condensat-fantôme" [15] ont été proposés [74, 75, 113]. Dans la suite, nous nous intéressons à l'évolution des

fluctuations cosmologiques avant la phase de rebond. Est-ce que celle-ci peut modifier les fluctuations générées pendant la phase ekpyrotique ? En général oui, mais, si les perturbations sont devenues adiabatiques avant le rebond, on peut montrer, en suivant la logique de l'approche univers séparés, qu'elles ne sont pas affectées par celui-ci même si on n'en dispose pas d'une description précise [90, 410]. Sinon, les calculs menés peuvent être considérés comme prescrivant les conditions initiales à l'évolution ultérieure, non encore connue, pendant la phase de rebond.

Pendant une phase ekpyrotique, le facteur d'échelle est presque constant (6.1) tandis que $|H|$ croît fortement ($\epsilon \gg 1$) de telle façon que le rayon de Hubble comobile ($|aH|^{-1}$) décroît. Ceci implique que tout mode de perturbation de longueur d'onde physique a/k est initialement sous le rayon de Hubble, puis le traverse avant de devenir super-Hubble. On peut donc utiliser, pour étudier les fluctuations de champs scalaires, les mêmes outils que dans l'inflation. Dans une phase ekpyrotique à un champ en particulier, l'équation (3.67) est toujours valable. La différence cruciale avec l'inflation, cependant, est que l'évolution de la fonction z dans l'équation (3.67) est telle que la perturbation de courbure sur les hypersurfaces de densité d'énergie uniforme ζ acquiert généralement [4] un spectre fortement bleu, d'indice spectral $n_s = 3$ [276, 112], contrairement à l'invariance d'échelle avancée initialement [207, 206]. Ces modèles sont donc exclus observationnellement. De manière intéressante, ce n'est pas le cas des scénarios ekpyrotiques multichamps. On peut en effet montrer que les perturbations entropiques acquièrent elles à la traversée de l'horizon un spectre presque invariant d'échelle, qu'elles peuvent ensuite transmettre à la perturbation de courbure ζ si la trajectoire est courbe dans l'espace des champs [252]. Différents modèles ekpyrotiques ont d'ailleurs été proposés selon la période de cette conversion entropique/adiabatique : les modèles de conversion ekpyrotique, pour lesquels celle-ci a lieu durant la phase ekpyrotique, et les modèles de conversion cinétique, pour lesquels la conversion a lieu pendant une phase entre la phase ekpyrotique et le rebond dans laquelle le potentiel s'annule appelée pour cette raison phase cinétique (voir la revue [250] pour plus de détails).

6.3.2 Non-gaussianités ekpyrotiques et contexte scientifique

Effectuons maintenant la rotation depuis la base des champs vers la base adiabatique/entropique pendant la phase ekpyrotique dans le cas de deux champs scalaires ϕ_1 et ϕ_2 de potentiel

$$V(\phi_1, \phi_2) = -V_1 e^{-c_1\phi_1} - V_2 e^{-c_2\phi_2} \,. \tag{6.22}$$

D'après la solution (6.1), l'angle θ de la trajectoire dans l'espace des champs (4.27) est constant dans la phase ekpyrotique (voir la figure 6.1). On peut donc introduire les champs adiabatiques et entropiques

$$\sigma \equiv \frac{1}{\dot\sigma}\left(\dot\phi_1\phi_1 + \dot\phi_2\phi_2\right), \qquad s \equiv \frac{1}{\dot\sigma}\left(\dot\phi_1\phi_2 - \dot\phi_2\phi_1\right) \tag{6.23}$$

4. La possibilité d'obtenir un spectre presque invariant d'échelle en modifiant la dynamique de l'évolution de fond, et donc de la fonction z, de manière appropriée, a récemment été étudiée dans la référence [209].

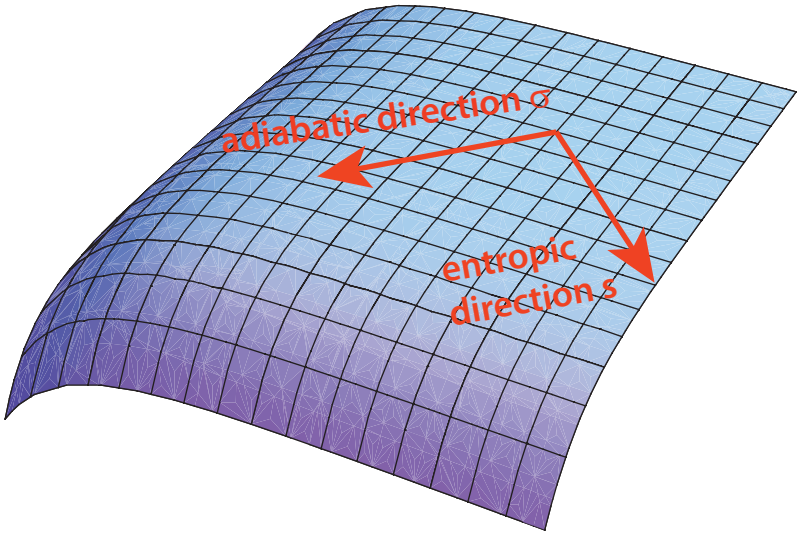

FIGURE 6.1 – Représentation du potentiel (6.24). La solution correspond à un mouvement rectiligne le long de la "crête" du potentiel. Les perturbations sont décomposées en perturbations adiabatiques, parallèles à la trajectoire de fond, et perturbations entropiques transverses à celle-ci. Figure extraite de [251].

– où $\dot{\sigma} = \left(\dot{\phi}_1^2 + \dot{\phi}_2^2\right)^{1/2}$ (4.25) – avec lesquels le potentiel prend la forme [228, 227].

$$V = -V_0 e^{\sqrt{2\epsilon}\sigma}[1 + \epsilon s^2 + \frac{\kappa_3}{3!}\epsilon^{3/2}s^3 + \frac{\kappa_4}{4!}\epsilon^2 s^4 + \cdots], \tag{6.24}$$

avec $\kappa_3 = 2\sqrt{2}(c_1^2 - c_2^2)/|c_1 c_2|$ et $\kappa_4 = 4(c_1^6 + c_2^6)/(c_1^2 c_2^2(c_1^2 + c_2^2))$ et où $s = 0$ correspond à la trajectoire de fond. Dans la suite, en absence d'une motivation microphysique pour le potentiel (6.22), on considère que κ_3 et κ_4 sont des paramètres d'ordre $\sim \mathcal{O}(1)$. Du potentiel (6.24) on déduit que la direction entropique présente une instabilité tachyonique (voir également la figure 6.1) – c'est d'ailleurs cette propriété qui permet aux fluctuations le long de cette direction d'être invariantes d'échelle [228] – et surtout que le champ entropique présente d'importantes auto-interactions cubique et quartique (rappelons que $\epsilon \gg 1$). D'importantes non-gaussianités sont donc à priori attendues dans ce type de scénario, ce qui, ajouté à ses aspects multichamps, en fait un terrain de jeu intéressant pour mettre en pratique les concepts et méthodes présentés dans ce mémoire. Un calcul quantique dans le cadre du formalisme in-in montre par exemple que les non-gaussianités des fluctuations entropiques à la traversée de l'horizon sont négligeables par rapport à celles produites par l'évolution non-linéaire classique hors de l'horizon [226]. Les non-gaussianités générées dans ce type de modèle sont donc de type local (*c.f.* la sous-section 5.3.3). L'amplitude $f_{NL}^{\rm loc}$ du bispectre peut à priori être déterminée d'au moins deux façons : en utilisant le formalisme δN ou en intégrant directement les équations de perturbations non-linéaires dans le régime super-Hubble. La première méthode a été employée par Kazuya et al. dans la référence [226] tandis que Lehners et Steinhardt [255, 254] ont intégré numériquement (et semi-analytiquement) les équations déduites du formalisme covariant par Langlois et Vernizzi [243]. Les deux méthodes donnaient cependant des résultats proches mais diffé-

rents. Comme expliqué à la section 6.2, les équations de la référence [243] comportaient une erreur typographique que G. Tasinato et moi-même avons corrigée [345]. Une fois ceci pris en compte, ainsi qu'une erreur de signe corrigée dans le résultat de la référence [226], l'accord entre les deux méthodes a finalement été prouvé. En passant, ceci a montré que les modèles de conversion ekpyrotique sont très contraints car le paramètre $f_{NL}^{\rm loc}$ y est grand (typiquement $\mathcal{O}(100)$) et négatif alors que les contraintes observationnelles actuelles indiquent que $-10 < f_{NL}^{\rm loc} < 74$ [222]. Les scénarios de conversion cinétique, eux, restent par contre parfaitement viables vis-à-vis des contraintes observationnelles sur le bispectre primordial.

6.3.3 Motivation et résultats

Motivés par le succès de l'application du formalisme covariant à la détermination du bispectre ekpyrotique, Jean-Luc Lehners et moi-même décidâmes d'utiliser ce formalisme pour étudier la théorie des perturbations cosmologiques multichamp au troisième ordre [253]. Notre but était double. Notre premier objectif était de déterminer les équations du mouvement pour les perturbations adiabatique et entropique au troisième ordre dans la théorie des perturbations pour des modèles cosmologiques impliquant deux champs scalaires canoniques. Notre second objectif était d'appliquer ce formalisme général au calcul du trispectre généré dans les scénarios ekpyrotiques, et particulièrement dans ceux de conversion cinétique. Il s'avère en effet que le formalisme δN est difficilement applicable analytiquement dans ce type de modèles. Ces-derniers fournissent donc un exemple de l'utilité de bénéficier d'une alternative au formalisme δN applicable de manière générique. À cet égard, il convient de remarquer que les résultats déterminés dans notre travail [253], exacts dans la limite super-Hubble, sont valables quelle que soit la dynamique du facteur d'échelle et sont donc applicables à tout scénario d'inflation à deux champs par exemple.

Dans le cadre des scénarios ekpyrotique de conversion cinétique, nous avons intégré numériquement les équations du mouvement pour l'espace de fond et pour les perturbations cosmologiques jusqu'au troisième ordre et avons réussi à déterminer une formule analytique approximative pour le paramètre g_{NL} (5.43) (voir également [256])

$$g_{NL} \sim \epsilon \left(\frac{5}{3}\kappa_4 + \frac{5}{4}\kappa_3^2 - 40 \right) . \tag{6.25}$$

L'autre paramètre du trispectre local, τ_{NL}, est lui donné par $\tau_{NL} = \left(\frac{6}{5} f_{NL}^{\rm loc}\right)^2$ étant donné qu'un seul champ (entropique) nourrit les perturbations (*c.f.* la discussion après l'équation (5.49)), où [255, 254]

$$f_{NL}^{\rm loc} \sim \frac{3}{2}\,\kappa_3 \sqrt{\epsilon} + 5 \,. \tag{6.26}$$

Ainsi, alors que $f_{NL}^{\rm loc}$ est d'ordre $\mathcal{O}(10)$ et de signe quelconque, g_{NL} est d'ordre $\mathcal{O}(1000)$ et typiquement négatif (à moins que $|\kappa_3|$ soit grand et/ou κ_4 soit grand et négatif). Ceci montre ainsi comment les futures observations cosmologiques permettront de falsifier – ou tout du moins de contraindre fortement – ou de supporter ce type de scénario cosmologique.

Notons enfin au niveau technique que les calculs menés dans cette article illustrent bien la méthode de construction de variables invariantes de jauge – au troisième ordre dans la théorie des perturbations ! – présentée à la sous-section 2.2.3.

6.3.4 Article

Nous reproduisons à présent l'article [253] publié en 2009 par J-L. Lehners et moi-même (S. R-P) dans *Physical Review D (PRD)* et intitulé *"Multifield cosmological perturbations at third order and the ekpyrotic trispectrum"*. Notons qu'il existe des erreurs typographiques dans les équations 49 et 65 donnant les lois de transformation de jauge des tenseurs au second et au troisième ordre dans la théorie des perturbations. Celles-si sont correctement données aux équations (2.51) et (2.52) respectivement de ce mémoire.

PHYSICAL REVIEW D **80,** 063503 (2009)

Multifield cosmological perturbations at third order and the ekpyrotic trispectrum

Jean-Luc Lehners[1] and Sébastien Renaux-Petel[2]

[1]*Princeton Center for Theoretical Science, Princeton University, Princeton, New Jersey 08544, USA*

[2]*APC (UMR 7164, CNRS, Université Paris 7), 10 rue Alice Domon et Léonie Duquet, 75205 Paris Cedex 13, France*

(Received 12 June 2009; published 2 September 2009)

Using the covariant formalism, we derive the equations of motion for adiabatic and entropy perturbations at third order in perturbation theory for cosmological models involving two scalar fields. We use these equations to calculate the trispectrum of ekpyrotic and cyclic models in which the density perturbations are generated via the entropic mechanism. In these models, the conversion of entropy into curvature perturbations occurs just before the big bang, either during the ekpyrotic phase or during the subsequent kinetic energy dominated phase. In both cases, we find that the nonlinearity parameters f_{NL} and g_{NL} combine to leave a very distinct observational imprint.

DOI: 10.1103/PhysRevD.80.063503 PACS numbers: 98.80.Es, 98.80.Cq, 03.70.+k

I. INTRODUCTION AND SUMMARY OF RESULTS

The cosmic microwave background radiation (CMB) provides us with a staggering amount of information about the early Universe. In fact, its exploration has only recently begun in detail with the WMAP satellite, but with the successful launch of the Planck satellite, we can hope to get yet more precise maps of the microwave sky in the near future. At the same time, surveys of the large-scale structure of the Universe are becoming increasingly detailed, to the point where they can rival the precision of the CMB maps, albeit with more complicated, and less understood, physics involved. The analysis of the statistics of density fluctuations is thus becoming a strong discriminator of competing models of the early Universe.

An increasingly important aspect is non-Gaussianity [1], i.e. the deviation from perfect Gaussian statistics. Indeed, there are many models of the early Universe that, at the linear level, give degenerate predictions (e.g. the large class of inflationary models [2] and ekpyrosis [3])—hence the importance of studying higher correlation functions. As we go to higher n-point functions, the degeneracy typically tends to be broken, as has been demonstrated by the study of the bispectrum in recent years. Clearly, the larger the number of distinct observations that a cosmological model is in agreement with, the more plausible it becomes, and this constitutes the primary reason for extending the analysis to the trispectrum, i.e. the Fourier transform of the 4-point function.

Even though we are looking at what appear to be increasingly small details of the CMB maps, the implications can be far reaching, since different models can give rise to vastly different pictures of the Universe in terms of its long-time evolution and its appearance on scales larger than the current horizon—in this vein one should, for example, compare eternal inflation [4] and the phoenix Universe [5]. Hence, it is of crucial importance to understand the predictions of the various models, ideally before the measurements are made, so that these measurements can be interpreted within a suitably developed theoretical framework.

In this paper, we extend to third order in perturbation theory the derivation of the equations of motion needed to calculate the non-Gaussianity of two-scalar-field cosmological models. For this, we use the covariant formalism, as it provides a conceptually unambiguous path to the definition of higher-order perturbations and the derivation of their equations of motion (for some of our examples, the background evolution is complicated, so that we cannot easily use the δN formalism). The resulting equations are generally applicable, and we have used them here to calculate the trispectrum of perturbations generated by ekpyrotic and cyclic cosmological models. For certain inflationary models, the trispectrum has already been calculated using the δN formalism [6–8], and, in future work, it would certainly be of interest to use the formalism developed here in order to check and extend these results to cases where the δN formalism is less readily applicable.

Ekpyrotic models constitute a case of particular interest regarding non-Gaussianities, since the cosmological perturbations are generated in the presence of a steep potential. Hence, we are automatically in a regime where we expect significant self-interactions of the scalar fields, and hence significantly non-Gaussian distributions of temperature fluctuations. This is in stark contrast to simple inflationary models [9,10], where the flatness of the potential implies that the inflaton is practically massless, with negligible self-interactions. In more complicated inflationary models, such as the curvaton model [11,12], significant non-Gaussianities can be developed due to the interactions of various scalar fields, but with the drawback that the range of possible values for the nonlinearity parameters is difficult to pin down [13]. The beauty of the ekpyrotic models is that, despite the fact that the potential has not been derived microphysically, and that we therefore must use a parameterized form for the potential, the results are nevertheless surprisingly predictive.

 © 2009 The American Physical Society

In this paper, we restrict our attention to those models in which the curvature perturbations are generated via the entropic mechanism [17], as this is the most robust mechanism known to date. In this mechanism, nearly scale-invariant entropy perturbations are generated first, and are subsequently converted into curvature perturbations via a bending of the trajectory in scalar field space just before the big bang. Such a bending of the trajectory is generically expected in various contexts [18–20]. Broadly speaking, there are two limiting cases that are of special interest: the first is where the bending occurs after the ekpyrotic phase, during the approach to the big crunch. In this case, which is the natural case in cyclic models, the kinetic energy of the scalar fields is the dominant contribution to the total energy density while the conversion takes place, and hence we call this case "kinetic conversion." The other limiting case is where the conversion occurs during the ekpyrotic phase, and we call this "ekpyrotic conversion."

Postponing all details to Secs. IV and V, we simply state our main results here. We define the local nonlinearity parameters $f_{\rm NL}$ and $g_{\rm NL}$ via an expansion of the curvature perturbation ζ in terms of its linear, Gaussian part ζ_L,

$$\zeta = \zeta_L + \tfrac{3}{5} f_{\rm NL} \zeta_L^2 + \tfrac{9}{25} g_{\rm NL} \zeta_L^3. \tag{1}$$

During the ekpyrotic phase, we adopt the following parametrization of the potential:

$$V_{\rm ek} = -V_0 e^{\sqrt{2\epsilon}\sigma}\left[1 + \epsilon s^2 + \frac{\kappa_3}{3!}\epsilon^{3/2} s^3 + \frac{\kappa_4}{4!}\epsilon^2 s^4 + \cdots\right], \tag{2}$$

where we expect κ_3, $\kappa_4 \sim \mathcal{O}(1)$ and where $\epsilon \sim \mathcal{O}(10^2)$ is related to the ekpyrotic equation of state $w_{\rm ek}$ via $\epsilon = 3(1 + w_{\rm ek})/2$. σ denotes the adiabatic direction, i.e. the direction tangent to the scalar field space trajectory, while s denotes the "entropy" direction, i.e. the direction perpendicular to the background trajectory. During the ekpyrotic phase, we are able to solve for the entropy perturbation, with the result that

$$\delta s = \delta s_L + \frac{\kappa_3\sqrt{\epsilon}}{8}\delta s_L^2 + \epsilon\left(\frac{\kappa_4}{60} + \frac{\kappa_3^2}{80} - \frac{2}{5}\right)\delta s_L^3, \tag{3}$$

with the linear, Gaussian part δs_L being inversely proportional to time t.

Then, for *kinetic conversions* lasting on the order of 1 e-fold of contraction of the scale factor, we find the following approximate fitting formula for the third-order nonlinearity parameter $g_{\rm NL}$ (and we include $f_{\rm NL}$ for completeness [21,22]):

$$f_{\rm NL} \sim \tfrac{3}{2}\kappa_3\sqrt{\epsilon} + 5 \tag{4}$$

$$g_{\rm NL} \sim 100\epsilon\left(\frac{\kappa_4}{60} + \frac{\kappa_3^2}{80} - \frac{2}{5}\right). \tag{5}$$

These simple formulae accurately reflect the scaling with ϵ, κ_3, κ_4 of the nonlinearity parameters. But crucially, note that when κ_3 and κ_4 are small, $g_{\rm NL}$ is always negative. Hence, even though $f_{\rm NL}$ is small in that case, $g_{\rm NL}$ is negative and typically of order a few thousand, so that any accidental degeneracy at the level of $f_{\rm NL}$ between simple inflationary and cyclic models is very likely to be broken at the level of the trispectrum. More generally, unless $|f_{\rm NL}|$ turns out to be quite large, one would typically expect $g_{\rm NL}$ to be negative, as obtaining a positive $g_{\rm NL}$ in that case would require unnaturally large values of κ_4.

For *ekpyrotic conversions*, it is easier to perform the analysis in terms of the orthogonal fields ϕ_1 and ϕ_2, with ϕ_2 being the direction of the trajectory after the bending (ϕ_1 and ϕ_2 are related to σ and s by a rotation in field space). Then, if the potential is expressed as

$$V_{\rm ek} = -V_1 e^{-c_1\phi_1} - V_2 e^{-c_2\phi_2}, \tag{6}$$

we find the following approximate formulae for the nonlinearity parameters (where $f_{\rm NL}$ was first calculated in [23]):

$$f_{\rm NL} \sim -\tfrac{5}{12}c_1^2 \tag{7}$$

$$g_{\rm NL} \sim \tfrac{25}{108}c_1^4. \tag{8}$$

Here, $f_{\rm NL}$ is always negative, while $g_{\rm NL}$ is always positive, and both scale rather fast with increasing c_1. Since we must have $c_1 \gtrsim 8$ in order not to conflict with spectral index measurements, we can expect future observations to be unambiguous in their support or refutation of these models, and current limits on $f_{\rm NL}$ are already putting some strain on this particular mode of conversion.

The plan of this paper is as follows: we start with a short summary of the covariant formalism, and of how it has been used to derive the equations of cosmological perturbations up to second order in perturbation theory. Then we extend these results to third order, and derive the equations of motion relevant for calculating the trispectrum of cosmological perturbations. In Sec. IV, we define the nonlinearity parameters that are typically used to quote observational results, and that we wish to calculate. Then, in Sec. V, we apply our equations to ekpyrotic models, and numerically solve them for the cases of kinetic and ekpyrotic conversion. We end with a discussion of our results. The Appendix contains a collection of useful formulae.

II. COVARIANT FORMALISM AND PERTURBATION THEORY UP TO SECOND ORDER

Motivated by the calculation of the primordial trispectrum in ekpyrotic models, we study the cosmological fluctuations of a system of two scalar fields at third order in perturbation theory. We adopt the 1 + 3 covariant for-

malism developed by Langlois and Vernizzi [24–27], along the lines of earlier works by Ellis and Bruni [28] and Hawking [29] (see also [30]). Applications of this formalism to a wide variety of cosmological contexts can be found in [31]. It is particularly well suited to analyze fluctuations of the system we consider, as it provides a geometric and, most importantly, a fully nonperturbative description of spacetimes that are distorted away from the standard Friedmann-Lemaitre-Robertson-Walker (FLRW) form.

The idea is to define perturbations via spatial projections of various scalar quantities, such as the energy density or the integrated expansion along a timelike curve. These spatial projections (covectors) vanish for an exact homogeneous and isotropic FLRW spacetime, and hence they naturally play the role of "perturbations," even though they can be defined nonperturbatively. The formalism allows one to derive simple, all-orders, equations of motion for these covectors, which, after choosing a convenient coordinate basis, can be expanded up to the desired order in perturbation theory. Also, the formalism leads to a clear and natural decomposition of fluctuations into adiabatic and entropy components, again in a fully nonperturbative way.

In this section, we give an overview of the covariant formalism and its application to the study of a system of two scalar fields, up to second order in perturbation theory, as done in [27] (see also [32] for an extension to two-field models with nonstandard kinetic terms of the form studied in [33,34]). This provides the necessary groundwork for our investigation of third-order perturbation theory in the following section. We will also focus on the large-scale limit, i.e. we only consider the leading-order terms in an expansion in spatial gradients. In this respect, our formalism is similar to the one developed in [35].

Our analysis is quite general: we do not specify an underlying potential and do not use approximations other than the large-scale limit. In particular, although we will apply it to a particular scenario of a contracting Universe, it is equally well suited to the study of cosmological perturbations generated during a period of inflation.

A. Covariant formalism

A key role in the covariant splitting of space and time in the $1+3$ covariant formalism is played by the *a priori* arbitrary unit timelike vector $u^a = dx^a/d\tau$ ($u_a u^a = -1$), defining a congruence of cosmological observers. The spatial projection tensor orthogonal to the four-velocity u^a is provided by

$$h_{ab} \equiv g_{ab} + u_a u_b, \qquad (h^a{}_b h^b{}_c = h^a{}_c, h_a{}^b u_b = 0), \quad (9)$$

where g_{ab} is the cosmological metric. To describe the time evolution, the covariant definition of the time derivative is then the *Lie derivative* with respect to u^a, defined for a generic covector Y_a by (see e.g. [36])

$$\dot{Y}_a \equiv \mathcal{L}_u Y_a \equiv u^b \nabla_b Y_a + Y_b \nabla_a u^b, \quad (10)$$

and denoted by *a dot*. For scalar quantities, one simply has

$$\dot{f} = u^b \nabla_b f. \quad (11)$$

To describe perturbations in the covariant approach, we consider the projected covariant derivative orthogonal to the four-velocity u^a, denoted by D_a. For a generic tensor, the definition is

$$D_a T_{b\ldots}{}^{c\ldots} \equiv h_a{}^d h_b{}^e \ldots h_f{}^c \ldots \nabla_d T_{e\ldots}{}^{f\ldots}. \quad (12)$$

In particular, when focussing on a scalar quantity f, this reduces to

$$D_a f \equiv h_a{}^b \nabla_b f = \partial_a f + u_a \dot{f}. \quad (13)$$

Geometrical properties of the congruence are defined via the decomposition

$$\nabla_b u_a = \sigma_{ab} + \omega_{ab} + \tfrac{1}{3}\Theta h_{ab} - a_a u_b, \quad (14)$$

with the (symmetric) shear tensor σ_{ab} and the (antisymmetric) vorticity tensor ω_{ab}; the volume expansion, Θ, is defined by

$$\Theta \equiv \nabla_a u^a, \quad (15)$$

while

$$a^a \equiv u^b \nabla_b u^a \quad (16)$$

is the acceleration vector. A useful related quantity is the integrated volume expansion along u^a, defined as

$$\alpha \equiv \frac{1}{3}\int d\tau \Theta \qquad (\Theta = 3\dot{\alpha}). \quad (17)$$

Since $\Theta/3$ corresponds to the local Hubble parameter, one sees that the quantity α can be interpreted as the number of e-folds measured along the worldline of a cosmological observer with four-velocity u^a. Finally, it is always possible to decompose the total energy-momentum tensor of a system as

$$T_{ab} = (\rho + P)u_a u_b + q_a u_b + u_a q_b + g_{ab} P + \pi_{ab}, \quad (18)$$

where ρ, P, q_a, and π_{ab} are, respectively, the energy density, pressure, momentum, and anisotropic stress tensor measured in the frame defined by u^a.

The above quantities enter into the definition of the generalized curvature perturbation on uniform energy density hypersurfaces ζ_a (see [24,25])

$$\zeta_a \equiv D_a \alpha - \frac{\dot{\alpha}}{\dot{\rho}} D_a \rho. \quad (19)$$

ζ_a is the key quantity we want to track the evolution of. In the large-scale limit (for which we are using the notation $\approx$), it satisfies the simple first-order evolution equation

$$\dot{\zeta}_a \approx \frac{\Theta^2}{3\dot{\rho}}\Gamma_a, \tag{20}$$

where

$$\Gamma_a \equiv D_a P - \frac{\dot{P}}{\dot{\rho}} D_a \rho \tag{21}$$

is the nonlinear nonadiabatic pressure perturbation. For a barotropic fluid, $\Gamma_a = 0$ and ζ_a is conserved on large scales. The relation (20) can then be seen as a generalization of the familiar conservation law for ζ, the linear curvature perturbation on uniform energy hypersurfaces [37,38]. Finally, note a useful property of ζ_a: in its definition Eq. (19) one can replace the spatial gradients D_a by partial or covariant derivatives,

$$\zeta_a = \nabla_a \alpha - \frac{\dot{\alpha}}{\dot{\rho}} \nabla_a \rho. \tag{22}$$

The same property of course applies to similar combinations of spatial gradients, such as Γ_a.

B. Two scalar fields

In this subsection, we specify the above formalism to the situation where two scalar fields minimally coupled to gravity fill the Universe. The corresponding Lagrangian density is

$$\mathcal{L} = -\tfrac{1}{2}\partial_a \phi_I \partial^a \phi^I - V(\phi_K), \tag{23}$$

where V is the potential. We assume, for simplicity, canonical kinetic terms. Here and in the following, summation over the field indices ($I, J = 1, 2$) will be implicit. The energy-momentum tensor derived from this Lagrangian reads

$$T_{ab} = \partial_a \phi_I \partial_b \phi^I - \tfrac{1}{2} g_{ab}(\partial_c \phi_I \partial^c \phi^I + 2V). \tag{24}$$

Starting from the energy-momentum tensor (24) one finds

$$\rho \equiv T_{ab} u^a u^b = \tfrac{1}{2}(\dot{\phi}_I \dot{\phi}^I + D_a \phi^I D^a \phi_I) + V, \tag{25}$$

$$P \equiv \tfrac{1}{3} h^{ac} T_{ab} h^b{}_c = \tfrac{1}{2}\left(\dot{\phi}_I \dot{\phi}^I - \tfrac{1}{3} D_a \phi_I D^a \phi^I\right) - V, \tag{26}$$

$$q_a \equiv -u^b T_{bc} h^c{}_a = -\dot{\phi}_I D_a \phi^I, \tag{27}$$

$$\begin{aligned} \pi_{ab} &\equiv h_a{}^c T_{cd} h^d{}_b - P h_{ab} \\ &= D_a \phi_I D_b \phi^I - \tfrac{1}{3} h_{ab} D_c \phi_I D^c \phi^I. \end{aligned} \tag{28}$$

In the two-field case, it is convenient to introduce a particular basis in field space in which various field dependent quantities are decomposed into adiabatic and entropy components. In the linear theory, this decomposition was first introduced in [39] for two fields. For the multifield case, it is discussed in [33,40] in the linear theory and in [35] in the nonlinear context. In our case, the corresponding basis consists of a unit vector e^I_σ defined in the direction of the velocity of the two fields, and thus *tangent* to the trajectory in field space, and of a unit vector e^I_s defined along the direction *orthogonal* to it (with respect to the field space metric G_{IJ}, taken here to be trivial, $G_{IJ} = \delta_{IJ}$, with which the field indices are raised and lowered), namely,

$$\begin{aligned} e^I_\sigma &\equiv \frac{1}{\sqrt{\dot{\phi}_1^2 + \dot{\phi}_2^2}}(\dot{\phi}_1, \dot{\phi}_2), \\ e^I_s &\equiv \frac{1}{\sqrt{\dot{\phi}_1^2 + \dot{\phi}_2^2}}(-\dot{\phi}_2, \dot{\phi}_1). \end{aligned} \tag{29}$$

To make the notation shorter it is convenient to introduce the angle θ defined by

$$\cos\theta \equiv \frac{\dot{\phi}_1}{\sqrt{\dot{\phi}_1^2 + \dot{\phi}_2^2}}, \qquad \sin\theta \equiv \frac{\dot{\phi}_2}{\sqrt{\dot{\phi}_1^2 + \dot{\phi}_2^2}}, \tag{30}$$

so that

$$e^I_\sigma = (\cos\theta, \sin\theta), \qquad e^I_s = (-\sin\theta, \cos\theta). \tag{31}$$

This angle, in contrast with the linear theory case where it is a background quantity that depends only on time, is here an inhomogeneous quantity, which depends on time and space. By taking the time derivative of the basis vectors e^I_σ and e^I_s, we get

$$\dot{e}^I_\sigma = \dot{\theta} e^I_s, \qquad \dot{e}^I_s = -\dot{\theta} e^I_\sigma. \tag{32}$$

It is also convenient to introduce the *formal* notation

$$\dot{\sigma} \equiv \sqrt{G_{IJ}\dot{\varphi}^I \dot{\varphi}^J} = \sqrt{\dot{\phi}_1^2 + \dot{\phi}_2^2}, \tag{33}$$

such that, for instance,

$$e^I_\sigma = \frac{\dot{\phi}^I}{\dot{\sigma}}. \tag{34}$$

Notice that generically, the quantity $\dot{\sigma}$ *is not* the derivative along u^a of a scalar field σ; we just use it as shorthand notation.

Making use of the basis (29), one can then introduce two linear combinations of the scalar field gradients and thus define two covectors, respectively, denoted by σ_a and s_a, as

$$\sigma_a \equiv e_{\sigma I} \nabla_a \phi^I, \tag{35}$$

$$s_a \equiv e_{sI} \nabla_a \phi^I. \tag{36}$$

These two covectors are called the *adiabatic* and *entropy* covectors, respectively, by analogy with the similar definitions in the linear context [33].

Although one can derive a second-order (in time) equation for the adiabatic covector (see [27]), on large scales it is simpler to resort to the evolution equation for ζ_a. In that

purpose, it is useful to introduce the covector

$$\epsilon_a \equiv D_a\rho - \frac{\dot{\rho}}{\dot{\sigma}}\sigma_a^{\perp}, \tag{37}$$

which can be interpreted as a covariant generalization of the *comoving energy density* perturbation. Indeed, it has been shown in [27] that if the shear can be neglected on large scales, ϵ_a is also negligible, in particular, in Eqs. (38) and (39) below. On large scales, the shear rapidly decreases in an expanding Universe while it gets far less blueshifted than the dominant energy contribution in ekpyrotic models; therefore, one can safely neglect it in both cases. However, to accurately describe the evolution of perturbations in a local way on large scales, we will need to keep track of it, as discussed below.

Then, in our two-field system, Eq. (20) reduces to [27]

$$\dot{\zeta}_a \approx \frac{2}{3\dot{\sigma}^3}V_{,\sigma}\epsilon_a + \frac{2\Theta}{3\dot{\sigma}^2}V_{,s}s_a, \tag{38}$$

while the entropic equation can be expressed as

$$\ddot{s}_a + \Theta\dot{s}_a + (V_{,ss} + 3\dot{\theta}^2)s_a \approx -2\frac{\dot{\theta}}{\dot{\sigma}}\epsilon_a. \tag{39}$$

In the above equations, $V_{,\sigma} \equiv e^I_\sigma V_{,I}$, $V_{,s} \equiv e^I_s V_{,I}$, $V_{,ss} \equiv e^I_s e^J_s V_{,IJ}$, etc. Recall that we are using the notation that $\approx$ denotes an equality on large scales. Equations (38) and (39) are our two master equations. They are exact on large scales and despite their simple appearance, they contain all the nonlinearities of the Einstein-scalar field equations on large scales. In the following subsection, we will review how the introduction of a coordinate system enables one to straightforwardly derive from them the linearized and second-order perturbation equations, while we derive new results at third order in the next section. Although the route to pursue is straightforward, intermediate calculations can become long. Therefore, for convenience, we have collected in the Appendix various background as well as first- and second-order expressions that will be used in the rest of this paper.

C. Perturbation theory up to second order

To relate the covariant approach with the more familiar coordinate based formalism (for a recent review of cosmological perturbations in this context, see [41]), one introduces generic coordinates $x^\mu = \{t, x^i\}$ to describe an almost-FLRW spacetime. A prime will then denote a partial derivative with respect to the cosmic time t, i.e. $' \equiv \partial/\partial t$, since the dot has been reserved to denote the Lie derivative with respect to u^a. Also, we expand fields as follows:

$$X(t, x^i) = \bar{X}(t) + \delta X^{(1)}(t, x^i) + \delta X^{(2)}(t, x^i) + \delta X^{(3)}(t, x^i), \tag{40}$$

i.e. without factorial factors, where a quantity with an over bar is evaluated on the background. Here, $\delta X^{(1)}$ refers to a quantity that solves the linearized equations of motion, $\delta X^{(2)}$ the quadratic equations, and so on. Occasionally, and only when we feel that the meaning is unambiguous, we drop the superscript $^{(1)}$ for perturbations at linear order. Also, in the following, u^a is chosen such that $u_i = 0$. The remaining component u_0 is then determined solely in terms of metric quantities.

By expanding Eqs. (35) and (36) up to second order, one finds, for σ_i and s_i respectively,

$$\delta\sigma_i = \partial_i\delta\sigma, \qquad \delta\sigma \equiv \bar{e}_{\sigma I}\delta\phi^I, \tag{41}$$

$$\delta s_i = \partial_i\delta s, \qquad \delta s \equiv \bar{e}_{sI}\delta\phi^I, \tag{42}$$

at linear order and

$$\delta\sigma_i^{(2)} \equiv \partial_i\delta\sigma^{(2)} + \frac{\bar{\theta}'}{\bar{\sigma}'}\delta\sigma\partial_i\delta s - \frac{1}{\bar{\sigma}'}V_i, \tag{43}$$

$$\delta s_i^{(2)} \equiv \partial_i\delta s^{(2)} + \frac{\delta\sigma}{\bar{\sigma}'}\partial_i\delta s' \tag{44}$$

at second order. We have used the definitions

$$\delta\sigma^{(2)} \equiv \bar{e}_{\sigma I}\delta\phi^{I(2)} + \frac{1}{2\bar{\sigma}'}\delta s\delta s', \tag{45}$$

$$\delta s^{(2)} \equiv \bar{e}_{sI}\delta\phi^{I(2)} - \frac{\delta\sigma}{\bar{\sigma}'}\left(\delta s' + \frac{\bar{\theta}'}{2}\delta\sigma\right) \tag{46}$$

and introduced the spatial vector

$$V_i \equiv \tfrac{1}{2}(\delta s\partial_i\delta s' - \delta s'\partial_i\delta s), \tag{47}$$

which we will discuss shortly.

The definitions of the entropy perturbations at first and second order are chosen such that these quantities are gauge invariant. Given a vector ξ^a, the gauge transformation it generates is defined by the transformation law of tensors [41] (whose coordinate functions are a particular case)

$$\tilde{\mathbf{T}} \to e^{\mathcal{L}_\xi}\mathbf{T}. \tag{48}$$

With the perturbative expansion $\xi = \sum_n \frac{1}{n!}\xi_{(n)}$, the first- and second-order perturbations of a tensor $\mathbf{T}$ are then found to transform as [42]

$$\begin{aligned}\delta\mathbf{T}^{(1)} &\to \delta\mathbf{T}^{(1)} + \mathcal{L}_{\xi_{(1)}}\mathbf{T}^{(0)},\\ \delta\mathbf{T}^{(2)} &\to \delta\mathbf{T}^{(2)} + \mathcal{L}_{\xi_{(2)}}\mathbf{T}^{(0)} + \tfrac{1}{2}\mathcal{L}^2_{\xi_{(1)}}\mathbf{T}^{(0)} + \mathcal{L}_{\xi_{(1)}}\delta\mathbf{T}^{(1)}.\end{aligned} \tag{49}$$

Using these relations, it is easy to verify that $\delta s^{(1),(2)}$ are indeed gauge invariant on large scales.

The adiabatic perturbations are gauge-variant quantities, and hence, their definition can be chosen for convenience. In fact, it turns out that an inspection of the momentum density

$$q_i = -\dot{\sigma}\sigma_i \tag{50}$$

typically provides a clue as to what a convenient definition for $\delta\sigma$ ought to be. A straightforward expansion yields

$$\delta q_i = -\partial_i(\bar{\sigma}'\delta\sigma), \tag{51}$$

$$\delta q_i^{(2)} = -\partial_i\left(\bar{\sigma}'\delta\sigma^{(2)} + \frac{1}{2}\frac{\bar{\sigma}''}{\bar{\sigma}'}\delta\sigma^2 + \bar{\theta}'\delta\sigma\delta s\right) - \frac{1}{\bar{\sigma}'}\delta\epsilon\partial_i\delta\sigma + V_i, \tag{52}$$

and hence we can see that the momentum density perturbations almost automatically vanish when the adiabatic perturbations do. In other words, setting the adiabatic perturbations to zero (as a gauge choice) almost automatically corresponds to adopting comoving gauge. The fly in the ointment is the spatial vector V_i. However, as can be seen from its definition above, V_i vanishes when $\delta s'$ and δs have the same spatial dependence, i.e. when $\delta s' = f(t)\delta s$. This condition is fulfilled for super-Hubble modes in inflationary and also in ekpyrotic models, as such relative spatial gradients are heavily suppressed on large scales in both cases. Thus, we can define an approximate comoving gauge at second order, which coincides with setting $\delta\sigma^{(1)} = \delta\sigma^{(2)} = 0$.

Expanding now Eq. (37), one finds

$$\delta\epsilon_i = \partial_i\delta\epsilon, \qquad \delta\epsilon \equiv \delta\rho - \frac{\bar{\rho}'}{\bar{\sigma}'}\delta\sigma, \tag{53}$$

where $\delta\epsilon$ is the first-order comoving energy density perturbation, while at second order,

$$\delta\epsilon_i^{(2)} = \partial_i\delta\epsilon^{(2)} + \frac{\delta\sigma}{\bar{\sigma}'}\partial_i\delta\epsilon^{(1)\prime} - 3HV_i, \tag{54}$$

with $\delta\epsilon^{(2)}$ defined by

$$\delta\epsilon^{(2)} \equiv \delta\rho^{(2)} - \frac{\bar{\rho}'}{\bar{\sigma}'}\delta\sigma^{(2)} - \frac{\delta\sigma}{\bar{\sigma}'}\left[\delta\epsilon^{(1)\prime} + \frac{1}{2}\left(\frac{\bar{\rho}'}{\bar{\sigma}'}\right)'\delta\sigma + \frac{\bar{\rho}'}{\bar{\sigma}'}\bar{\theta}'\delta s\right]. \tag{55}$$

representing the energy density in the approximate comoving gauge on large scales.

As for the curvature perturbation on uniform energy density hypersurfaces, it reads

$$\delta\zeta_i = \partial_i\zeta, \qquad \zeta \equiv \delta\alpha - \frac{H}{\bar{\rho}'}\delta\rho, \tag{56}$$

$$\zeta_i^{(2)} = \partial_i\zeta^{(2)} + \frac{\delta\rho}{\bar{\rho}'}\partial_i\zeta^{(1)\prime}, \tag{57}$$

with

$$\zeta^{(2)} \equiv \delta\alpha^{(2)} - \frac{H}{\bar{\rho}'}\delta\rho^{(2)} - \frac{\delta\rho}{\bar{\rho}'}\left[\zeta^{(1)\prime} + \frac{1}{2}\left(\frac{H}{\bar{\rho}'}\right)'\delta\rho\right]. \tag{58}$$

Using the transformations (49), one can readily verify that $\delta\epsilon^{(1),(2)}$ and $\zeta^{(1),(2)}$ are gauge-invariant quantities on large scales.

After these identifications of the desired gauge-invariant quantities, the expansion of the master equations Eqs. (38) and (39) on large scales gives (neglecting the first- and second-order comoving energy density $\delta\epsilon$ and $\delta\epsilon^{(2)}$ at the end of the calculation)

$$\zeta' \approx -\frac{2H}{\bar{\sigma}'}\bar{\theta}'\delta s, \tag{59}$$

$$\delta s'' + 3H\delta s' + (\bar{V}_{,ss} + 3\bar{\theta}'^2)\delta s \approx 0 \tag{60}$$

at first order, and

$$\zeta^{(2)\prime} \approx -\frac{H}{\bar{\sigma}'^2}\left[2\bar{\theta}'\bar{\sigma}'\delta s^{(2)} - (\bar{V}_{,ss} + 4\bar{\theta}'^2)\delta s^2 + \frac{\bar{V}_{,\sigma}}{\bar{\sigma}'}\delta s\delta s'\right], \tag{61}$$

$$\delta s^{(2)\prime\prime} + 3H\delta s^{(2)\prime} + (\bar{V}_{,ss} + 3\bar{\theta}'^2)\delta s^{(2)} \approx -\frac{\bar{\theta}'}{\bar{\sigma}'}\delta s'^2 - \frac{2}{\bar{\sigma}'}\left(\bar{\theta}'' + \bar{\theta}'\frac{\bar{V}_{,\sigma}}{\bar{\sigma}'} - \frac{3}{2}H\bar{\theta}'\right)\delta s\delta s' - \left(\frac{1}{2}\bar{V}_{,sss} - 5\frac{\bar{\theta}'}{\bar{\sigma}'}\bar{V}_{,ss} - 9\frac{\bar{\theta}'^3}{\bar{\sigma}'}\right)\delta s^2 \tag{62}$$

at second order. It is worth commenting that if one neglects the covector ϵ_a in Eqs. (38) and (39) from the beginning, one can write the second-order equations of motion derived from them as a total gradient, and hence in a local form as in Eqs. (61) and (62), only if one assumes throughout that $V_i = 0$. If ϵ_a is kept however, the equations of motion become local, and the two limits of the equations agree if the scalar quantities $\delta\epsilon$ and $\delta\epsilon^{(2)}$ are neglected, as is appropriate.

These equations form a closed system: on large scales, the entropy perturbation evolves independently of the adiabatic component, and it sources the curvature perturbation. In the next section, we will derive the corresponding third-order equations, which are needed for the study of the primordial trispectrum of curvature perturbation.

III. DERIVING THE THIRD-ORDER EQUATIONS OF MOTION

Let us start by identifying the third-order curvature perturbation on a hypersurface of uniform energy density. By expanding Eq. (19), one finds, after some manipulations, that one can write

$$\delta\zeta_i^{(3)} \equiv \partial_i\zeta^{(3)} + \frac{\delta\rho}{\bar{\rho}'}\partial_i\zeta^{(2)\prime} + \frac{\delta\rho^{(2)}}{\bar{\rho}'}\partial_i\zeta^{(1)\prime} - \frac{\bar{\rho}''}{2\bar{\rho}'^3}\delta\rho^2\partial_i\zeta^{(1)\prime} + \frac{\delta\rho^2}{2\bar{\rho}'^2}\partial_i\zeta^{(1)\prime\prime}, \tag{63}$$

with

$$\zeta^{(3)} = \delta\alpha^{(3)} - \frac{H}{\bar\rho'}\delta\rho^{(3)} - \frac{1}{\bar\rho'}\left(\delta\alpha' - \frac{H}{\bar\rho'}\delta\rho'\right) \times \left(\delta\rho^{(2)} - \frac{\delta\rho\delta\rho'}{\bar\rho'} + \frac{\bar\rho''\delta\rho^2}{2\bar\rho'^2}\right) - \frac{\delta\rho}{\bar\rho'}\left(\delta\alpha^{(2)'} - \frac{H}{\bar\rho'}\delta\rho^{(2)'}\right) + \frac{\delta\rho^2}{2\bar\rho'^2}\left(\delta\alpha'' - \frac{H}{\bar\rho'}\delta\rho''\right) + \frac{1}{\bar\rho'}\left(\frac{H}{\bar\rho'}\right)'\delta\rho^{(2)}\delta\rho - \frac{1}{\bar\rho'^2}\left(\frac{H}{\bar\rho'}\right)'\delta\rho^2\delta\rho' - \frac{1}{6\bar\rho'}\left[\frac{1}{\bar\rho'}\left(\frac{H}{\bar\rho'}\right)'\right]'\delta\rho^3. \tag{64}$$

Moreover, by applying the gauge transformation at third order [42]

$$\delta\mathbf{T}^{(3)} \to \delta\mathbf{T}^{(3)} + \mathcal{L}_{\xi_{(1)}}\delta\mathbf{T}^{(2)} + \left(\frac{1}{2}\mathcal{L}^2_{\xi_{(1)}} + \mathcal{L}_{\xi_{(2)}}\right)\delta\mathbf{T}^{(1)} + \left(\mathcal{L}_{\xi_{(3)}} + \mathcal{L}_{\xi_{(1)}}\mathcal{L}_{\xi_{(2)}} + \frac{1}{6}\mathcal{L}^3_{\xi_{(1)}}\right)\mathbf{T}^{(0)} \tag{65}$$

to the covector ζ_a (for which the formula simplifies since $\zeta_a^{(0)} = 0$), one verifies that $\zeta^{(3)}$ is indeed gauge invariant at third order on large scales. From its definition Eq. (64), one sees that it has the desired interpretation as the third-order curvature perturbation (or perturbation in the integrated expansion α) on uniform energy density hypersurfaces. It also matches the definition of the same quantity on large scales given in [43]. Its evolution equation can be found by expanding Eq. (20):

$$\zeta^{(3)'} = -\frac{H}{\bar\sigma'^2}\Gamma^{(3)} - \frac{4}{3\bar\sigma'^2}\Gamma^{(2)}\zeta^{(1)'} - \frac{1}{3H\bar\sigma'^2}\Gamma^{(1)}(\zeta^{(1)'})^2 - \frac{2}{3\bar\sigma'^2}\Gamma^{(1)}\zeta^{(2)'}, \tag{66}$$

where $\Gamma^{(3)}$ is defined in the same way as $\zeta^{(3)}$ in Eqs. (63) and (64) with the replacements $\alpha \to P$, $\zeta \to \Gamma$.

As the nonadiabatic pressure perturbation Γ_a is ultimately related to the presence of the entropic perturbation [see Eq. (38)], one needs to identify the latter at third order. This is similar to the analysis carried out for the curvature perturbation, except that has to bear in mind that $\delta\sigma^{(2)}$ does not transform as the second-order perturbation of a scalar quantity. Instead,

$$\delta\sigma^{(2)} \to \delta\sigma^{(2)} + \xi^0_{(2)}\bar\sigma' + \tfrac{1}{2}\xi^0_{(1)}(\xi^0_{(1)}\bar\sigma')' + \xi^0_{(1)}\delta\sigma' - \xi^0_{(1)}\bar\theta'\delta s, \tag{67}$$

where the last term is different from the transformation properties of say $\delta\rho^{(2)}$. Then, using Eqs. (A6) and (A9), one finds

$$\delta s_i^{(3)} \equiv \partial_i\delta s^{(3)} + \frac{\delta\sigma}{\bar\sigma'}\partial_i\delta s^{(2)'} + \frac{\delta\sigma^{(2)}}{\bar\sigma'}\partial_i\delta s' - \frac{\sigma''}{2\bar\sigma'^3}\delta\sigma^2\partial_i\delta s' + \frac{(\delta\sigma)^2}{2\bar\sigma'^2}\partial_i\delta s'' + \frac{(\delta s' + 2\bar\theta'\delta\sigma)}{2\bar\sigma'^2}\delta s\partial_i\delta s', \tag{68}$$

where $\delta s^{(3)}$ is a gauge-invariant quantity at third order on large scales, with the explicit definition

$$\delta s^{(3)} \equiv \bar e_{sI}\delta\phi^{I(3)} - \frac{\delta\sigma^{(2)}}{\bar\sigma'}(\delta s' + \bar\theta'\delta\sigma) - \frac{\delta\sigma}{\bar\sigma'}\delta s^{(2)'} - \frac{\delta\sigma^2}{2\bar\sigma'^2}\left(\delta s'' - \frac{\bar\sigma''}{\bar\sigma}\delta s' + \bar\theta'^2\delta s\right) - \frac{\delta\sigma^3}{6\bar\sigma'}\left(\frac{\bar\theta'}{\bar\sigma'}\right)' - \frac{\bar\theta'}{2\bar\sigma'^2}\delta s\delta s'\delta\sigma. \tag{69}$$

Of course, one could have added additional gauge-invariant terms to the definition of $\delta s^{(3)}$, e.g. terms involving cubic combinations of the entropy perturbation at first order. Our definition is the most natural as it represents the purely third-order perturbations of the fields perpendicular to the trajectory in the approximate comoving gauge where $\delta\sigma^{(1)} = \delta\sigma^{(2)} = 0$. One can also build up $\delta s^{(3)}$ by identifying the gauge-invariant quantity that precisely reduces to $\bar e_{sI}\delta\phi^{I(3)}$ in the approximate comoving gauge. Using the transformation rules for the field perturbations, this leads to the same definition Eq. (69).

There is more freedom for the adiabatic perturbation as one is not guided by gauge-invariance requirements. Expanding Eq. (35) using Eqs. (A5) and (A7), one obtains

$$\delta\sigma_i^{(3)} = \partial_i\delta\sigma^{(3)} + \frac{\bar\theta'}{\bar\sigma'}(\delta\sigma\partial_i\delta s^{(2)} + \delta\sigma^{(2)}\partial_i\delta s) + \frac{\delta\sigma}{\bar\sigma'^2}(\delta s' + \bar\theta'\delta\sigma)\partial_i\delta s' + \frac{1}{2\bar\sigma'^2}(\delta s' + \bar\theta'\delta\sigma)^2\partial_i\delta\sigma + \left(\frac{\bar\theta'^2}{\bar\sigma'^2}\delta s + \left(\frac{\bar\theta'}{\bar\sigma'}\right)'\frac{\delta\sigma}{2} + \frac{1}{\bar\sigma'}\delta s'' - \frac{\bar\sigma''}{\bar\sigma'^2}\delta s'\right) \times \delta\sigma\partial_i\delta s - \frac{1}{\bar\sigma'}V_i^{(3)} - \frac{\bar\theta'}{3\bar\sigma'^2}\delta s V_i, \tag{70}$$

with

$$\delta\sigma^{(3)} \equiv \bar e_{\sigma I}\delta\varphi^{I(3)} + \frac{1}{2\bar\sigma'}(\delta s\delta s^{(2)'} + \delta s^{(2)}\delta s') + \frac{\bar\theta'}{6\bar\sigma'^2}\delta s^2\delta s' \tag{71}$$

and

$$V_i^{(3)} = \frac{1}{2}(\delta s^{(2)}\partial_i\delta s' + \delta s\partial_i\delta s^{(2)'} - \delta s^{(2)'}\partial_i\delta s - \delta s'\partial_i\delta s^{(2)}), \tag{72}$$

which is the natural generalization to third order of the nonlocal term V_i. The global consistency of the formalism leads us to the particular choice Eq. (71) for $\delta\sigma^{(3)}$ as will be clear from the subsequent discussion of the momentum.

Expanding Eq. (50), one finds, after a long calculation,

$$\begin{aligned} q_i^{(3)} = &-\partial_i\Big(\bar\sigma'\delta\sigma^{(3)} + \bar\theta'\delta\sigma\delta s^{(2)} + \bar\theta'\delta\sigma^{(2)}\delta s + \frac{\bar\sigma''}{\bar\sigma'}\delta\sigma^{(2)}\delta\sigma + \frac{\bar\theta'}{\bar\sigma'}(\delta\sigma)^2\delta s' + \frac{1}{2\bar\sigma'}\delta\sigma(\delta s')^2 + \frac{1}{2}\Big(\frac{\bar\sigma''\bar\theta'}{\bar\sigma'^2} + \frac{\bar\theta''}{\bar\sigma'}\Big)\delta s\delta\sigma^2 \\ &- \frac{(\bar V_{,ss} + \bar\theta'^2)}{2\bar\sigma'}\delta s^2\delta\sigma + \frac{\bar V_{,\sigma}}{2\bar\sigma'^2}\delta s\delta s'\delta\sigma + \Big(-\frac{2\bar V_{,\sigma\sigma} - \bar\theta'^2}{2\bar\sigma'} + \frac{1}{2\bar\sigma'^2}\Big(\frac{\bar\rho'}{\bar\sigma'}\Big)' - \frac{(\bar\sigma'')^2}{2\bar\sigma'^3} + \frac{\bar\theta'^2}{2\bar\sigma'}\Big)\frac{\delta\sigma^3}{3} - \frac{\delta\epsilon^{(2)}\partial_i\delta\sigma}{\bar\sigma'} \\ &- \frac{\delta\epsilon\partial_i\delta\sigma^{(2)}}{\bar\sigma'} - \frac{\delta\sigma\delta\epsilon'\partial_i\delta\sigma}{\bar\sigma'^2} + \frac{\delta\epsilon^2\partial_i\delta\sigma}{2\bar\sigma'^3} + \frac{\bar\sigma''}{\bar\sigma'^3}\delta\epsilon\delta\sigma\partial_i\delta\sigma - \frac{3H\delta\sigma V_i}{\bar\sigma'} + \frac{\bar\theta'}{\bar\sigma'^2}\delta\epsilon\partial_i(\delta s\delta\sigma) + \frac{\bar V_{,\sigma s}}{\bar\sigma'}\delta\sigma\delta s\partial_i\delta\sigma \\ &+ \frac{\bar V_{,ss}}{2\bar\sigma'}\delta s^2\partial_i\delta\sigma + V_i^{(3)} + \frac{4\bar\theta'}{3\bar\sigma'}\delta s V_i + \frac{\delta\epsilon}{\bar\sigma'^2}V_i. \end{aligned} \tag{73}$$

The third-order momentum is similar in form to the second-order one, Eq. (52). In particular, it also cannot directly be written as a total gradient. Of particular relevance are the last three terms. While the last two involve the second-order quantity V_i, negligible in the approximate comoving gauge at second order, there also appears its third-order generalization $V_i^{(3)}$. $V_i^{(3)}$ again vanishes when the total entropy perturbation factorizes in terms of its time and spatial dependence, and we neglect it for the same reason that we neglect V_i at second order, namely, that such differences of spatial gradients are heavily suppressed on large scales in both inflationary and ekpyrotic models. When both V_i and $V_i^{(3)}$ are negligible, one can define the comoving gauge at third order on large scales as $\delta\sigma = \delta\sigma^{(2)} = \delta\sigma^{(3)} = 0$.

Using the definitions above, we can define the (approximate) comoving energy density at third order. Requiring that this should be a gauge-invariant quantity at third order on large scales, reducing to the third-order perturbation of the energy density in the approximate comoving gauge, we are led to define

$$\begin{aligned} \epsilon^{(3)} \equiv\ &\delta\rho^{(3)} - \frac{\bar\rho'}{\bar\sigma'}\delta\sigma^{(3)} - \frac{1}{\bar\sigma'}\Big(\delta\rho' - \frac{\bar\rho'}{\bar\sigma'}\delta\sigma'\Big)\Big(\delta\sigma^{(2)} - \frac{\delta\sigma\delta\sigma'}{\bar\sigma'} + \frac{\bar\sigma''\delta\sigma^2}{2\bar\sigma'^2}\Big) - \frac{\delta\sigma}{\bar\sigma'}\Big(\delta\rho^{(2)\prime} - \frac{\bar\rho'}{\bar\sigma'}\delta\sigma^{(2)\prime}\Big) \\ &+ \frac{\delta\sigma^2}{2\bar\sigma'^2}\Big(\delta\rho'' - \frac{\bar\rho'}{\bar\sigma'}\delta\sigma''\Big) + \frac{1}{\bar\sigma'}\Big(\frac{\bar\rho'}{\bar\sigma'}\Big)'\delta\sigma^{(2)}\delta\sigma - \frac{1}{\bar\sigma'^2}\Big(\frac{\bar\rho'}{\bar\sigma'}\Big)'\delta\sigma^2\delta\sigma' - \frac{1}{6\bar\sigma'}\Big[\frac{1}{\bar\sigma'}\Big(\frac{\bar\rho'}{\bar\sigma'}\Big)'\Big]'\delta\sigma^3 \\ &- \frac{\bar\rho'\bar\theta'}{\bar\sigma'^2}(\delta s\delta\sigma^{(2)} + \delta s^{(2)}\delta\sigma) - \frac{\bar\theta'}{\bar\sigma'^2}\delta\rho'\delta s\delta\sigma + \frac{2\bar\rho'\bar\theta'}{\bar\sigma'^3}\delta\sigma\delta\sigma'\delta s - \frac{\bar\rho'\bar\theta'^2}{6\bar\sigma'^3}\delta\sigma^3 - \frac{\bar\rho'}{2\bar\sigma'^3}\delta\sigma\delta s'^2 \\ &+ \frac{\bar\rho'(\bar V_{,ss} + \bar\theta'^2)}{2\bar\sigma'^3}\delta s^2\delta\sigma + \Big(\frac{\bar\rho''\bar\theta'}{\bar\sigma'^3} + \frac{\bar\rho'\bar\theta''}{2\bar\sigma'^3} - \frac{3\bar\theta'\bar\rho'\bar\sigma''}{2\bar\sigma'^4}\Big)\delta s\delta\sigma^2 - \frac{\bar V_{,\sigma}\bar\rho'}{2\bar\sigma'^4}\delta s\delta s'\delta\sigma - \frac{3H\bar\theta'}{\bar\sigma'^2}\delta\sigma\delta\epsilon\delta s. \end{aligned} \tag{74}$$

Expanding Eq. (37), with the experience of the calculation of $\zeta_i^{(3)}$, one obtains, using Eqs. (A9)–(A12)

$$\begin{aligned} \epsilon_i^{(3)} = &\partial_i\epsilon^{(3)} + \frac{\delta\sigma}{\bar\sigma'}\partial_i\epsilon^{(2)\prime} + \frac{\delta\sigma^{(2)}}{\bar\sigma'}\partial_i\epsilon^{(1)\prime} - \frac{\bar\sigma''}{2\bar\sigma'^3}\delta\sigma^2\partial_i\epsilon^{(1)\prime} + \frac{\delta\sigma^2}{2\bar\sigma'^2}\partial_i\epsilon^{(1)\prime\prime} \\ &+ \frac{\delta\sigma}{\bar\sigma'}\Big[3V_i\Big(\frac{1}{2}\bar\sigma'^2 + 3H^2\Big) + \frac{\bar\theta'\delta s\partial_i\delta\epsilon'}{\bar\sigma'} - \frac{3H\bar\theta'}{\bar\sigma'}(\delta\epsilon\partial_i\delta s - \delta s\partial_i\delta\epsilon)\Big] - 3HV_i^{(3)} - \frac{4H\bar\theta'}{\bar\sigma'}\delta s V_i + \frac{V_i\delta\epsilon'}{\bar\sigma'^2}, \end{aligned} \tag{75}$$

where the two nonlocal terms V_i and $V_i^{(3)}$ naturally appear.

We now have all the necessary ingredients to derive the third-order equations of motion on large scales. Using the first and second-order results (which can be read off from Eqs. (59) and (61)

$$\Gamma^{(1)} \approx -2\bar V_{,s}\delta s, \tag{76}$$

$$\Gamma^{(2)} \approx -2\bar V_{,s}\delta s^{(2)} - \bar V_{,ss}\delta s^2 + \frac{\bar V_{,\sigma}}{\bar\sigma'}\delta s\delta s', \tag{77}$$

we deduce from the equivalent of Eq. (63) that

$$\begin{aligned} \Gamma^{(3)} \approx &-2\bar V_{,s}\delta s^{(3)} - 2\bar V_{,ss}\delta s\delta s^{(2)} + \frac{\bar V_{,\sigma}}{\bar\sigma'}(\delta s^{(2)}\delta s)' \\ &- \frac{1}{3}\bar V_{,sss}\delta s^3 + \frac{\theta'\bar V_{,\sigma} + 3\bar V_{,\sigma s}}{3\bar\sigma'}\delta s'\delta s^2. \end{aligned} \tag{78}$$

Hence, from Eq. (79), we obtain

$$\zeta^{(3)\prime} \approx \frac{2H}{\bar{\sigma}'^2}\Big(\bar{V}_{,s}\delta s^{(3)} - \frac{1}{2\bar{\sigma}'}\bar{V}_{,\sigma}(\delta s\delta s^{(2)})' - \frac{\bar{\theta}'}{6\bar{\sigma}'^2}\bar{V}_{,\sigma}\delta s^2\delta s' + \bar{V}_{,ss}\delta s\delta s^{(2)} - \frac{1}{2\bar{\sigma}'}\bar{V}_{,s\sigma}\delta s^2\delta s' + \frac{1}{6}\bar{V}_{,sss}\delta s^3\Big) + \frac{8H}{\bar{\sigma}'^4}\Big(\bar{V}_{,s}^2\delta s\delta s^{(2)} - \frac{1}{2\bar{\sigma}'}\bar{V}_{,s}\bar{V}_{,\sigma}\delta s^2\delta s' + \frac{1}{2}\bar{V}_{,s}\bar{V}_{,ss}\delta s^3\Big) + \frac{8H}{\bar{\sigma}'^6}\bar{V}_{,s}^3\delta s^3. \tag{79}$$

This equation describes the evolution of the curvature perturbation on large scales at third order, and how it is sourced by the entropy perturbation up to third order. It is the third-order counterpart of Eqs. (59) and (61). Note that, once the potential V becomes irrelevant, ζ is conserved on large scales. This is important, as the potential indeed becomes irrelevant in the approach to the big crunch in ekpyrotic models.

To complete the system of equations, one needs to derive the second order (in time) equation of motion for $\delta s^{(3)}$. This is done by expanding Eq. (39) up to third order, with the result that

$$\delta s^{(3)\prime\prime} + 3H\delta s^{(3)\prime} + (\bar{V}_{,ss} + 3\bar{\theta}'^2)\delta s^{(3)} + 2\frac{\bar{\theta}'}{\bar{\sigma}'}\delta s^{(2)\prime}\delta s' + \Big(2\frac{\bar{\theta}''}{\bar{\sigma}'} + 2\frac{\bar{\theta}'\bar{V}_{,\sigma}}{\bar{\sigma}'^2} - 3H\frac{\bar{\theta}'}{\bar{\sigma}'}\Big)(\delta s^{(2)}\delta s)' + \Big(\bar{V}_{,sss} - 10\frac{\bar{\theta}'\bar{V}_{,ss}}{\bar{\sigma}'} - 18\frac{\bar{\theta}'^3}{\bar{\sigma}'}\Big)\delta s^{(2)}\delta s + \frac{\bar{V}_{,\sigma}}{\bar{\sigma}'^3}\delta s'^3 + \Big(\frac{\bar{V}_{,\sigma\sigma}}{\bar{\sigma}'^2} + 3\frac{\bar{V}_{,\sigma}^2}{\bar{\sigma}'^4} + 3H\frac{\bar{V}_{,\sigma}}{\bar{\sigma}'^3} - 2\frac{\bar{V}_{,ss}}{\bar{\sigma}'^2} - 6\frac{\bar{\theta}'^2}{\bar{\sigma}'^2}\Big)\delta s'^2\delta s + \Big(-10\frac{\bar{\theta}'\bar{\theta}''}{\bar{\sigma}'^2} - \frac{3}{2\bar{\sigma}'}\bar{V}_{,ss\sigma} - 5\frac{\bar{V}_{,\sigma}\bar{V}_{,ss}}{\bar{\sigma}'^3} - 7\frac{\bar{\theta}'^2\bar{V}_{,\sigma}}{\bar{\sigma}'^3} - 3H\frac{\bar{V}_{,ss}}{\bar{\sigma}'^2} + 14H\frac{\bar{\theta}'^2}{\bar{\sigma}'^2}\Big)\delta s'\delta s^2 + \Big(\frac{1}{6}\bar{V}_{,ssss} - \frac{7}{3}\frac{\bar{\theta}'}{\bar{\sigma}'}\bar{V}_{,sss} + 2\frac{\bar{V}_{,ss}^2}{\bar{\sigma}'^2} + 21\frac{\bar{\theta}'^2\bar{V}_{,ss}}{\bar{\sigma}'^2} + 27\frac{\bar{\theta}'^4}{\bar{\sigma}'^2}\Big)\delta s^3 = 0. \tag{80}$$

Similarly to the second-order calculation, one can derive the same equation by neglecting the covector ϵ_a in Eq. (39) from the beginning, if at the same time one assumes that both $V_i = 0$ and $V_i^{(3)} = 0$.

Equations (79) and (80) are the key results of this section. They describe the coupled third-order perturbations of a system of two scalar fields on large scales without any approximations. In the following sections, we will use them to evaluate the primordial trispectrum in various ekpyrotic models of the Universe. However, we emphasize that these equations are valid on superhorizon scales whatever the dynamics of the scale factor of the Universe, so that they are equally well suited to the study of cosmological perturbations generated during a period of inflation.

IV. NONLINEARITY PARAMETERS AT THIRD ORDER

The observable that is relevant for comparison with observations is the curvature perturbation ζ, and hence this is the variable that we will focus on. In particular, we wish to evaluate the trispectrum, i.e. the Fourier transform of the 4-point function of the curvature perturbation. We are interested in calculating the classical nonlinearity generated on super-Hubble scales. This was shown to be a good approximation for the bispectrum in [23], and consequently we expect this to be a good approximation for the trispectrum also. In other words, we expect the nonlinearity on sub-Hubble scales to be subdominant compared to the nonlinear classical super-Hubble evolution.

We only need to consider the connected part of the 4-point function, i.e. the part that is not captured by products of 2-point functions. If a distribution is exactly Gaussian, all information is contained in the 2-point function. In particular this means that when n is odd, all n-point functions are zero, and when n is even they can be decomposed into products of 2-point functions. Here, we therefore consider the part of the 4-point function that is not already captured by the product of two 2-point functions. Thus, we define

$$\langle\zeta_{k_1}\zeta_{k_2}\zeta_{k_3}\zeta_{k_4}\rangle_c = (2\pi)^3\delta^3(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3 + \mathbf{k}_4)T(k_1, k_2, k_3, k_4), \tag{81}$$

where T describes two different shape functions parameterized by the k-independent parameters $\tau_{\rm NL}$ and $g_{\rm NL}$, see [8] for more details. These are defined via

$$T = \tau_{\rm NL}[P(k_{13})P(k_3)P(k_4) + 11 \text{ permutations}] + \frac{54}{25}g_{\rm NL}[P(k_2)P(k_3)P(k_4) + 3 \text{ permutations}], \tag{82}$$

where $P(k)$ is the power spectrum defined by the 2-point function

$$\langle\zeta_{k_1}\zeta_{k_2}\rangle = (2\pi)^3\delta^3(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2)P(k_1), \tag{83}$$

and $\mathbf{k}_{ij} = \mathbf{k}_i + \mathbf{k}_j$.

The parameters $\tau_{\rm NL}$ and $g_{\rm NL}$ can be related to an expansion of the curvature perturbation in terms of its Gaussian component, as follows. The Bardeen space-space metric perturbation Φ_H [44] is expanded as

$$\Phi_H = \Phi_L + f_{\rm NL}\Phi_L^2 + g_{\rm NL}\Phi_L^3, \tag{84}$$

where Φ_L denotes the linear, Gaussian part (up to an unimportant zero mode such that $\langle\Phi_H\rangle = 0$). During the era of matter domination, this variable is related to the curvature perturbation via $\zeta = \frac{5}{3}\Phi_H$, so that we obtain the expansion

$$\zeta = \zeta_L + \tfrac{3}{5}f_{\rm NL}\zeta_L^2 + \tfrac{9}{25}g_{\rm NL}\zeta_L^3, \tag{85}$$

with ζ_L being the linear, Gaussian part of ζ. $\tau_{\rm NL}$ is directly related to the square of $f_{\rm NL}$, explicitly

$$\tau_{\rm NL} = \tfrac{36}{25}f_{\rm NL}^2. \tag{86}$$

The strategy for calculating the nonlinearity parameters is straightforward: first, we solve the equations of motion for the entropy perturbation up to third order in perturbation theory. This allows us to integrate the equation of motion for ζ, also at the first three orders in perturbation theory, and then we obtain the nonlinearity parameters by evaluating

$$f_{\rm NL} = \frac{5}{3}\frac{\int_{t_i}^{t_f}\zeta^{(2)\prime}}{(\int_{t_i}^{t_f}\zeta^{(1)\prime})^2}, \tag{87}$$

$$g_{\rm NL} = \frac{25}{9}\frac{\int_{t_i}^{t_f}\zeta^{(3)\prime}}{(\int_{t_i}^{t_f}\zeta^{(1)\prime})^3}, \tag{88}$$

where the integrals are evaluated from the time t_i that the ekpyrotic phase begins until the conversion phase has ended at t_f and ζ has evolved to a constant value. The next sections will deal with the details of these calculations.

V. EKPYROTIC EXAMPLES

In ekpyrotic and cyclic models of the Universe, the standard cosmological puzzles, such as the horizon and flatness problems, are resolved by a phase of slow contraction before the big bang [45]. During this ekpyrotic phase, the equation of state $w_{\rm ek}$ (the ratio of pressure to energy density) is very large, with the consequence that the ekpyrotic matter (usually modeled as a scalar field with a steep and negative potential) quickly comes to dominate the energy budget in the Universe. In other words, the contributions to the total energy density due to spatial curvature and anisotropies, for example, become suppressed, and in this way the flatness problem is solved. The horizon problem does not even arise, as there was plenty of time before the big bang for different regions of the Universe to be in causal contact with each other.

Interestingly, and just as in inflation, the ekpyrotic phase can (quantum mechanically) produce a nearly scale-invariant spectrum of density perturbations at the same time as (classically) flattening the Universe. However, early studies [46–48] of single-field ekpyrotic models uncovered a subtlety related to the fact that the perturbations are generated during a contracting phase, namely, the mode that picks up a scale-invariant spectrum corresponds to a small time-delay perturbation to the big crunch, and this mode turns out to be the decaying mode in a contracting Universe. The adiabatic mode, on the other hand, picks up a blue spectrum. Hence, unless these two modes mix during the big crunch—big bang transition (which they might do due to higher-dimensional effects for example [49,50]), the spectrum of the growing mode during the subsequent expanding phase will be incompatible with observations.

However, it is unnatural to restrict the analysis to a single scalar field. In models inspired by heterotic M-theory for example [51–54], there are two universal scalars, namely, the radion mode and the volume modulus of the internal Calabi-Yau manifold. The radion determines the distance between two orbifold planes, and in this brane-world scenario, our currently observed Universe is identified with one of the orbifold planes. In this picture, the ekpyrotic potential corresponds to an attractive force between the orbifold planes, which eventually causes the branes to collide. This collision then looks like a big bang to an observer on the brane. Quickly afterwards, the distance between the branes becomes fixed again, but the branes themselves expand during the phases of radiation, matter and dark energy domination. Actually, the dark energy can be modeled by the same interbrane force that is at play during the ekpyrotic phase, it just corresponds to a rather flat plateau at large field values. Inexorably though, the branes are attracted to each other again, a new ekpyrotic phase takes place, which is then swiftly followed by a new brane collision, etc. In this way a cyclic picture naturally emerges [55].

But back to the two scalar fields: the theory we are considering can be described by the effective action [56]

$$S = \int\sqrt{-g}\left[R - \frac{1}{2}(\partial\phi_1)^2 - \frac{1}{2}(\partial\phi_2)^2 - V(\phi_1,\phi_2)\right], \tag{89}$$

where ϕ_1 and ϕ_2 are related by a field redefinition to the radion and the Calabi-Yau volume modulus. We are assuming that during the ekpyrotic phase, both fields feel an ekpyrotic-type potential, e.g.

$$V(\phi_1,\phi_2) = -V_1 e^{-c_1\phi_1} - V_2 e^{-c_2\phi_2}. \tag{90}$$

In fact, as discussed in detail in [57], it is much more natural to discuss the evolution in terms of the variables σ and s pointing transverse and perpendicular to the field velocity, respectively, (these are the variables we have used in Secs. II and III). In terms of those variables, the above potential can be re-expressed as an ekpyrotic potential for σ combined with a tachyonic potential in the transverse direction. The evolution proceeds along this unstable ridge in the potential. This instability is necessary for the ampli-

fication of scale-invariant entropy perturbations [58], and leads to an interesting global structure [5].

Recasting the potential in terms of σ and s in fact suggests that, in the absence of a microphysical derivation, we should use a more general, parameterized, form for the potential instead of (90). The feature that we want to keep is that we should still obtain a nearly scale-invariant spectrum of entropy perturbations. Hence, during the ekpyrotic phase, we require the potential to have the following features: 1. Along the σ direction, it must be of ekpyrotic form, i.e. negative and steep; more precisely, we want $\bar{V}_{,\sigma\sigma} \approx -2/t^2$. 2. Along the s direction, it must be tachyonic, i.e. we need $\bar{V}_{,s} = 0$ and $\bar{V}_{,ss} < 0$. As we just said, this instability is necessary in order for entropy perturbations to grow. 3. In order to obtain a nearly scale-invariant spectrum of entropy fluctuations, we must have $\bar{V}_{,\sigma\sigma} \approx \bar{V}_{,ss}$. Small deviations from these relations lead to small differences for the tilt of the spectrum of fluctuations [57]. Thus, we write the potential as

$$V_{\rm ek} = -V_0 e^{\sqrt{2\epsilon}\sigma}\left[1 + \epsilon s^2 + \frac{\kappa_3}{3!}\epsilon^{3/2}s^3 + \frac{\kappa_4}{4!}\epsilon^2 s^4 + \cdots\right], \tag{91}$$

where we expect $\kappa_3, \kappa_4 \sim \mathcal{O}(1)$ and where $\epsilon \sim \mathcal{O}(10^2)$ is related to the equation of state $w_{\rm ek}$ via $\epsilon = 3(1 + w_{\rm ek})/2$. For exact exponentials of the form (90), one has $\kappa_3 = 2\sqrt{2}(c_1^2 - c_2^2)/|c_1 c_2|$ and $\kappa_4 = 4(c_1^6 + c_2^6)/(c_1^2 c_2^2(c_1^2 + c_2^2))$. Before continuing, we should comment on a subtlety: strictly speaking, s is not a field, since by definition $s = 0$ along the background trajectory. Hence, when we expand the potential in terms of s, we simply use s to denote the direction transverse to the ridge of the potential. We can only use the more compact notation here because the background trajectory is a straight line during the ekpyrotic phase, and hence the meaning of s is unambiguous: in terms of the original fields, one could use the replacement $s = (c_2\phi_2 - c_1\phi_1)/\sqrt{c_1^2 + c_2^2}$, and this would give identical results.

Along the ridge, the background scaling solution is given by

$$a(t) = (-t)^{1/\epsilon} \qquad \bar{\sigma} = -\sqrt{\frac{2}{\epsilon}}\ln(-\sqrt{\epsilon V_0}t) \qquad \bar{s} = 0, \tag{92}$$

where time runs from large negative values at the beginning of the ekpyrotic phase to $t = 0$ at the big crunch. This scaling solution corresponds to a straight line trajectory in scalar field space. At the same time, nearly scale-invariant entropy perturbations are produced and amplified, their final amplitude being determined by the depth of the potential. Subsequently, any bending of the trajectory in field space will result in the conversion of entropy perturbations into curvature (adiabatic) perturbations, which inherit the same spectral index [17]; accordingly, this mechanism is termed the entropic mechanism.

A bending of the trajectory is expected in many models on generic grounds—we will discuss two cases in detail in Secs. V C and V D. The first is where the bending occurs during the kinetic energy dominated phase that leads up to the big crunch ("kinetic conversion"), and the second is where the trajectory starts out slightly off the ridge, so that after some time, but still during the ekpyrotic phase, it naturally rolls off the ridge to one side ("ekpyrotic conversion"). As we will see, both the sign and the amplitude of the nonlinearity parameters depend rather crucially on the details of this conversion process.

Before continuing, we should state an important assumption that we are making in this work: namely, we assume that the curvature perturbation passes through the big crunch—big bang transition essentially unchanged. The reason for doing so is that the perturbations we are considering are vastly larger than the horizon size around the time of the crunch, and hence, due to causality, it seems reasonable to assume that long-wavelength modes suffer no change. Nevertheless, in the absence of a complete quantum-gravitational treatment of the big crunch—big bang transition, this statement remains an assumption subject to possible revision in the future.

A. Initial conditions for the entropy mode

During the ekpyrotic phase, the trajectory is a straight line with $\bar{\theta}' = 0$, (see Eqs. (30) and (32) and so the equation of motion for $\delta s^{(3)}$ simplifies to

$$\begin{aligned}\delta s^{(3)''} &+ 3H\delta s^{(3)'} + \bar{V}_{,ss}\delta s^{(3)} + \bar{V}_{,sss}\delta s^{(2)}\delta s + \frac{\bar{V}_{,\sigma}}{\bar{\sigma}'^3}\delta s'^3 \\ &+ \left(\frac{\bar{V}_{,\sigma\sigma}}{\bar{\sigma}'^2} + 3\frac{\bar{V}_{,\sigma}^2}{\bar{\sigma}'^4} + 3H\frac{\bar{V}_{,\sigma}}{\bar{\sigma}'^3} - 2\frac{\bar{V}_{,ss}}{\bar{\sigma}'^2}\right)\delta s'^2\delta s \\ &+ \left(-\frac{3}{2\bar{\sigma}'}\bar{V}_{,ss\sigma} - 5\frac{\bar{V}_{,\sigma}\bar{V}_{,ss}}{\bar{\sigma}'^3} - 3H\frac{\bar{V}_{,ss}}{\bar{\sigma}'^2}\right)\delta s'\delta s^2 \\ &+ \left(\frac{1}{6}\bar{V}_{,ssss} + 2\frac{\bar{V}_{,ss}^2}{\bar{\sigma}'^2}\right)\delta s^3 = 0.\end{aligned} \tag{93}$$

Using the following useful expressions, valid during the ekpyrotic phase,

$$\bar{\sigma}' = -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\epsilon}t} \qquad \bar{V} = -\frac{1}{\epsilon t^2} \qquad \bar{V}_{,\sigma} = -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\epsilon}t^2}$$

$$\bar{V}_{,\sigma\sigma} = -\frac{2}{t^2} \qquad \bar{V}_{,s\sigma} = 0 \qquad \bar{V}_{,ss\sigma} = -\frac{2\sqrt{2\epsilon}}{t^2}$$

$$\bar{V}_{,s} = 0 \qquad \bar{V}_{,ss} = -\frac{2}{t^2} \qquad \bar{V}_{,sss} = -\frac{\kappa_3\sqrt{\epsilon}}{t^2}$$

$$\bar{V}_{,ssss} = -\frac{\kappa_4\epsilon}{t^2},$$

together with the first- and second-order entropic Eqs. (60) and (62) in the limit when $\bar{\theta}' = 0$, we iteratively find that

the entropy perturbation (to leading order in $1/\epsilon$) can be expanded as

$$\delta s = \delta s_L + \frac{\kappa_3\sqrt{\epsilon}}{8}\delta s_L^2 + \epsilon\left(\frac{\kappa_4}{60} + \frac{\kappa_3^2}{80} - \frac{2}{5}\right)\delta s_L^3, \quad (94)$$

with $\delta s_L \propto 1/t$. The above equation specifies the initial conditions for the start of the conversion phase.

B. Integrated contributions during the ekpyrotic phase

There are contributions to both $f_{\rm NL}$ and $g_{\rm NL}$ even during the ekpyrotic phase, since some of the terms in the equation for ζ' do not vanish when $\bar{\theta}' = 0$. Specifically, during the ekpyrotic phase, we have (ζ here is the full $\zeta^{(1)} + \zeta^{(2)} + \zeta^{(3)}$)

$$\begin{aligned}\zeta' &= \frac{H}{\bar{\sigma}'^2}\left[\bar{V}_{,ss}\delta s^2 - \frac{\bar{V}_{,\sigma}}{\bar{\sigma}'}\delta s\delta s' + \frac{\bar{V}_{,sss}}{3}\delta s^3\right] \\ &\approx -\frac{1}{t}\delta s^2 - \frac{1}{2}\delta s\delta s' - \frac{\kappa_3\sqrt{\epsilon}}{6t}\delta s^3 \\ &\approx -\frac{\delta s_L^2}{2t} - \frac{11\kappa_3\sqrt{\epsilon}\delta s_L^3}{48t}. \end{aligned} \quad (95)$$

This leads to

$$f_{\rm NL\ integrated} = \frac{5}{12}\frac{[\delta s_L(t_{\rm ek\text{-}end})]^2}{[\zeta_L(t_f)]^2}, \quad (96)$$

$$g_{\rm NL\ integrated} = \frac{275}{1296}\kappa_3\sqrt{\epsilon}\frac{[\delta s_L(t_{\rm ek\text{-}end})]^3}{[\zeta_L(t_f)]^3}, \quad (97)$$

where t_f denotes the time at the end of the conversion stage, when ζ becomes constant on large scales, and $t_{\rm ek\text{-}end}$ denotes the time at the end of the ekpyrotic phase.

Numerically speaking, both $f_{\rm NL\ integrated}$ and $g_{\rm NL\ integrated}$ are typically subdominant contributions to the total nonlinearity parameters.

C. Kinetic conversion

In the original ekpyrotic and cyclic models, the phase dominated by the steep, ekpyrotic potential $V_{\rm ek}$ comes to an end (at $t = t_{\rm ek\text{-}end} < 0$) before the big crunch/big bang transition (at $t = 0$), and as the ekpyrotic potential becomes negligible the Universe becomes dominated by the kinetic energy of the scalar fields. In this subsection, we consider the case where the conversion from entropic to curvature perturbations occurs during this kinetic energy dominated phase. This occurs naturally in the heterotic M-theory embedding of the cyclic model [59] (briefly discussed toward the beginning of this section) because the negative-tension brane bounces off a spacetime singularity (see [18] for a detailed discussion)—thus creating a bend in the trajectory in field space in the four-dimensional effective theory [56]—before it collides with the positive-tension brane (the latter collision corresponds to the big crunch-big bang transition). This bending of the trajectory automatically induces the conversion of entropy to curvature perturbations [17]. From the viewpoint of the four-dimensional effective theory, the bounce of the negative-tension brane corresponds to the trajectory in scalar field space being reflected off a boundary of scalar field space, and it can be modeled by having a repulsive potential $V_{\rm rep}$ in the vicinity of the boundary. Here, we take the boundary to be located at $\phi_2 = 0$, and we only consider conversions during which $\theta' > 0$—other cases can be related to these by an appropriate change of coordinates. The repulsive potential can in principle be calculated, given a specific matter configuration on the negative-tension brane [18]. Here, in order to be general, we consider four different forms for the repulsive potential that we consider to be representative, namely,

$$V_{\rm rep} \propto \phi_2^{-2}, \qquad \phi_2^{-2} + \phi_2^{-6}, \qquad (\sinh\phi_2)^{-2}, \qquad (\sinh\phi_2)^{-2} + (\sinh\phi_2)^{-4}, \quad (98)$$

with the overall magnitude adjusted in order to obtain various values for the duration of the conversion (see below). These potential forms should give an indication of the range of values that one can expect the nonlinearity parameters to take.

An important parameter turns out to be the duration of the conversion, measured by the number of Hubble times during which most, say 90%, of the conversion takes place, i.e. the duration is measured by the number of e-folds by which the scale factor shrinks during conversion. Conversions lasting less than about 0.2 Hubble times correspond to what we call sharp conversions, while those that last on the order of 1 Hubble time correspond to smooth conversions. For $f_{\rm NL}$, the range of predicted values is considerably narrower as the conversion becomes smoother [21,22], as illustrated in Fig. 1. It is possible to estimate $f_{\rm NL}$ semi-analytically, with the result that for smooth conversions [22],

$$f_{\rm NL} \sim \tfrac{3}{2}\kappa_3\sqrt{\epsilon} + 5. \quad (99)$$

The values for $\tau_{\rm NL} = 36/25 f_{\rm NL}^2$ follow directly from these calculations, and hence they do not require an extensive discussion.

In order to calculate $g_{\rm NL}$, we have solved and integrated numerically the equations of motion (79) and (80), using the expression (94) as the initial condition for the entropy perturbation. ζ is initially zero. The initial conditions for the background trajectory are taken to be those suggested by the heterotic M-theory embedding [56], i.e. we take the incident angle of the trajectory with respect to the boundary surface $\phi_2 = 0$ (and thus the reflection potentials) to be $\pi/6$. On changing this angle, we expect our results to change only modestly [22].

The results of our numerical calculations are shown in Figs. 2–5. In each case, we have plotted the results obtained for the four repulsive potentials (98). Figure 2 shows that,

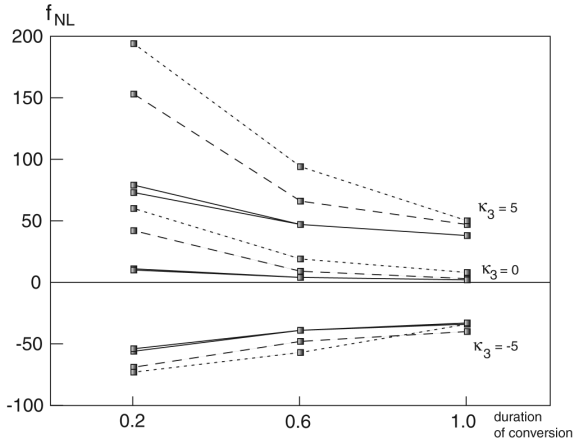

FIG. 1. $f_{\rm NL}$ as a function of the duration of conversion and for the values $\kappa_3 = -5$, 0, 5 and $\epsilon = 36$. In each case, we have plotted the results for four different reflection potentials, with the simplest potentials $(\phi_2^{-2}, (\sinh\phi_2)^{-2})$ indicated by solid lines, while the dashed $((\sinh\phi_2)^{-2} + (\sinh\phi_2)^{-4})$ and dotted $(\phi_2^{-2} + \phi_2^{-6})$ lines give an indication of the range of values that can be expected. As the conversions become smoother, the predicted range of values narrows, and smooth conversions lead to a natural range of about $-50 \lesssim f_{\rm NL} \lesssim +60$ or so.

even more so than for the calculation of $f_{\rm NL}$ the range of predicted values for $g_{\rm NL}$ narrows drastically as the conversion process becomes smoother. In fact, for sharp conversions, typical values are very large in magnitude, and we expect these to be observationally disfavored shortly, if they are not ruled out already. Thus, phenomenologically speaking, it is much more interesting to focus on smooth conversions. In this respect, it is important to note that for

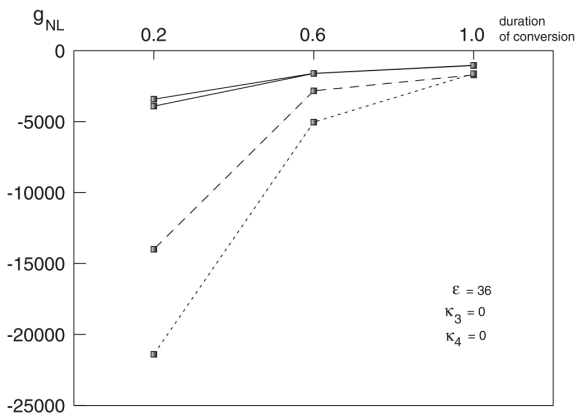

FIG. 2. $g_{\rm NL}$ as a function of the duration of conversion, with $\kappa_3 = \kappa_4 = 0$ and for four different reflection potentials, with the same line style assignments as in Fig. 1. As the conversions become smoother, the predicted range of values narrows considerably, allowing us to make rather definite predictions.

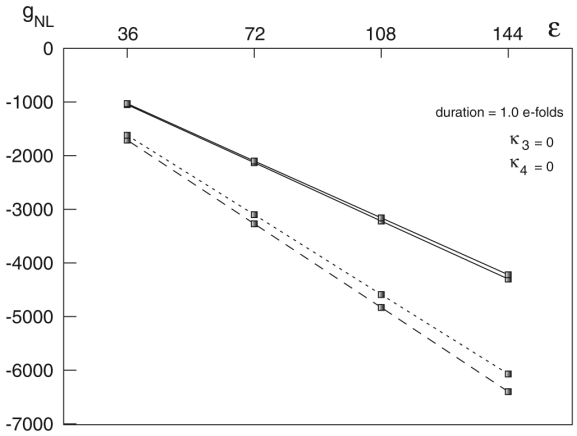

FIG. 3. This figure shows $g_{\rm NL}$ to be proportional to ϵ, i.e. proportional to the equation of state $w_{\rm ek}$.

smooth conversions, the predicted range of values for $f_{\rm NL}$ lies within the current observational bounds [60,61]. Hence, we will now focus on conversions that occur while the scale factor evolves by more than about half an e-fold.

The next three figures show the dependence of $g_{\rm NL}$ on the potential parameters κ_3, κ_4 and $\epsilon = 3(1 + w_{\rm ek})/2$, as defined in (91). Figure 3 shows that $g_{\rm NL}$ is proportional to ϵ, and we have verified that this result holds independently of the values of κ_3 and κ_4. Similarly, Fig. 4 indicates that $g_{\rm NL}$ depends linearly on κ_4 (independently of ϵ and κ_3), while Fig. 5 indicates that $g_{\rm NL}$ depends approximately quadratically on κ_3 (independently of ϵ and κ_4). In fact, all our numerical results indicate that $g_{\rm NL}$ scales with ϵ, κ_3, κ_4 exactly as the third-order coefficient in the expression (94) for the entropy perturbation during the ekpyrotic phase, and we have found that we can fit all our data by

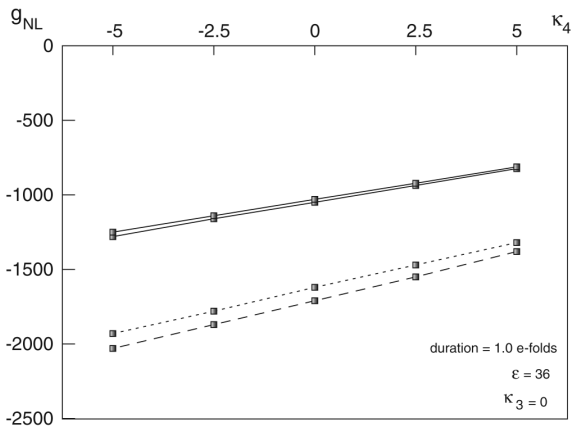

FIG. 4. This figure indicates that $g_{\rm NL}$ depends linearly in κ_4, the parameter we are using to specify the fourth derivative of the ekpyrotic potential with respect to the entropic direction.

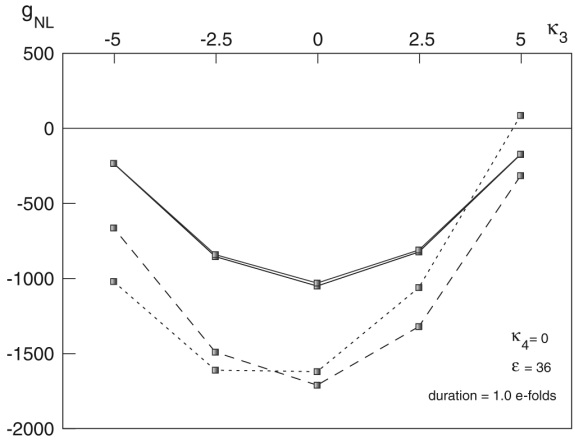

FIG. 5. $g_{\rm NL}$ can be seen to depend approximately quadratically on κ_3, the parameter determining the third derivative of the ekpyrotic potential with respect to the entropic direction.

the approximate formula

$$g_{\rm NL} \sim 100\epsilon\left(\frac{\kappa_4}{60} + \frac{\kappa_3^2}{80} - \frac{2}{5}\right), \tag{100}$$

i.e. $g_{\rm NL}$ is roughly speaking directly proportional to the third-order coefficient in the expansion (94) of the entropy perturbation during the ekpyrotic phase. This formula is one of the key results of this paper. It shows that $g_{\rm NL}$ is proportional to the equation of state of ekpyrosis $w_{\rm ek} \sim \epsilon$. Hence, it scales in the same way as $\tau_{\rm NL} \propto f_{\rm NL}^2 \propto (\sqrt{\epsilon})^2$. Also, from the fitting formula for $f_{\rm NL}$ (99), we can deduce that a large $|f_{\rm NL}|$ tends to make $g_{\rm NL}$ more positive due to its dependence on κ_3. Most significant is perhaps the term independent of κ_3, κ_4. This term is negative and typically of order 1000, and it implies that $g_{\rm NL}$ can be expected to be negative unless $|\kappa_3|$ is large and/or κ_4 is large and positive. In fact, the smaller $|f_{\rm NL}|$ is, the more "tuned" the value of κ_4 has to be in order to make $g_{\rm NL}$ positive—for $\kappa_3 \approx 0$, we would require $\kappa_4 \approx 25$ just in order to make $g_{\rm NL}$ zero. Hence, any accidental degeneracy at the level of $f_{\rm NL}$ between simple inflationary models (in which both $f_{\rm NL}$ and $g_{\rm NL}$ are expected to be very close to zero) and cyclic models is extremely likely to be broken at the level of the trispectrum. Our result indicates that it is far from true that "anything goes," e.g. it would be natural to find $f_{\rm NL} = 20$ and $g_{\rm NL} = -1500$, while it would be very unnatural to get $f_{\rm NL} = 20$ together with $g_{\rm NL} = +3000$. Thus, for the currently best-motivated cyclic models in which the perturbations are converted during the kinetic phase, Eq. (100) provides a distinct observational imprint.

For completeness, we should note that there is the possibility that the dominant amount of conversion could occur after the big bang, via the mechanism of modulated preheating suggested by Battefeld [62]. The idea here is that massive matter fields could be produced in large quantities at the brane collision and could dominate the energy density right after the big bang. If these massive fields were to couple to ordinary matter via a function $h(\delta s)$, then their decay into ordinary matter would occur at slightly different times for different values of δs. In this way, the ordinary matter perturbations would inherit the entropic perturbation spectrum. This conversion would typically also happen during a phase of kinetic energy domination, so that we would expect the orders of magnitude of $f_{\rm NL}$ and $g_{\rm NL}$ to be similar to the examples above. However, in the absence of a detailed model, which would determine $h(\delta s)$, we cannot do better than this order-of-magnitude estimate.

D. Ekpyrotic conversion

In this section, we analyze the case where the conversion of entropy into curvature modes occurs during the ekpyrotic phase. Indeed, if the background trajectory starts out slightly off the ridge in the ekpyrotic potential, then after some time, the field will naturally roll off down one side [19,63,64]. For this scenario, the non-Gaussianity up to second order has been analyzed by Koyama *et al.* [23] using the δN formalism, with the result that $f_{\rm NL} = -5/12c_1^2$, for the case where ϕ_1 is the field that is frozen in at late times, and where c_1 is the constant appearing in the ekpyrotic potential (90). For ekpyrotic conversion, the calculation is most easily performed, and the result most easily expressed, in terms of the potential (90), which is why we are adopting this restricted form here. In working with a parameterized potential like (91), the bending of the trajectory can be more complicated, in the sense that there can be multiple turns, and one has to decide when to stop the evolution. In this case, the results are strongly cutoff dependent, and without a precisely defined model specifying the subsequent evolution, it is impossible to make any generic predictions. For kinetic conversion, this problem does not arise, since the reflection potential is entirely unrelated to the potential during the ekpyrotic phase. The bottom line is that we will stick with the form (90) in this section.

The δN formalism is particularly well suited to the case of ekpyrotic conversion, as the background evolution is simple. In fact, it turns out that by making the approximation that the bending is instantaneous, it is very easy to find an approximate formula for the nonlinearity parameters at any chosen order in perturbation theory. Below, we will summarize the calculation of [23] and extend it to third order. Subsequently, we will compare the approximate formula thus obtained with the result from solving and integrating the equations of motion numerically. In a sense, this provides a check of the instantaneous bending approximation. At second order in perturbation theory, it has been checked explicitly that if the instantaneous bending approximation is relaxed, then both methods (namely, a numerical calculation using the δN formalism, and a nu-

merical calculation using the equations of motion directly) agree to high precision in the value of $f_{\rm NL}$ that they predict, and moreover that the results are in good agreement with the formula quoted above [22].

In order to implement the δN formalism, we have to calculate the integrated expansion $N = \int H dt$ along the background trajectory. Initially, the trajectory is close to the scaling solution (92). Then, we assume that at a fixed field value δs_B away from the ridge, the trajectory instantly changes course and rolls off along the ϕ_2 direction. At this point, the trajectory follows the single-field evolution

$$a(t) = (-t)^{2/c_2^2} \qquad \phi_2 = \frac{2}{c_2}\ln(-t) + \text{constant} \qquad \phi_1 = \text{constant}. \tag{101}$$

It is now easy to evaluate the integrated expansion, with the result that

$$N = -\frac{2}{c_1^2}\ln|H_B| + \text{constant}, \tag{102}$$

where H_B denotes the Hubble parameter at the instant that the bending occurs. Note that all c_2 dependence has canceled out of the formula above. At the end of the conversion process, we are interested in evaluating the curvature perturbation on a surface of constant energy density. But, in comoving gauge, the curvature perturbation is equal to a perturbation in the integrated expansion. Then, if we assume that the integrated expansion depends on a single variable α, we can write

$$\zeta = \delta N = N_{,\alpha}\delta\alpha + \tfrac{1}{2}N_{,\alpha\alpha}(\delta\alpha)^2 + \tfrac{1}{6}N_{,\alpha\alpha\alpha}(\delta\alpha)^3. \tag{103}$$

In our example, we indeed expect a change in N to depend solely on a change in the initial value of the entropy perturbation δs. Now, from Eq. (94), we know that $\delta s_L \propto 1/t \propto H$, and hence we can parameterize different initial values of the entropy perturbation by writing

$$\delta s_L = \alpha H. \tag{104}$$

Note that since δs_L is Gaussian, so is α. With this identification, we have

$$\delta s = \alpha H + \frac{\kappa_3\sqrt{\epsilon}}{8}(\alpha H)^2 + \epsilon\left(\frac{\kappa_4}{60} + \frac{\kappa_3^2}{80} - \frac{2}{5}\right)(\alpha H)^3, \tag{105}$$

so that at the fixed value $\delta s = \delta s_B$, we have

$$\alpha \propto \frac{1}{H_B}. \tag{106}$$

Now we can immediately evaluate

$$N_{,\alpha} = N_{,H_B}\frac{dH_B}{d\alpha} = \frac{2}{c_1^2\alpha}, \tag{107}$$

and, similarly

$$N_{,\alpha\alpha} = -\frac{2}{c_1^2\alpha^2} \qquad N_{,\alpha\alpha\alpha} = \frac{4}{c_1^2\alpha^3}. \tag{108}$$

In this way, with very little work, we can estimate the nonlinearity parameters

$$f_{\rm NL} = \frac{5N_{,\alpha\alpha}}{6N_{,\alpha}^2} = -\frac{5}{12}c_1^2, \tag{109}$$

$$\tau_{\rm NL} = \frac{36}{25}f_{\rm NL}^2 = \frac{1}{4}c_1^4, \tag{110}$$

$$g_{\rm NL} = \frac{25N_{,\alpha\alpha\alpha}}{54N_{,\alpha}^3} = \frac{25}{108}c_1^4. \tag{111}$$

We are now in a position to compare these estimates to the numerical results obtained by solving and integrating the equations of motion (79) and (80). In order to do this, we choose initial conditions that are given by the scaling solution (92), except that we increase the initial field velocity $|\phi_2'|$ by 0.1%. This causes the trajectory to eventually roll off in the ϕ_2 direction, and to quickly approach the single-field solution (101). The results for several values of c_1 and c_2 are shown Table I, alongside the values estimated by the δN formulae.

It is immediately apparent that the general trend is accurately captured by the δN formulae. However, one may notice that the agreement is slightly less good at third order than at second, and also, that the δN formulae tend to slightly over estimate $\tau_{\rm NL}$ and slightly under estimate $g_{\rm NL}$. But given the quickness of the δN calculation and the complexity of the third-order equations of motion, the agreement is pretty impressive. Of course, the δN formula was derived subject to the instantaneous bending approximation. Without this approximation, we would expect a numerical scheme that uses the δN formalism to yield results in close agreement with our numerical results.

The general conclusion is that, contrary to $f_{\rm NL}$, the sign of $g_{\rm NL}$ turns out to be always positive. Moreover, both $\tau_{\rm NL}$ and $g_{\rm NL}$ scale very fast with increasing equation of state $w_{\rm ek} \sim c_1^2$, and hence we can expect future observations to be highly constraining for this type of conversion (current observations are in fact already rather constraining regarding $f_{\rm NL}$ [60,61]).

Finally, we should note that a conversion mechanism similar to ekpyrotic conversion (in the sense that the conversion is assumed to happen during the ekpyrotic phase) has been considered in the new ekpyrotic models of Buchbinder *et al.* [20,57,65], except that the rolloff from the ridge is expected to be caused by a feature in the potential rather than by initial conditions that are slightly off centered. We would simply like to note that for these models, there is in fact considerably more flexibility, as the ekpyrotic phase is followed by a ghost condensate phase. The details of how the transition to the ghost condensate phase occurs will determine what one expects for the

TABLE I. Ekpyrotic conversion: the values of the nonlinearity parameters estimated by the δN formalism compared to the numerical results obtained by directly integrating the equations of motion.

c_1	c_2	$f_{\mathrm{NL},\delta N}$	$\tau_{\mathrm{NL},\delta N}$	$g_{\mathrm{NL},\delta N}$	f_{NL}	τ_{NL}	g_{NL}
10	10	−41.67	2500	2315	−39.95	2298	2591
10	15	−41.67	2500	2315	−40.45	2356	2813
10	20	−41.67	2500	2315	−40.62	2377	3030
15	10	−93.75	126 60	117 20	−91.01	119 30	131 00
15	15	−93.75	126 60	117 20	−92.11	122 20	138 30
15	20	−93.75	126 60	117 20	−92.49	123 20	144 40
20	10	−166.7	400 00	370 40	−162.5	380 20	413 20
20	15	−166.7	400 00	370 40	−164.4	389 30	431 70
20	20	−166.7	400 00	370 40	−165.1	392 40	444 90

nonlinearity parameters f_{NL}, τ_{NL}, g_{NL} For example, it is conceivable that the ekpyrotic phase might be followed by a kinetic phase during which the ghost condensate starts dominating. In that case, one would expect the results to be more closely aligned with those presented in the previous section. In the absence of a concrete model, we must postpone making definite predictions for these models.

VI. DISCUSSION

The analysis of the distribution of density fluctuations, either via the CMB or via large-scale structure surveys, currently offers the best prospects for gaining information about the time around the big bang. In ekpyrotic and cyclic models, the pattern of these fluctuations is imprinted during a slowly contracting ekpyrotic phase preceding the current expanding phase. We have restricted our analysis to the most robust mechanism to date by which the density fluctuations can arise in these models, namely, the entropic mechanism in which entropy perturbations are generated first, and are then converted into curvature perturbations just before the big bang. The conversion can happen in at least two distinct ways, either directly during the ekpyrotic phase or during the kinetic energy dominated phase that leads up to the big crunch—big bang transition. In this paper, we have assumed that the dominant amount of conversion occurs before the big crunch, and that the resulting density perturbations evolve essentially unchanged up to the time of nucleosynthesis, so as to become the "primordial" density perturbations.

For both conversion modes, we have found that the combined consideration of the nonlinearity parameters f_{NL} (and by extension τ_{NL}) and g_{NL} results in a distinct observational imprint, that should enable one to select or rule out these models on observational grounds in the foreseeable future. In short, for ekpyrotic conversion, f_{NL} is always negative and typically of $\mathcal{O}(10-100)$, while g_{NL} is always positive and typically of $\mathcal{O}(10^3-10^4)$. For kinetic conversion, on the other hand, f_{NL} can have either sign and is typically of $\mathcal{O}(10)$, while g_{NL} is typically negative and of $\mathcal{O}(1000)$. Thus, typical values are substantially different from the predictions of simple single-field inflationary models, and the local form of the produced nongaussianity should also easily distinguish ekpyrotic models from single-field inflationary models with noncanonical kinetic terms. The comparison with multifield inflationary models is more subtle, as some of those models can allow for virtually any values of f_{NL} and g_{NL}. However, should the observed values happen to lie in the ranges predicted in this paper, then ekpyrotic models will provide strong candidates for a model of the early Universe due to the correlation between the values of f_{NL} and g_{NL} It will certainly be exciting to compare the predictions derived here to the results of future observations.

ACKNOWLEDGMENTS

We would like to thank E. Komatsu, K. Koyama, D. Langlois, and P. Steinhardt for stimulating and valuable discussions.

APPENDIX—USEFUL FORMULAE

$$u^0 = \frac{dt}{d\tau} = 1 - A^{(1)} - A^{(2)} + \frac{3}{2}A^{(1)2} - A^{(3)} + 3A^{(2)}A^{(1)} - \frac{5}{2}A^{(1)3} \tag{A1}$$

$$u^i = 0, \tag{A2}$$

where A is the lapse function defined by $g_{00} \equiv -(1+2A)$.

$$\dot{\zeta}_i^{(3)} = \zeta_i^{(3)\prime} - A\zeta_i^{(2)\prime} - A^{(2)}\zeta_i^{(1)\prime} + \tfrac{3}{2}A^2\zeta_i^{(1)\prime}, \tag{A3}$$

$$\ddot{\zeta}_i^{(3)} = \zeta_i^{(3)\prime\prime} - 2A\zeta_i^{(2)\prime\prime} - A'\zeta_i^{(2)\prime} - 2A^{(2)}\zeta_i^{(1)\prime\prime} - A^{(2)\prime}\zeta_i^{(1)\prime} + 4A^2\zeta_i^{(1)\prime\prime} + 4AA'\zeta_i^{(1)\prime}, \tag{A4}$$

$$\delta e_\sigma^I = \frac{1}{\bar{\sigma}'}(\delta s' + \bar{\theta}'\delta\sigma)\bar{e}_s^I, \tag{A5}$$

$$\delta e_s^I = -\frac{1}{\bar{\sigma}'}(\delta s' + \bar{\theta}'\delta\sigma)\bar{e}_\sigma^I, \tag{A6}$$

$$\delta e_\sigma^{I(2)} = -\frac{\bar{e}_\sigma^I}{2\bar{\sigma}'^2}(\delta s' + \bar{\theta}'\delta\sigma)^2 + \frac{\bar{e}_s^I}{\bar{\sigma}'}\Big[-\frac{1}{\bar{\sigma}'}(\delta\sigma' - \bar{\theta}'\delta s)(\delta s' + \bar{\theta}'\delta\sigma) + \bar{\theta}'\Big(\delta\sigma^{(2)} - \frac{1}{2\bar{\sigma}'}\delta s\delta s'\Big) + \delta s^{(2)'} + \Big(\frac{\delta\sigma}{\bar{\sigma}'}\Big(\delta s' + \frac{\bar{\theta}'}{2}\delta\sigma\Big)\Big)'\Big], \tag{A7}$$

$$\delta e_s^{I(2)} = -\frac{\bar{e}_s^I}{2\bar{\sigma}'^2}(\delta s' + \bar{\theta}'\delta\sigma)^2 - \frac{\bar{e}_\sigma^I}{\bar{\sigma}'}\Big[-\frac{1}{\bar{\sigma}'}(\delta\sigma' - \bar{\theta}'\delta s)(\delta s' + \bar{\theta}'\delta\sigma) + \bar{\theta}'\Big(\delta\sigma^{(2)} - \frac{1}{2\bar{\sigma}'}\delta s\delta s'\Big) + \delta s^{(2)'} + \Big(\frac{\delta\sigma}{\bar{\sigma}'}\Big(\delta s' + \frac{\bar{\theta}'}{2}\delta\sigma\Big)\Big)'\Big], \tag{A8}$$

$$\delta\dot{\sigma}^{(1)} = u^{0(1)}\bar{\sigma}' + \delta\sigma' - \bar{\theta}'\delta s, \tag{A9}$$

$$\delta\dot{\sigma}^{(2)} = u^{0(2)}\bar{\sigma}' + u^{0(1)}\delta\sigma' + \delta\sigma^{(2)'} - u^{0(1)}\bar{\theta}'\delta s - \bar{\theta}'\delta^{(2)}s + (\bar{V}_{,ss} + 3\bar{\theta}'^2)\frac{\delta s^2}{2\bar{\sigma}'} - \frac{\bar{V}_{,\sigma}}{2\bar{\sigma}'^2}\delta s\delta s' + \frac{\bar{\theta}'}{\bar{\sigma}'^2}\delta s\delta\epsilon, \tag{A10}$$

$$\Big(\frac{\dot{\rho}}{\dot{\sigma}}\Big)^{(1)} = \Big(\frac{\delta\rho'}{\bar{\sigma}'} - \frac{\bar{\rho}'}{\bar{\sigma}'^2}\delta\sigma'\Big) + \frac{\bar{\rho}'}{\bar{\sigma}'^2}\bar{\theta}'\delta s, \tag{A11}$$

$$\Big(\frac{\dot{\rho}}{\dot{\sigma}}\Big)^{(2)} = \frac{\delta\rho'}{\bar{\sigma}'}\Big[\Big(\frac{\delta\sigma'}{\bar{\sigma}'}\Big)^2 - \frac{\delta\sigma'}{\bar{\sigma}'}\frac{\delta\rho'}{\bar{\rho}'}\Big] + \frac{\rho^{(2)'}}{\bar{\sigma}'} - \frac{\bar{\rho}'}{\bar{\sigma}'^2}\delta\sigma^{(2)'} + \frac{\delta\rho'}{\bar{\sigma}'^2}\Big[\bar{\theta}'\delta s^{(2)} - (\bar{V}_{,ss} + \bar{\theta}'^2)\frac{\delta s^2}{2\bar{\sigma}'} + \frac{\bar{V}_{,\sigma}}{2\bar{\sigma}'^2}\delta s\delta s' - \frac{\bar{\theta}'}{\bar{\sigma}'^2}\delta s\delta\epsilon - \frac{2\bar{\theta}'\delta s\delta\sigma'}{\bar{\sigma}'} + \frac{\delta\rho'}{\bar{\rho}'}\bar{\theta}'\delta s\Big]. \tag{A12}$$

In comoving gauge and on large scales

$$\delta V_{,s} \approx \bar{V}_{,ss}\delta s - \frac{\bar{V}_{,\sigma}}{\bar{\sigma}'}\delta s', \tag{A13}$$

$$\delta V_{,s}^{(2)} \approx \frac{1}{2}\bar{V}_{,sss}\delta s^2 + \bar{V}_{,ss}\delta s^{(2)} - \frac{3}{2\bar{\sigma}'}\bar{V}_{,s\sigma}\delta s\delta s' - \frac{\bar{V}_{,s}}{2\bar{\sigma}'^2}\delta s'^2 - \frac{\bar{V}_{,\sigma}}{\bar{\sigma}'}\Big(\delta s^{(2)'} + \frac{\bar{\theta}'}{2\bar{\sigma}'}\delta s\delta s'\Big), \tag{A14}$$

$$\delta V_{,ss} \approx \bar{V}_{,sss}\delta s - 2\frac{\bar{V}_{,s\sigma}}{\bar{\sigma}'}\delta s', \tag{A15}$$

$$\delta V_{,ss}^{(2)} \approx \frac{1}{2}\bar{V}_{,ssss}\delta s^2 + \bar{V}_{,sss}\delta s^{(2)} - \frac{5}{2\bar{\sigma}'}\bar{V}_{,ss\sigma}\delta s\delta s' + \frac{\bar{V}_{,\sigma\sigma} - \bar{V}_{,ss}}{\bar{\sigma}'^2}\delta s'^2 - 2\frac{\bar{V}_{,s\sigma}}{\bar{\sigma}'}\Big(\delta s^{(2)'} + \frac{\bar{\theta}'}{2\bar{\sigma}'}\delta s\delta s'\Big), \tag{A16}$$

$$\delta\dot{\theta}^{(2)} \approx \frac{\bar{V}_{,\sigma}}{\bar{\sigma}'^2}\delta s^{(2)'} - \frac{1}{\sigma'}(\bar{V}_{,ss} + \bar{\theta}'^2)\delta s^{(2)} - \frac{\bar{\theta}'}{2\bar{\sigma}'^3}\delta s'^2 + \frac{1}{2\bar{\sigma}'^2}\Big(4\frac{\bar{\theta}'\bar{V}_{,\sigma}}{\bar{\sigma}'} - 3\bar{\theta}'' + 9H\bar{\theta}'\Big)\delta s'\delta s + \frac{1}{2\bar{\sigma}'^2}(-\bar{\sigma}'\bar{V}_{,sss} + 3\bar{V}_{,ss}\bar{\theta}' + 3\bar{\theta}'^3)\delta s^2, \tag{A17}$$

$$A \approx -2\frac{\bar{\theta}'}{\bar{\sigma}'}\delta s, \tag{A18}$$

$$A^{(2)} \approx -2\frac{\bar{\theta}'}{\bar{\sigma}'}\delta s^{(2)} + \frac{1}{\bar{\sigma}'^2}(\bar{V}_{,ss} + 6\bar{\theta}'^2)\delta s^2 - \frac{\bar{V}_{,\sigma}}{\bar{\sigma}'^3}\delta s\delta s'. \tag{A19}$$

Finally, the constraint equations derived in [27] imply, in the comoving gauge and on large scales

$$\Theta^{(1)} \approx 0, \tag{A20}$$

$$\Theta^{(2)} \approx 0. \tag{A21}$$

[1] E. Komatsu *et al.*, arXiv:0902.4759.
[2] A. Linde, Lect. Notes Phys. **738**, 1 (2008).
[3] J.-L. Lehners, Phys. Rep. **465**, 223 (2008).
[4] A. H. Guth, J. Phys. A **40**, 6811 (2007).
[5] J.-L. Lehners and P. J. Steinhardt, Phys. Rev. D **79**, 063503 (2009).
[6] D. Seery and J. E. Lidsey, J. Cosmol. Astropart. Phys. 01 (2007) 008.
[7] D. Seery, J. E. Lidsey, and M. S. Sloth, J. Cosmol. Astropart. Phys. 01 (2007) 027.
[8] C. T. Byrnes, M. Sasaki, and D. Wands, Phys. Rev. D **74**, 123519 (2006).
[9] V. Acquaviva, N. Bartolo, S. Matarrese, and A. Riotto, Nucl. Phys. **B667**, 119 (2003).
[10] J. M. Maldacena, J. High Energy Phys. 05 (2003) 013.
[11] D. H. Lyth and D. Wands, Phys. Lett. B **524**, 5 (2002).
[12] D. H. Lyth, C. Ungarelli, and D. Wands, Phys. Rev. D **67**, 023503 (2003).
[13] In this paper, we focus on the so-called local form of the nonlinearity parameters, which is the relevant form to

consider in the presence of canonical kinetic terms. Noncanonical kinetic terms usually imply that different shape functions in momentum space are more relevant; the trispectrum for models involving noncanonical kinetic terms has recently been computed [14,15]—see these papers as well as [16] for details.

[14] X. Chen, B. Hu, M.-x. Huang, G. Shiu, and Y. Wang, J. Cosmol. Astropart. Phys. 08 (2009) 008.
[15] F. Arroja, S. Mizuno, K. Koyama, and T. Tanaka, arXiv:0905.3641.
[16] S. Renaux-Petel (unpublished).
[17] J.-L. Lehners, P. McFadden, N. Turok, and P. J. Steinhardt, Phys. Rev. D **76**, 103501 (2007).
[18] J.-L. Lehners and N. Turok, Phys. Rev. D **77**, 023516 (2008).
[19] K. Koyama and D. Wands, J. Cosmol. Astropart. Phys. 04 (2007) 008.
[20] E. I. Buchbinder, J. Khoury, and B. A. Ovrut, Phys. Rev. D **76**, 123503 (2007).
[21] J.-L. Lehners and P. J. Steinhardt, Phys. Rev. D **77**, 063533 (2008).
[22] J.-L. Lehners and P. J. Steinhardt, Phys. Rev. D **78**, 023506 (2008).
[23] K. Koyama, S. Mizuno, F. Vernizzi, and D. Wands, J. Cosmol. Astropart. Phys. 11 (2007) 024.
[24] D. Langlois and F. Vernizzi, Phys. Rev. Lett. **95**, 091303 (2005).
[25] D. Langlois and F. Vernizzi, Phys. Rev. D **72**, 103501 (2005).
[26] D. Langlois and F. Vernizzi, J. Cosmol. Astropart. Phys. 02 (2006) 014.
[27] D. Langlois and F. Vernizzi, J. Cosmol. Astropart. Phys. 02 (2007) 017.
[28] G. F. R. Ellis and M. Bruni, Phys. Rev. D **40**, 1804 (1989).
[29] S. W. Hawking, Astrophys. J. **145**, 544 (1966).
[30] M. Bruni, G. F. R. Ellis, and P. K. S. Dunsby, Classical Quantum Gravity **9**, 921 (1992).
[31] C. G. Tsagas, A. Challinor, and R. Maartens, Phys. Rep. **465**, 61 (2008).
[32] S. Renaux-Petel and G. Tasinato, J. Cosmol. Astropart. Phys. 01 (2009) 012.
[33] D. Langlois and S. Renaux-Petel, J. Cosmol. Astropart. Phys. 04 (2008) 017.
[34] X. Gao, J. Cosmol. Astropart. Phys. 06 (2008) 029.
[35] G. I. Rigopoulos, E. P. S. Shellard, and B. J. W. van Tent, Phys. Rev. D **73**, 083521 (2006).
[36] R. M. Wald *General Relativity* (University of Chicago Press, Chicago, 1984), p. 491.
[37] J. M. Bardeen, P. J. Steinhardt, and M. S. Turner, Phys. Rev. D **28**, 679 (1983).
[38] D. H. Lyth, K. A. Malik, and M. Sasaki, J. Cosmol. Astropart. Phys. 05 (2005) 004.
[39] C. Gordon, D. Wands, B. A. Bassett, and R. Maartens, Phys. Rev. D **63**, 023506 (2000).
[40] S. Groot Nibbelink and B. J. W. van Tent, arXiv:hep-ph/0011325.
[41] K. A. Malik and D. Wands, arXiv:0809.4944.
[42] M. Bruni, S. Matarrese, S. Mollerach, and S. Sonego, Classical Quantum Gravity **14**, 2585 (1997).
[43] K. Enqvist, J. Hogdahl, S. Nurmi, and F. Vernizzi, Phys. Rev. D **75**, 023515 (2007).
[44] J. M. Bardeen, Phys. Rev. D **22**, 1882 (1980).
[45] J. Khoury, B. A. Ovrut, P. J. Steinhardt, and N. Turok, Phys. Rev. D **64**, 123522 (2001).
[46] J. Khoury, B. A. Ovrut, P. J. Steinhardt, and N. Turok, Phys. Rev. D **66**, 046005 (2002).
[47] D. H. Lyth, Phys. Lett. B **524**, 1 (2002).
[48] P. Creminelli, A. Nicolis, and M. Zaldarriaga, Phys. Rev. D **71**, 063505 (2005).
[49] A. J. Tolley, N. Turok, and P. J. Steinhardt, Phys. Rev. D **69**, 106005 (2004).
[50] P. L. McFadden, N. Turok, and P. J. Steinhardt, Phys. Rev. D **76**, 104038 (2007).
[51] P. Horava and E. Witten, Nucl. Phys. **B460**, 506 (1996).
[52] P. Horava and E. Witten, Nucl. Phys. **B475**, 94 (1996).
[53] A. Lukas, B. A. Ovrut, K. S. Stelle, and D. Waldram, Phys. Rev. D **59**, 086001 (1999).
[54] A. Lukas, B. A. Ovrut, K. S. Stelle, and D. Waldram, Nucl. Phys. **B552**, 246 (1999).
[55] P. J. Steinhardt and N. Turok, Phys. Rev. D **65**, 126003 (2002).
[56] J.-L. Lehners, P. McFadden, and N. Turok, Phys. Rev. D **76**, 023501 (2007).
[57] E. I. Buchbinder, J. Khoury, and B. A. Ovrut, J. High Energy Phys. 11 (2007) 076.
[58] A. J. Tolley and D. H. Wesley, J. Cosmol. Astropart. Phys. 05 (2007) 006.
[59] J.-L. Lehners, P. McFadden, and N. Turok, Phys. Rev. D **75**, 103510 (2007).
[60] E. Komatsu *et al.* (WMAP Collaboration), Astrophys. J. Suppl. Ser. **180**, 330 (2009).
[61] K. M. Smith, L. Senatore, and M. Zaldarriaga, arXiv:0901.2572.
[62] T. Battefeld, Phys. Rev. D **77**, 063503 (2008).
[63] K. Koyama, S. Mizuno, and D. Wands, Classical Quantum Gravity **24**, 3919 (2007).
[64] P. Creminelli and L. Senatore, J. Cosmol. Astropart. Phys. 11 (2007) 010.
[65] E. I. Buchbinder, J. Khoury, and B. A. Ovrut, Phys. Rev. Lett. **100**, 171302 (2008).

Quatrième partie

L'inflation Dirac-Born-Infeld

Chapitre 7

L'inflation branaire à un champ

Sommaire

7.1 Pourquoi décrire l'inflation dans le cadre de la théorie des cordes ? . . . 231
7.2 Limite de basse énergie de la théorie des cordes de type IIB et compactifications avec flux . . . 233
7.2.1 La limite de basse énergie de la théorie des cordes de type IIB . 233
7.2.2 Compactifications avec flux et gorges déformées . . . 234
7.2.3 Gorges coniques, solution de Klebanov-Strassler et approximation AdS_5 . . . 235
7.3 L'inflation branaire . . . 236
7.3.1 Historique . . . 236
7.3.2 L'inflation branaire de roulement lent . . . 237
7.4 L'inflation Dirac-Born-Infeld à un champ . . . 239
7.4.1 L'évolution de fond . . . 240
7.4.2 La théorie linéaire et les non-gaussianités . . . 243
7.4.3 La borne de Baumann McAllister et ses conséquences . . . 245
7.4.4 Extensions et raffinements . . . 247

7.1 Pourquoi décrire l'inflation dans le cadre de la théorie des cordes ?

La théorie des cordes (voir par exemple les ouvrages de référence [336, 337, 166, 167, 431, 210]) est une théorie physique candidate à l'unification de la théorie quantique des champs et de la relativité générale, le graal de la physique théorique moderne. Elle est en développement actif depuis plus de 25 ans et, en plus de sa grande richesse mathématique [370], elle est forte d'importantes avancées théoriques comme la correspondance AdS/CFT [285, 424] ou la compréhension microscopique de l'entropie des trous noirs [395]. Ses deux aspects cruciaux qui nous seront utiles par la suite sont l'existence de six dimensions spatiales supplémentaires à celles de l'espace-temps quadridimensionnel usuel et l'existence

d'objets étendus de dimensions spatiales quelconques p, les Dp-branes. Deux possibilités peuvent expliquer que les dimensions supplémentaires de l'univers présentes dans la théorie des cordes n'aient pour l'instant pas été détectées. La première est que ces dimensions soient enroulées sur elles-mêmes – on parle de dimensions compactes – à une échelle bien inférieure à $(1\,TeV)^{-1}$, de telle façon que leurs effets effets ne soient pas détectables dans les accélérateurs de particules actuels. La seconde est que ces dimensions supplémentaires soient beaucoup plus grandes, compactes [17, 14, 18] ou non-compactes [341], mais que notre univers soit confiné sur une D3-brane et ne soit pas sensible, si ce n'est gravitationnellement, à l'existence des dimensions supplémentaires. Cette seconde possibilité mène à ce qu'on appelle la cosmologie branaire (voir la référence [233] pour une revue) qui a reçu beaucoup d'attention pendant la dernière décennie. Il est important de noter cependant que les modèles d'inflation branaire étudiés dans cette thèse n'ont rien à voir, si ce n'est la présence d'une D3-brane, avec la cosmologie branaire. Les D3-branes présentes dans ces modèles sont en effet à priori distinctes de notre univers.

Malgré ses succès théoriques, la théorie des cordes est toujours à la recherche d'une confirmation expérimentale. On considère généralement à cet égard que seuls deux phénomènes, alliant effets quantiques et gravitationnels importants, sont susceptibles de fournir des indices expérimentaux quant à une théorie de gravité quantique : les trous noirs et l'univers primordial. Étant donné que la possibilité d'effectuer des mesures précises sur des trous noirs est très éloignée temporellement, seule reste la cosmologie primordiale comme moyen de tester dans un avenir proche la théorie des cordes. Réciproquement, le paradigme de la cosmologie primordiale, l'inflation, est fort de son succès phénoménologique et expérimental à rendre compte des observations mais manque d'une assise microphysique. C'est donc très naturellement qu'a émergé pendant les dix dernières années un nouvel axe de recherche, la cosmologie cordiste. Au-delà de ces motivations générales, plusieurs raisons plus spécifiques nous poussent à considérer l'inflation dans le cadre de la théorie des cordes :

- en raison du problème η exposé à la sous-section 3.5.3, la viabilité d'un modèle d'inflation en roulement lent ne peut être déterminée qu'avec des informations détaillées à propos des corrections au potentiel inflationnaire supprimées par la masse de Planck. La connaissance de la physique à cette échelle n'est actuellement accessible que via la théorie des cordes.

- les ondes gravitationnelles générées pendant l'inflation ne sont observables que dans des modèles dit de grand champ dans lesquels l'inflaton parcourt des distances super-Planckiennes (*c.f.* la sous-section 3.5.2). Ce type de modèles est plus facilement étudié dans une théorie dont la structure ultraviolette est connue comme la théorie des cordes.

- nous allons voir que la théorie des cordes offre des possibilités nouvelles pour réaliser l'inflation et en particulier pour résoudre, ou plutôt contourner, le problème η. Plus généralement, elle motive des scénarios qui, bien que par ailleurs formulables en terme d'une théorie effective quadridimensionnelle, n'ont de réelles motivations que par leur origine extradimensionnelle cordiste. En bref, la théorie des cordes élargit le champ des possibles en matière de construction de modèles inflationnaires.

7.2 Limite de basse énergie de la théorie des cordes de type IIB et compactifications avec flux

Comme nous allons l'expliquer à la section suivante, le cadre moderne de l'inflation branaire est celui des compactifications avec flux [161, 122] dans lesquelles on considère la théorie des cordes de type IIB de basse énergie compactifiée sur un espace (*orientifold*) de Calabi-Yau [1]. Dans cette section, nous introduisons les concepts associés ainsi que les notations utilisées dans le reste de ce mémoire, suivant la référence [161].

7.2.1 La limite de basse énergie de la théorie des cordes de type IIB

Dans la limite de basse énergie – *i.e.* dans l'approximation de supergravité –, nous ne considérons que les champs de masse nulle de la théorie de type IIB, usuellement séparés en secteurs. Le secteur dit de Neveu-Schwarz Neveu-Schwarz contient la métrique dixdimensionnelle γ, le dilaton Φ ainsi que la 3-forme de Kalb-Ramond $H_3 = \mathrm{d}B_2$ tandis que le secteur de Ramond-Ramond contient trois potentiels de gauge, dit de Ramond-Ramond : l'axion C_0 et la 2-forme C_2 et 4-forme C_4, dont dérivent respectivement $B_3 \equiv \mathrm{d}C_2$ et $F_5 \equiv \mathrm{d}C_4$ (nous ne considérons pas les autres secteurs contenant des champs fermioniques). Introduisant l'axion-dilaton

$$\tau \equiv C_0 + ie^{-\phi} \tag{7.1}$$

la 3-forme complexe

$$G_3 \equiv F_3 - \tau H_3 \tag{7.2}$$

et le champ

$$\tilde{F}_5 \equiv \mathrm{d}C_4 - \frac{1}{2} C_2 \wedge H_3 + \frac{1}{2} B_2 \wedge F_3 \,, \tag{7.3}$$

auquel on impose d'être auto-dual, *i.e.*

$$\tilde{F}_5 = \star \tilde{F}_5 \,, \tag{7.4}$$

l'action gouvernant ces champs s'écrit

$$\begin{aligned} S_{IIB} &= \frac{1}{2\kappa_{10}^2} \int \mathrm{d}^{10}x \sqrt{-\gamma_{10}} \left(\mathcal{R}_{10} - \frac{\nabla\tau \cdot \nabla\tau^*}{2(\mathrm{Im}\tau)^2} - \frac{G_3 \cdot G_3^*}{12\,\mathrm{Im}\tau} - \frac{\tilde{F}_5^2}{4 \cdot 5!} \right) \\ &+ \frac{1}{8i\kappa_{10}^2} \int \frac{C_4 \wedge G_3 \wedge G_3^*}{\mathrm{Im}\tau} + S_{\mathrm{loc}} \end{aligned} \tag{7.5}$$

où $\kappa_{10}^2 = \frac{1}{2}(2\pi)^7 g_s^2 (\alpha')^4$ est la constante de couplage gravitationnel à dix dimensions, g_s désignant la constante de couplage des cordes et $\sqrt{\alpha'} = l_s$ leur longueur. Enfin, S_{loc} désigne l'action de possibles sources localisées dans l'espace-temps. Nous serons particulièrement intéressés par le cas des D3-branes dont la dynamique est gouvernée (*c.f.* la référence [27] par exemple) par la somme de l'action Dirac-Born-Infeld (DBI) [257] et de l'action de Wess-Zumino (WZ) (encore appelée action de Chern-Simons)

$$S_{\mathrm{loc,D3}} = S_{\mathrm{DBI}} + S_{\mathrm{WZ}} \tag{7.6}$$

1. Un espace de Calabi-Yau peut être défini comme un espace compact de Kähler dont le tenseur de Ricci est nul, voir par exemple la monographie [320].

avec

$$S_{\rm DBI} = -T_3 \int_{\Sigma_4} {\rm d}^4\xi\, e^{-\Phi} \sqrt{-\det\left(\hat{\gamma} + \hat{B}_2 + 2\pi\alpha' F_2\right)} \tag{7.7}$$

$$S_{\rm WZ} = -T_3 \int_{\Sigma_4} \sum_{n=0,2,4} \hat{C}_n \wedge e^{\left(\hat{B}_2 + 2\pi\alpha' F_2\right)}\Big|_{4-\text{forme}} . \tag{7.8}$$

Ici,

$$T_3 = \frac{1}{(2\pi)^3 g_s \alpha'^2} \tag{7.9}$$

désigne la tension d'une D3-brane et un chapeau désigne un champ induit sur la feuille d'univers de celle-ci, Σ_4, de coordonnées notées de façon collective ξ. Enfin, F_2 désigne le champ de force dérivant du potentiel de jauge abélien vivant sur la feuille d'univers d'une D3-brane : $F_2 = {\rm d}A_1$. Notons qu'on peut également considérer des anti-D3 branes, dont l'action DBI est identique à celles des D3-branes mais qui sont chargées négativement sous les formes de Ramond-Ramond, *i.e.* leur action de Wess-Zumino est l'opposée de celle (7.8).

7.2.2 Compactifications avec flux et gorges déformées

Dans la suite, nous considérons, à la suite de la référence [161], des configurations des champs préservant l'invariance de Lorentz dans les quatre dimensions non-compactes, et dont la métrique en particulier peut s'écrire sous la forme d'un produit déformé entre l'espace de Minkowski et un espace de Calabi-Yau

$$ds_{10}^2 = h^2(y^K)\, \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu + h^{-2}(y^K)\, G_{IJ}(y^K)\, dy^I dy^J \tag{7.10}$$

où les y^I $(I = 1, \ldots, 6)$ sont des coordonnées sur l'espace compact (collectivement notées y), G_{IJ} est la métrique de l'espace de Calabi-Yau et $h(y^I)$ est appelé facteur de déformation. Concernant la 5-forme (7.3), un ansatz compatible avec la condition (7.4) et l'invariance de Lorentz est donné par

$$\tilde{F}_5 = (1 + \star)\left[{\rm d}\alpha \wedge {\rm d}x^0 \wedge {\rm d}x^1 \wedge {\rm d}x^2 \wedge {\rm d}x^3\right] \tag{7.11}$$

tandis que la dernière condition implique que l'axion-dilaton ne varie que le long des dimensions compactes

$$\tau = \tau(y^I) \tag{7.12}$$

et que la 3-forme (7.2) voit toutes ses composantes le long des dimensions non-compactes s'annuler, sa forme précise dépendant évidemment de la topologie de l'espace compact. Notons enfin que l'invariance de Lorentz autorise des (anti) D3-branes le long des dimensions non compactes aussi bien que des Dp-branes ($p > 3$) enroulées le long de $p - 3$ directions compactes.

La référence [161] étudie en détail les propriétés des solutions des équations déduites de l'action (7.5) présentant les symétries décrites ci-dessus. Bornons nous ici à en rappeler quelques points importants. Les équations d'Einstein pour la métrique dixdimensionnelle (7.10) fournissent l'équation

$$\nabla_G^2 h^4 = h^2 \frac{G_{IJK} G^{IJK*}}{12\,{\rm Im}\tau} + h^{-6}\left(\nabla_I \alpha \nabla^I \alpha + \nabla_I h^4 \nabla^I h^4\right) + \frac{\kappa_{10}^2}{2} h^2 (T_I^I - T_\mu^\mu)^{\rm loc} \tag{7.13}$$

où T désigne le tenseur-énergie impulsion des sources. Or, l'intégrale du membre de gauche sur l'espace compact est nul tandis que le membre de droite est défini positif en absence de sources. On en déduit que, dans cette situation, les flux associés aux formes F_3, H_3 et F_5 s'annulent tandis que facteur de déformation est constant (on peut le prendre égal à 1) [287]. Enfin, combinée à la relation (7.13), l'équation du mouvement (l'identité de Bianchi) de $\tilde{F}_5$ donne

$$\nabla_G^2(h^4-\alpha) = \frac{h^2}{6\,\mathrm{Im}\tau}|iG_3 - \star_6 G_3|^2 + h^{-6}|\partial(h^4-\alpha)|^2 + 2\kappa_{10}^2 h^2\left(\frac{1}{4}(T_I^I - T_\mu^\mu)^{\mathrm{loc}} - T_3\rho_3^{\mathrm{loc}}\right) \tag{7.14}$$

où ρ_3^{loc} est la densité de D3 charge provenant des sources localisées. Le même raisonnement que précédemment montre alors que pour des sources vérifiant la condition ,

$$\frac{1}{4}(T_I^I - T_\mu^\mu)^{\mathrm{loc}} \geq T_3\rho_3^{\mathrm{loc}}\,, \tag{7.15}$$

– c'est le cas de toutes celles considérées par la suite – la 3-forme (7.2) doit vérifier la condition $\star_6 G_3 = iG_3$ et que α dans l'ansatz (7.11) est relié au facteur de déformation par

$$\alpha = h^4\,. \tag{7.16}$$

Nous verrons à la section suivante que nous sommes particulièrement intéressés par les compactifications avec des flux non-triviaux car ces derniers permettent de stabiliser la taille de l'espace compact. On déduit de la discussion précédente que ceci nécessite la présence de sources localisées et que loin de celles-ci, le facteur de déformation devient égal à un si bien que le produit déformé (7.10) devient direct : c'est ce qu'on appelle le bulk. Proches des sources, le facteur de déformation peut par contre être significativement inférieur à l'unité. De telles régions sont appelées des gorges.

7.2.3 Gorges coniques, solution de Klebanov-Strassler et approximation AdS_5

Une classe particulière de gorges est celles dans lesquelles le facteur de déformation h n'est fonction que d'une coordonnée r, dont la direction est alors appelée direction radiale. Un cas typique est celui des gorges pour lesquelles la métrique (7.10) peut se mettre sous la forme

$$ds_{10}^2 = h^2(r)\left(-dt^2 + d\mathbf{x}^2\right) + h^{-2}(r)\left(dr^2 + r^2 ds_{X_5}^2\right)\,. \tag{7.17}$$

L'espace compact a alors la géométrie d'un cône de base l'espace X_5. Dans le cas simple où X_5 est la sphère à 5 dimensions S^5 et où les sources sont constituées de N D3-branes, parallèles aux dimensions non compactes, situées en $r=0$, une solution des équations de supergravité est alors donnée par

$$h(r) = \frac{r}{R} \tag{7.18}$$

et, dans une certaine jauge, (*c.f.* l'équation (7.16))

$$(C_4)_{tx^1x^2x^3} = h(r)^4\,, \tag{7.19}$$

les autres champs s'annulant. R dans l'équation (7.18) désigne l'échelle de longueur caractéristique de la gorge, donnée par

$$R^4 = 4\pi g_s \alpha'^2 N\,. \tag{7.20}$$

Cette gorge s'appelle la gorge $AdS_5 \times S^5$ car $\frac{r^2}{R^2}\left(-dt^2 + d\mathbf{x}^2\right) + \frac{R^2}{r^2}dr^2$ est la métrique, en coordonnées de Poincaré, de l'espace anti de Sitter à cinq dimensions. Sa courbure scalaire, indépendante de r, est égale à $1/R^2$. Or, afin de vérifier les conditions de l'approximation de supergravité dans lesquelles nous nous sommes placés, la courbure scalaire de la métrique doit être bien supérieure à l'échelle de courbure des cordes l_s^{-2} (afin de pouvoir négliger les modes massifs de Kaluza-Klein). Ceci implique d'après la relation (7.20) que la charge N doit vérifier $N \gg 1$. Notons enfin qu'à l'espace additionnel S_5 près, la géométrie est identique dans cette solution à celle considérée par Randall et Sandrum dans la référence [340]. En particulier, le facteur $h(r) = r/R$ peut être identifié à un facteur local de décalage vers le rouge.

Un cas plus complexe est celui d'un espace de base $T^{1,1} = SU(2) \times SU(2)/U(1)$, qui a la topologie de $S^3 \times S^2$. La solution des équations de supergravité avec N D3-branes localises en $r = 0$ et M D5-branes enroulées autour de S^2 est alors connue [212] – il s'agit de la solution dite de Klebanov-Tseytlin – mais elle présente une singularité en $r = 0$ du fait que le rayon de S^2 et S^3 s'y annulent. Klebanov et Strassler [211] ont montré que ceci pouvait être résolu en remplaçant le cône de base $T^{1,1}$ par un cône déformé [88, 307, 323], un espace topologiquement équivalent mais dont le rayon de la sphère S^3 ne s'annule jamais. Notons enfin que, du fait des branes enroulées dans les dimensions compactes, ces deux solutions ont des flux non-triviaux associés aux 3-formes F_3 et H_3.

En pratique, les gorges utilisées dans le cadre de l'inflation branaire, comme celle de Klebanov-Strassler, peuvent, entre deux valeurs critiques r_{IR} et r_{UV}, être approximées par une gorge de type AdS_5, *i.e.* de facteur de déformation donné par l'équation (7.18), avec

$$R^4 = 4\pi g_s \alpha'^2 N \frac{\pi^3}{\mathrm{Vol}(X_5)}\,, \tag{7.21}$$

où $\mathrm{Vol}(X_5)$ est généralement d'ordre $\mathcal{O}(\pi^3)$. La partie de la gorge proche de $r = r_{IR}$ est dite infrarouge et celle proche de $r = r_{UV}$ est dite ultraviolette. Dans cette région, la gorge est reliée de manière continue au bulk, tel que $h = 1$ tandis que dans l'infrarouge, le facteur de décalage vers le rouge $h(r)$, au lieu de s'annuler, tend vers une constante non nulle.

7.3 L'inflation branaire

7.3.1 Historique

L'idée de réaliser l'inflation cosmologique en utilisant la position d'une brane dans les dimensions supplémentaires de la théorie des cordes comme inflaton a été proposée par Dvali et Tye en 1998 sous le nom d'inflation branaire [133]. L'idée consiste à considérer une D3-brane et une anti D3-brane séparées par une distance supérieure à la longueur des cordes dans les dimensions compactes, de géométrie triviale, les deux branes s'attirant alors sous l'effet de leur potentiel d'interaction Coulombien, que les auteurs pensaient suffisamment plat pour réaliser l'inflation de roulement lent. En utilisant le fait que la masse de Planck quadridimensionnelle est reliée au volume des dimensions compactes, on montre en fait facilement (voir par exemple [339]) que les conditions de roulement lent ne sont satisfaites que si les deux branes sont séparées par une distance supérieure à la taille des dimensions compactes !, ruinant ainsi l'espoir de réaliser l'inflation dans ce type de modèle. Une complication supplémentaire inhérente à tous les modèles d'inflation cordiste est

que le potentiel du volume des dimensions compactes (ainsi que du dilaton) est généralement abrupt, empêchant l'inflation et amenant à la décompactification des dimensions supplémentaires ! Ce problème générique est connu sous le nom de celui de stabilisation des modules (le terme module fait référence aux nombreux champs scalaires de la théorie des cordes, comme ceux décrivant la taille et la forme des dimensions supplémentaires ou encore l'axion ou le dilaton).

Une tentative de solution à ces problèmes a été proposée dans la référence [196], basée sur le travail antérieur [197]. Le cadre général est celui de la compactification avec flux [161, 122] présentée à la section précédente. Qualitativement, la situation est similaire à celle d'un anneau soumis à un champ magnétique uniforme. On sait que l'anneau tend alors à minimiser le flux du champ magnétique à travers lui, et donc à minimiser sa taille. De manière similaire dans le cas qui nous intéresse, les flux des champs de Ramond-Ramond dans les dimensions compactes tendent à contrebalancer l'effet de décompactification et à stabiliser ainsi la géométrie du Calabi-Yau. Ce type de compactification permet ainsi dans certaines configurations de stabiliser tous les modules aussi bien qu'il autorise des D3-branes et anti D3-branes transverses aux dimensions compactes. Pour ces raisons, ces compactifications constituent le cadre de référence depuis le travail [196] pour considérer l'inflation branaire (même si la stabilisation des modules reste sujette à vérification au cas par cas).

7.3.2 L'inflation branaire de roulement lent

Considérons maintenant, en suivant la référence [196], l'inflation branaire dans une gorge conique, approximée entre r_{IR} et r_{UV} par une géométrie anti de Sitter. Pour cela, ajoutons une D3-brane mobile de position radiale $r_1(t, x^i)$ et de coordonnées angulaires constantes (aller au-delà de cette approximation en toute généralité sera l'objet du chapitre suivant) et faisons l'approximation dite de brane test qui consiste à négliger la réaction de la brane sur le facteur de déformation, la métrique de l'espace compact et la 5-forme de Ramond-Ramond. Ceci est justifié car la gorge est déformée du fait de la présence d'un grand nombre $N \gg 1$ de D3-branes. L'effet de l'addition d'une D3-brane est donc à priori négligeable, tout comme on néglige le champ électromagnétique d'une particule test dans un champ électrostatique macroscopique de fond. L'énergie de la brane test nourrit par contre l'expansion des quatre dimensions spatio-temporelles non-compactes, autrement dit, la métrique $\eta_{\mu\nu}$ est alors remplacée par la métrique cosmologique $g_{\mu\nu}$. La dynamique du système brane+gravitation est alors gouvernée par la somme de l'action d'Einstein-Hilbert, résultant de la réduction dimensionnelle de l'action gravitationnelle dans (7.5), et de celle (7.6) :

$$S_{\text{mat}} = -T_3 \int d^4x \sqrt{-g} \left\{ h(r_1)^4 \sqrt{1 + h(r_1)^{-4} g^{\mu\nu} \partial_\mu r_1 \partial_\nu r_1} - (C_4)_{tx^1x^2x^3}(r_1) \right\} \tag{7.22}$$

(le lien précis entre les actions de Dirac-Born-Infeld (7.7) et de Wess-Zumino (7.8) et l'action (7.22) sera décrit en toute généralité dans les articles du chapitre suivant). Développant l'action (7.22) à l'ordre quadratique dans les dérivées du champ r_1, et utilisant le résultat (7.19), on obtient

$$S = -T_3 \int d^4x \sqrt{-g} \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \partial_\mu r_1 \partial_\nu r_1 \,. \tag{7.23}$$

Autrement dit, les effets gravitationnels (l'action DBI) et ceux de la 5-forme de Ramond-Ramond s'annulent de telle façon que la D3-brane ne ressente pas de force, *i.e.* r_1 est un champ libre [2]. Ajoutant maintenant une anti D3-brane fixée à la position radiale r_{IR} (le fond de la gorge dans l'approximation AdS_5), le potentiel d'interaction Coulombien entre les deux branes s'écrit, dans la limite où $r_1 \gg r_{IR}$:

$$V = 2T_3 \frac{r_{IR}^4}{R^4} \left(1 - \frac{1}{N} \frac{r_{IR}^4}{r_1^4}\right) . \tag{7.24}$$

Le premier terme est indépendant de la position de la D-brane et joue le rôle d'une constante cosmologique tandis que le second terme n'évolue que très lentement, comme la puissance inverse quatrième de la position de la brane, et est de plus supprimée par le facteur de déformation au fond de la gorge $h(r_{IR})^4 = r_{IR}^4/R^4 \ll 1$. Ceci en fait un potentiel adéquat pour réaliser l'inflation de roulement lent, réalisant ainsi l'idée de Dvali et Tye.

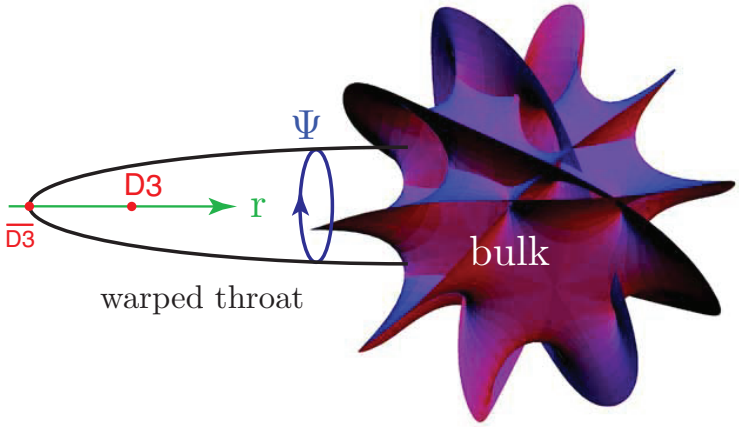

FIGURE 7.1 – L'inflation branaire D3$-\overline{D3}$ dans une gorge déformée (*warped throat* en anglais). Les deux branes sont parallèles aux quatre dimensions non-compactes et sont repérées par leurs coordonnées dans les dimensions supplémentaires, la coordonnée radiale r et les coordonnées angulaires, collectivement notées Ψ dans la figure, de l'espace de base X_5 représenté par un cercle. La gorge est rattaché au bulk à $r = r_{UV}$ tandis que l'anti D3-brane minimise son énergie au fond de la gorge à $r = r_{IR}$. Figure extraite de [49].

Le potentiel (7.24) ne prend cependant pas pas en compte le potentiel de stabilisation des modules. Les auteurs de [196] montrèrent que sa prise en compte est pourtant cruciale, et que le couplage qu'il induit entre les modules et le supposé inflaton r_1 rend génériquement le potentiel inflationnaire trop abrupt pour soutenir l'inflation de roulement lent, avec une masse du prétendu inflaton d'ordre le paramètre de Hubble. On reconnaît là une manifestation du problème η exposé à la sous-section 3.5.3. Le calcul précis des corrections supprimées par la masse de Planck au potentiel d'une D3-brane dans une gorge collée à un bulk est, depuis la référence [196], l'objet de constant développements (voir par exemple les références [46, 45, 43, 44]) mais la conclusion reste inchangée : l'inflation branaire de roulement lent D3$-\overline{D3}$ n'est possible qu'au prix d'ajustements très fins des paramètres quand elle n'est pas dans la majorité des compactifications complètement exclue.

2. Ce ne serait pas le cas pour une anti D3-brane, qui couple avec un signe opposé à la 4-forme C_4.

Malgré cela, précisons comment se déroule la fin de l'inflation branaire. Deux possibilités sont offertes selon le potentiel inflationnaire. L'inflation peut s'arrêter par violation des conditions de roulement lent, typiquement si le potentiel devient trop abrupt. Si le potentiel est suffisamment plat pour soutenir l'inflation jusqu'au fond de la gorge par contre, l'inflation s'arrête par instabilité tachyonique : quand la distance séparant la D-brane et l'anti D-brane devient de l'ordre de grandeur de la longueur des cordes, un mode des cordes ouvertes reliant les deux branes devient tachyonique, entraînant l'annihilation des branes et la fin de l'inflation [372]. Ce mécanisme peut être vu comme une réalisation en théorie des cordes du scénario d'inflation hybride [268], le tachyon jouant le rôle du champ "cascade"[3], à la différence notable près que le minimum du potentiel du tachyon est situé à l'infini. Usant du parallèle avec l'inflation hybride, l'instabilité tachyonique à la fin de l'inflation branaire a beaucoup eté étudiée (voir par exemple les références [32, 33, 68]). Le lien entre la phase d'inflation et l'ère de radiation du Big Bang chaud via la phase de réchauffement est lui toujours largement incompris. La complication est qu'il nécessite le transfert d'énergie de la brane inflationnaire vers une brane différente, "notre" brane où est réalisée le modèle standard, située possiblement dans une autre gorge [217].

7.4 L'inflation Dirac-Born-Infeld à un champ

Nous nous plaçons par la suite dans le contexte décrit à la section précédente avec une gorge conique quelconque du type (7.17) (le fait que la gorge de Klebanov-Strassler ait la géométrie d'un cône déformé n'est pas important ici car nous ne considérons que la coordonnée radiale de la brane). L'inflation Dirac-Born-Infeld [378] (DBI par la suite) peut y être vue comme un mécanisme résolvant, ou plutôt contournant, le problème η qui hante l'inflation branaire de roulement lent. Il exploite pour cela la forme non-standard des termes cinétiques de l'action DBI (le terme avec la racine dans l'équation (7.22)). Plutôt que de considérer comme les auteurs de la référence [196] la limite de mouvement lent où l'action (7.22) se réduit à l'action canonique (7.23), considérons donc l'action gouvernant le mouvement de la D3-brane couplée à la gravité en toute généralité

$$S = \int \mathrm{d}^4x\sqrt{-g}\left[\frac{1}{2}R - \frac{1}{f(\phi)}\left(\sqrt{1+f(\phi)\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi}-1\right) - V(\phi)\right] \tag{7.25}$$

où nous avons introduit le champ canoniquement normalisé

$$\phi = \sqrt{T_3}r_1\,, \tag{7.26}$$

le facteur de déformation renormalisé (qu'on appelle encore souvent facteur de déformation)

$$f(\phi) = T_3^{-1}h^{-4}\left(\frac{\phi}{\sqrt{T_3}}\right) \tag{7.27}$$

et où le potentiel $V(\phi)$ dans l'action (7.25) est quelconque. Cette action fournit donc un exemple non-trivial de modèle de k-inflation (*c.f.* la section 3.4) de Lagrangien

$$P = -\frac{1}{f(\phi)}\left(\sqrt{1-2f(\phi)X\phi}-1\right) - V(\phi) \tag{7.28}$$

3. *Waterfall field* en anglais.

où $X \equiv -\frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi$.

Par la suite, nous montrons comment réaliser l'inflation branaire dans un régime différent de celui de roulement lent, le régime DBI (sous-section 7.4.1). Nous étudions ensuite les propriétés des fluctuations cosmologiques générées par une telle phase d'inflation en illustrant les résultats dans un cas simple (sous-section 7.4.2). Bien que phénoménologiquement viables, nous montrons que la prise en compte de contraintes microphysiques sur les paramètres de ce type de modèles les rend en fait caduques d'un point de vue cordiste (sous-section 7.4.3). Nous expliquons enfin que ces résultats, présentés dans le cadre le plus simple, sont génériques, et considérons d'autres types de modèles et de contraintes (sous-section 7.4.4).

7.4.1 L'évolution de fond

Dans l'espace de fond où l'inflaton ϕ est homogène et où X se réduit à $\frac{1}{2}\dot{\phi}^2$, il est clair d'après la forme du Lagrangien (7.28) que la brane ne peut pas dépasser une vitesse limite :

$$\dot{\phi}^2 \leq \frac{1}{f(\phi)}\,. \tag{7.29}$$

Deux régimes distincts peuvent alors être considérés.

• Le premier est celui où la brane évolue lentement par rapport à sa vitesse limite : $f(\phi)\dot{\phi}^2 \ll 1$. Développant alors le Lagrangien (7.25) à l'ordre le plus bas (l'action à deux dérivées), on retrouve le Lagrangien canonique $P = X - V(\phi)$. C'est le régime de l'inflation en roulement lent, sujette au problème η, présentée à la section précédente.

• L'autre cas extrême est celui où la brane sature presque sa vitesse limite : $\dot{\phi}^2 \lesssim \frac{1}{f(\phi)}$. Dans ce cas, on ne peut pas développer la racine dans le Lagrangien (7.28) pour la tronquer à un ordre fini en X mais on doit prendre en compte toutes les non-linéarités de l'action Dirac-Born-Infeld. Ce régime, appelé le régime relativiste, ou régime DBI, est celui par lequel nous sommes particulièrement intéressés.

Peut-on réaliser l'inflation dans le régime DBI ? Oui !, sous certaines conditions. Pour cela, utilisons les résultats généraux de la k-inflation présentés à la section 3.4. De

$$P_{,X} = 1/\sqrt{1-2fX} \quad \text{et} \quad P_{,XX} = f/\left(1-2fX\right)^{3/2}\,, \tag{7.30}$$

on déduit que la vitesse du son (3.110) est donnée par

$$c_s = \sqrt{1 - f(\phi)\dot{\phi}^2}\,. \tag{7.31}$$

À la lumière de ce résultat, on peut reformuler la classification ci-dessus : le régime DBI correspond à la limite $c_s \ll 1$ tandis que le régime de roulement lent correspond à la limite canonique $c_s = 1$. Des équations (3.109), (3.108) et (7.30) on tire

$$\epsilon = \frac{3}{2}\frac{f\dot{\phi}^2/c_s}{1/c_s - 1 + fV} = \frac{3}{2}\frac{1/c_s - c_s}{1/c_s - 1 + fV} \tag{7.32}$$

où les deux formes sont utiles dans deux régimes différents :

- Dans le régime de roulement lent où $c_s \approx 1$, la première forme donne

$$\epsilon \approx \frac{3}{2}\frac{f\dot{\phi}^2}{fV} = \frac{3}{2}\frac{\dot{\phi}^2}{V}\,. \tag{7.33}$$

On retrouve alors la condition de domination de l'énergie potentielle sur l'énergie cinétique $V \gg \dot{\phi}^2$ nécessaire à réaliser l'inflation dans ce régime.

- Dans la limite DBI $c_s \ll 1$, la seconde forme est plus utile et donne

$$\epsilon \approx \frac{3}{2}\frac{1/c_s}{1/c_s + fV}\,. \tag{7.34}$$

On en déduit la condition pour réaliser l'inflation (au moins pendant quelques e-folds) dans le régime relativiste :

$$V \gg \frac{1}{fc_s}\,. \tag{7.35}$$

Notons que bien que les deux régimes soient distincts, la densité d'énergie de l'inflaton

$$\rho = \frac{1}{f}\left(\frac{1}{c_s} - 1\right) + V \tag{7.36}$$

est, dans le régime relativiste comme dans celui de roulement lent, toujours dominée par le potentiel V. Illustrons par contre la réelle différence entre les deux régimes dans un cas très simple, une brane soumise à un potentiel quadratique

$$V = \frac{1}{2}m^2\phi^2 \tag{7.37}$$

dans une gorge du type AdS_5 telle que (*c.f.* les équations (7.27) et (7.21))

$$f(\phi) = \frac{\lambda}{\phi^4} \qquad \text{avec} \qquad \lambda \equiv T_3 R^4 = \frac{\pi}{2}\frac{N}{\mathrm{Vol}(X_5)}\,. \tag{7.38}$$

Quels sont les conditions sur les deux paramètres du modèle m et λ pour entrer dans le régime d'inflation ultrarelativiste ? La condition d'inflation $\rho \approx V$ et la condition relativiste $c_s \ll 1$ impliquent respectivement

$$3H^2 \approx V = \frac{1}{2}m^2\phi^2 \quad \Leftrightarrow \quad H \approx \frac{m}{\sqrt{6}}\phi \tag{7.39}$$

d'après l'équation de Friedmann (1.19) et

$$\dot{\phi} \approx -\phi^2/\sqrt{\lambda} \tag{7.40}$$

d'après la forme (7.38) du facteur de déformation. On en déduit que le paramètre de décélération $\epsilon \equiv -\dot{H}/H^2$ est constant et vaut

$$\epsilon = \frac{\sqrt{6}}{m\sqrt{\lambda}}\,. \tag{7.41}$$

La condition pour entrer dans le régime d'inflation DBI est donc d'avoir un inflaton suffisamment massif ! de masse m telle que

$$m\sqrt{\lambda} \gg 1\,. \tag{7.42}$$

On a indiqué à la section précédente que le problème η est omniprésent dans l'inflation branaire. Rappelons qu'il réside dans le fait que les corrections au potentiel inflationnaire supprimées par la masse de Planck– en l'occurrence dues au potentiel de stabilisation des modules – et donc naïvement négligeables, contribuent en fait à donner une masse effective à l'inflaton de l'ordre du paramètre de Hubble H et donc à empêcher l'inflation de roulement lent. On voit d'après le résultat (7.42) que ce problème n'existe pas dans l'inflation DBI où la condition pour rentrer dans le régime relativiste est précisément d'avoir un inflaton suffisamment massif. En ce sens, l'inflation DBI "résout" le problème η et l'inflation branaire devient générique, quoi que dans un régime différent de celui initialement envisagé.

Comment comprendre intuitivement qu'un inflaton "relativiste", saturant sa vitesse limite, soit capable de soutenir une période d'inflation où le paramètre de Hubble $H \approx \sqrt{\frac{V(\phi)}{3}}$ est presque constant ? La raison en est la forte déformation de la gorge $h \ll 1$ qui implique que la vitesse limite elle-même est très petite

$$\dot{\phi}^2/M_p^4 \approx 1/fM_p^4 = \frac{T_3}{M_p^4}h^4 \ll 1. \tag{7.43}$$

où on a utilisé la condition $c_s \ll 1$ à la première égalité, la définition (7.27) à la seconde égalité et où nous avons réinstauré la masse de Planck. Autrement dit, quelle que soit la raideur du potentiel inflationnaire, la forte déformation de la gorge limite la vitesse de la brane. Mieux, plus le potentiel est raide, plus la brane va rapidement rouler le long de son potentiel, atteindre sa vitesse limite et donc le régime DBI (*c.f.* la condition (7.42)). Au contraire, si la masse de l'inflaton est suffisamment faible ($m\sqrt{\lambda} \lesssim 1$), celui-ci va rouler lentement le long de son potentiel sans jamais atteindre sa vitesse limite. C'est le régime de roulement lent. À cet égard, il convient de préciser la terminologie employée. Même dans le régime relativiste, l'inflation peut être de variation lente, dans le sens où toutes les quantités physiques évoluent moins rapidement que le facteur d'échelle, par exemple

$$\left|\frac{\ddot{\phi}}{H\dot{\phi}}\right| \approx \frac{2\sqrt{6}}{m\sqrt{\lambda}} \ll 1 \tag{7.44}$$

d'après les équations (7.40) et (7.39). Il faut donc distinguer l'inflation de roulement lent, caractérisée par $c_s \approx 1$, de l'inflation de variation lente, qui peut concerner toutes les valeurs de la vitesse du son. Notons enfin que le grand paramètre $m\sqrt{\lambda}$ entre directement dans l'expression du nombre de e-folds d'expansion restant avant la fin de l'inflation, à $\phi = \phi_{\rm f}$ (*c.f.* l'équation (3.30)) :

$$N(\phi) = \int_{\phi}^{\phi_{\rm f}} \frac{H}{\dot{\phi}}{\rm d}\phi \approx \frac{m\sqrt{\lambda}}{\sqrt{6}} \ln\left(\frac{\phi}{\phi_{\rm f}}\right) \tag{7.45}$$

où on a utilisé (7.40) et (7.39). Étant donné la faible dépendance – logarithmique – en l'inflaton ϕ, on en déduit que génériquement

$$m\sqrt{\lambda} \simeq 100 \tag{7.46}$$

(ceci peut être rendu explicite en identifiant la valeur de l'inflaton quand les modes observables traversent le rayon de Hubble [375]).

7.4.2 La théorie linéaire et les non-gaussianités

Considérons maintenant les fluctuations cosmologiques induites par une phase d'inflation branaire dans le régime DBI. Il suffit en fait d'appliquer les résultats généraux déterminées dans l'étude de la k-inflation concernant les spectres de puissance (section 3.4) et les non-gaussianités (section 5.4.3). Nous nous concentrons par simplicité sur le cas étudié plus haut d'une gorge de type AdS_5 (7.38) et du potentiel quadratique (7.37).

Des équations (3.109), (7.30), (7.39), (7.40) et (7.41), on obtient l'expression de la vitesse du son en fonction de l'inflaton

$$c_s = \sqrt{\frac{3}{2}}\frac{\phi^2}{m\sqrt{\lambda}}\,, \tag{7.47}$$

avec laquelle l'expression générale du spectre de puissance des fluctuations scalaires (3.118)

$$\mathcal{P}_\zeta(k) = \left.\frac{H^2}{8\pi^2\epsilon c_s}\right|_{kc_s=aH} \tag{7.48}$$

se simplifie en

$$\mathcal{P}_\zeta = \frac{m^4\lambda}{144\pi^2}\,. \tag{7.49}$$

Notons que le fait qu'il soit exactement invariant d'échelle au premier ordre dans l'approximation de variation lente – comme on peut également le vérifier d'après l'expression de l'indice spectral scalaire (3.121) – ne se généralise pas à un modèle quelconque $(f(\phi), V(\phi))$. Des résultats (7.46) et (7.49) et de la normalisation des fluctuations scalaires (2.153), on en déduit que les données peuvent être reproduites avec les paramètres

$$m \simeq 10^{-5}\,, \quad \lambda \simeq 10^{14}\,. \tag{7.50}$$

Le paramètre λ étant directement relié à la charge N par $\lambda = \frac{\pi}{2}\frac{N}{\mathrm{Vol}(X_5)}$ (7.38), les observations contraignent ainsi le type de compactification dans laquelle l'inflation DBI est réalisable (à ce niveau). Notons à ce propos que la grande valeur de λ nécessaire n'est pas à priori problématique car la charge N doit justement être très grande pour que l'approximation de supergravité soit valable (*c.f.* la discussion après l'équation (7.19)).

Concernant les non-gaussianités, on déduit de l'analyse générale menée à la section 5.4.3 qu'elles sont de type équilatéral dans le régime relativiste où la vitesse du son est très inférieure à l'unité, avec un bispectre dominé par les profils (5.94) et (5.95). En utilisant les relations (7.30) et la relation $P_{,XXX} = 3f^2/\left(1-2fX\right)^{5/2}$, on trouve en fait que l'amplitude (5.97) du premier profil est identiquement nul pour le Lagrangien DBI (7.28) de telle façon que le bispectre est uniquement donné par (5.95)

$$S_{\mathrm{DBI}} = \frac{1}{c_{s*}^2}\left(-\frac{1}{K}\sum_{i>j}k_i^2k_j^2 + \frac{1}{2K^2}\sum_{i\neq j}k_i^2k_j^3 + \frac{1}{8}\sum_i k_i^3\right)\frac{1}{k_1k_2k_3}\,, \tag{7.51}$$

où on a utilisé que la vitesse du son au moment où les modes observables traversent l'horizon sonique vérifie $c_{s*}^2 \ll 1$. L'amplitude correspondante, conventionnellement indiquée par $f_{NL} = \frac{10}{9} S(k,k,k)$ (*c.f.* l'équation (5.96)), est donc donnée par (5.98)

$$f_{NL}^{\mathrm{eq,DBI}} = -\frac{35}{108}\frac{1}{c_{s*}^2}\,. \tag{7.52}$$

Ce résultat est valable pour tout modèle d'inflation DBI. Spécialisé au cas (7.47), on obtient

$$f_{NL}^{\mathrm{eq,DBI}} = -\frac{35}{162}\lambda\left(\frac{m}{M_p}\right)^2 \Big/ \left(\frac{\phi_*}{M_p}\right)^4 \tag{7.53}$$

où on a réinstauré la masse de Planck. On en déduit que l'inflaton doit être au moins Planckien, $\phi_* \gtrsim M_p$, pour satisfaire les contraintes observationnelles (voir la sous-section 5.5.2)

$$-214 < f_{NL}^{\mathrm{eq}} < 266\,. \tag{7.54}$$

Notons que d'après l'équation de Friedmann (7.39), un inflaton d'ordre $\mathcal{O}(M_p)$ correspond à une masse de l'inflaton m de l'ordre du paramètre de Hubble. Le fait de pouvoir réaliser l'inflation DBI dans ces conditions est à contraster avec le cas de l'inflation de roulement lent (sous-section 3.2.2) et témoigne encore une fois de la "résolution" du problème η apportée par l'inflation DBI.

Notons enfin que $f_{NL}^{\mathrm{eq,DBI}}$ (7.52) est dépendant de l'échelle à laquelle il est évalué via l'instant où celle-ci traverse l'horizon. Ceci n'est pas en contradiction avec le fait qu'on a considéré c_s constant dans le calculs des intégrales du bispectre du type de celle (5.87), de manière similaire au fait que l'indice spectral scalaire (3.102) peut être calculé au premier ordre dans les paramètres de variation lente à partir d'une solution déterminée à l'ordre zéro (*c.f.* la discussion après l'équation (3.102)). La dépendance d'échelle de $f_{NL}^{\mathrm{eq,DBI}}$, caractérisée par

$$n_{f_{NL}}^{\mathrm{eq}} \equiv \frac{d\ln f_{NL}^{\mathrm{eq}}(k)}{d\ln k} = -2s_*\,, \tag{7.55}$$

ses conséquences observationnelles et les contraintes que les futurs observations seront capables de poser sur cette observable sont discutées dans les références [95, 369, 273].

Nous nous sommes concentrés ici sur le cas d'une gorge du type AdS_5 et d'un potentiel quadratique qui a le mérite de montrer analytiquement très simplement les caractéristiques de l'inflation DBI. On peut étendre cette analyse, analytiquement et numériquement, à une large gamme de facteurs de déformation, de potentiel et considérer de plus les contraintes sur l'indice spectral scalaire et le rapport tenseur sur scalaire mais le résultat est similaire [375, 328, 53, 110] : au niveau phénoménologique auquel nous nous sommes placés, on peut réaliser l'inflation branaire dans le régime relativiste $c_s \ll 1$, générant ainsi d'importantes non-gaussianités équilatérales, au prix de considérer un inflaton d'ordre la masse de Planck. Notons que ce dernier point n'est applicable qu'aux modèles d'inflation DBI dits ultraviolet (UV), sur lesquels nous nous sommes concentrés, dans lesquels la brane est attirée vers le fond de la gorge. On peut également considérer des modèles, dits infrarouges (IR), dans lesquels la brane sort de la gorge ($\dot{\phi} > 0$) sous l'effet par exemple d'un potentiel du type $V = V_0 - \frac{1}{2}m^2\phi^2$ [93, 94]. Ces modèles peuvent s'accommoder d'un inflaton sous-Planckien.

7.4.3 La borne de Baumann McAllister et ses conséquences

Une restriction géométrique sur l'espace de l'inflaton

Précédemment, nous avons formulé l'inflation branaire dans le cadre d'une théorie effective quadridimensionnelle sans se soucier de l'origine cordiste extradimensionnelle de celle-ci. Nous montrons maintenant que la prise en compte de cette origine entraîne des relations entre des paramètres microphysiques de la théorie qui imposent d'importantes contraintes sur tout scénario d'inflation branaire, et qui rendent en particulier caduques les modèles d'inflation DBI les plus simples [48]. La raison en est que l'inflaton ϕ dans tout modèle d'inflation branaire présentant une gorge déformée doit être largement sous-Planckien.

Naïvement, la valeur maximale de l'inflaton dans la gorge

$$\phi_{\rm UV} = \sqrt{T_3} r_{UV} \tag{7.56}$$

(*c.f.* (7.26)) peut être rendue aussi grande que l'on veut en augmentant la taille de celle-ci. Cependant, on ne doit pas oublier que sous l'effet de la réduction dimensionnelle, la masse de Planck M_p, l'unité dans laquelle on mesure l'inflaton, est directement reliée au volume des dimensions compactes par [122]

$$M_p^2 = \frac{V_6}{\kappa_{10}^2}\,, \tag{7.57}$$

où $\kappa_{10}^2 = \frac{1}{2}(2\pi)^7 g_s^2 (\alpha')^4$ est la constante de couplage gravitationnel à dix dimensions et $V_6 \equiv \int \mathrm{d}^6 y \sqrt{G} h^{-4}(y)$ est le volume (déformé) de l'espace compact (y désigne collectivement les coordonnées de l'espace compact y^I et G le déterminant de G_{IJ} dans la métrique (7.10)). Or, il se trouve qu'augmenter la taille de la gorge augmente plus la valeur de la masse de Planck que la valeur maximale de l'inflaton, résultant en une diminution de $\phi_{\rm UV}/M_p$! Pour le voir, minorons simplement le volume total de l'espace compact par le volume de la gorge :

$$V_6 \;>\; (V_6)_{\rm gorge} = {\rm Vol}(X_5) \int_0^{r_{\rm UV}} \mathrm{d}r\, r^5 h^{-4}(r) = {\rm Vol}(X_5) T_3^{-2} \int_0^{\phi_{\rm UV}} \mathrm{d}\phi\, \phi^5 f(\phi) \tag{7.58}$$

où on a utilisé $\phi = \sqrt{T_3} r$ (de manière générique et pas seulement à la position de la brane) et l'équation (7.27). Combinant ce résultat avec la relation (7.57), on obtient

$$M_p^2 > \frac{{\rm Vol(X_5)}}{\pi} \int_0^{\phi_{\rm UV}} \mathrm{d}\phi\, \phi^5 f(\phi) \tag{7.59}$$

ou encore

$$\left(\frac{\phi_{\rm UV}}{M_p}\right)^2 < \frac{4}{N_{\rm gorge}} \tag{7.60}$$

avec

$$N_{\rm gorge} \equiv \frac{4{\rm Vol(X_5)}}{\pi \phi_{\rm UV}^2} \int_0^{\phi_{\rm UV}} \mathrm{d}\phi\, \phi^5 f(\phi)\,. \tag{7.61}$$

La raison pour exprimer l'inégalité obtenue de cette façon est qu'appliqué à l'approximation AdS_5 (7.38), on obtient $N_{\rm gorge} = N$ et donc [48] (voir également [102] pour une discussion antérieure) $\left(\frac{\phi_{\rm UV}}{M_p}\right)^2 < \frac{4}{N}$, inégalité connue sous le nom de borne de Baumann McAllister

(ainsi que sa forme générale (7.60)). Comme $N \gg 1$ pour assurer le contrôle de l'approximation de supergravité et le caractère déformé de la gorge, on en déduit que l'inflaton doit être largement sous-Planckien $\phi_{\rm UV} \ll M_p$. Comme on le voit, l'argument, uniquement géométrique, s'applique aussi bien à l'inflation branaire de roulement lent qu'au régime relativiste, et ce indépendamment de la forme précise du potentiel par exemple. On en déduit immédiatement que les modèles d'inflation DBI ultraviolets, acceptables d'un point de vue phénoménologique, ne peuvent être réalisés dans le cadre de la théorie des cordes dans une gorge de type AdS_5. La même conclusion peut être tirée pour un facteur de déformation $f(\phi)$ quelconque en étudiant numériquement si l'inégalité

$$\left(\frac{\Delta\phi}{M_p}\right)^2 < \frac{4}{N_{\rm gorge}} \tag{7.62}$$

est vérifiée, où $\Delta\phi$ désigne la variation de l'inflaton pendant l'inflation. Les auteurs de la référence [328] inspectèrent de cette façon une large gamme de facteurs de déformation et de potentiel et aboutirent à la conclusion que pour un scénario d'inflation DBI ultraviolet en accord avec les observations cosmologiques, la variation de l'inflaton $\Delta\phi/M_p$ est au moins d'ordre un tandis que $N_{\rm gorge} \gg 1$, excluant ces modèles.

Inflation branaire et ondes gravitationnelles

Le fait que le déplacement de l'inflaton dans l'inflation branaire soit sous-Planckien a une conséquence importante. Rappelons en effet que la relation, dite de Lyth, (3.129) (nous l'avons démontré dans le cas de l'inflation canonique mais il est aisé de montrer qu'elle est également valable dans le cas de l'inflation DBI), implique qu'une amplitude observable – $r \gtrsim 0.01$ – des ondes gravitationnelles générées pendant l'inflation est corrélée avec une échelle d'excursion de l'inflaton super-Planckienne. Ainsi, le raisonnement de Baumann et McAllister implique que les ondes gravitationnelles générées dans l'inflation branaire sont inobservables, et ce indépendamment des détails d'un quelconque modèle. Étant donné son importance, il n'est pas inintéressant de donner une preuve analytique de ce résultat. Ceci peut être obtenu dans le régime relativiste ultraviolet comme suit [265].

Notons $\Delta\phi_*$ la variation de l'inflaton pendant que les échelles cosmologiques observables traversent l'horizon, correspondant à $\Delta N_* \approx 4$ d'e-folds d'expansion. Minorons alors l'intégrale apparaissant dans l'équation (7.59) selon

$$\int_0^{\phi_{\rm UV}} {\rm d}\phi\, \phi^5 f(\phi) \ > \Delta\phi_* \phi_*^5 f_* > (\Delta\phi_*)^6 f_* \tag{7.63}$$

où nous utilisé $\Delta\phi_* < \phi_*$ (ϕ décroît dans l'inflation ultraviolette) et noté $f_* \equiv f(\phi_*)$. L'équation (7.59) devient alors

$$\left(\frac{\Delta\phi_*}{M_p}\right)^6 < \frac{\pi}{{\rm Vol}({\rm X}_5)} (f_* M_p^4)^{-1}\,. \tag{7.64}$$

Enfin, dans le régime relativiste $c_{s*} \ll 1$, le facteur de déformation peut s'exprimer en fonction de quantités observables :

$$f_*^{-1} \approx \dot\phi_*^2 = 2\epsilon_* c_{s*} H_*^2 M_p^2 = \frac{\pi^2}{16} \mathcal{P}_{\zeta*} r_*^2 M_p^4 \tag{7.65}$$

où on a utilisé (3.109) à la deuxième égalité et (7.48) et (3.120) à la troisième égalité. On obtient ainsi

$$\left(\frac{\Delta\phi_*}{M_p}\right)^6 < \frac{\pi^3}{16\mathrm{Vol}(\mathrm{X}_5)}\mathcal{P}_{\zeta*}r_*^2\,. \tag{7.66}$$

Comme on sait d'après les observations que $\mathcal{P}_{\zeta*} \sim 2.4 \times 10^{-9}$ et $r_* < 0.3$ (*c.f.* la sous-section 2.4.3) et d'après la théorie que $\mathrm{Vol}(\mathrm{X}_5) = \mathcal{O}(\pi^3)$, on en déduit que la variation de l'inflaton $\Delta\phi_*$ est largement sous-Planckienne. Avec la relation de Lyth (3.129)

$$\left(\frac{\Delta\phi_*}{M_p}\right)^2 \approx \frac{r_*}{8}(\Delta N_*)^2 \tag{7.67}$$

cela implique

$$r_* < \frac{32\mathcal{P}_{\zeta*}}{(\Delta N_*)^5}\frac{\pi^3}{\mathrm{Vol}(\mathrm{X}_5)}, \tag{7.68}$$

autrement dit une amplitude inobservable des ondes gravitationnelles (à moins que $\mathrm{Vol}(\mathrm{X}_5)$ ne soit exceptionnellement petit, comme par exemple dans les espaces $Y^{p,q}$ dans la limite $p \to \infty$ [160]).

7.4.4 Extensions et raffinements

Du fait de la possibilité qu'il offre de contourner le problème η ainsi que de générer d'importantes non-gaussianités primordiales, le mécanisme d'inflation DBI – réaliser l'inflation cosmologique malgré un potentiel abrupt en utilisant la vitesse limite imposée par les termes cinétiques non-standards de l'action DBI – a reçu beaucoup d'attention. Nous avons présenté jusque là ses caractéristiques principales dans le cadre le plus étudié d'une D3-brane se dirigeant vers le fond d'une gorge (le modèle ultraviolet). Nous mentionnons ici des travaux plus précis ainsi que des variantes ou extensions de ce modèle sans prétendre à l'exhaustivité.

L'inflation DBI ultraviolette se termine le plus souvent par instabilité tachyonique au fond de la gorge alors que la majorité des travaux utilisent un facteur de déformation – souvent AdS_5 – valable loin de celle-ci. Les auteurs des références [203, 376] ont montré qu'au niveau phénoménologique, une phase d'inflation DBI est réalisable entièrement au fond de la gorge, où le facteur de déformation devient constant. Ces modèles ne respectent cependant pas la borne de Baumann McAllister.

Lidsey et Huston [265] ont déterminé dans le régime relativiste une borne inférieure au rapport tenseur sur scalaire incompatible avec la borne supérieure (7.68) (voir également [266] pour des travaux antérieurs). Nous revisiterons cette contrainte dans un cadre plus général au chapitre suivant dans l'article [236].

Les effets d'un couplage non-minimal de l'inflaton à la gravité ont été étudiées dans la référence [136] tandis que l'influence des conditions initiales a été considérée dans l'article [66]. Les effets dissipatifs dus aux interactions de la brane mobile soutenant l'inflation avec d'autres branes ont également été étudiés [69].

Nous avons déjà mentionné l'inflation branaire infrarouge dans lesquels la brane se dirige vers le bulk [93, 94]. Contrairement aux modèles ultraviolets, la borne géométrique de Baumann et McAllister n'exclue pas une réalisation de ces scénarios dans le régime relativiste [52]. Notons par contre qu'elle implique toujours que les ondes gravitationnelles générées sont d'amplitude inobservable.

Une idée naturelle pour réaliser avec succès le mécanisme d'inflation DBI malgré les résultats de Baumann et McAllister est de chercher à étendre la valeur maximale de l'inflaton pour atteindre des valeur Planckiennes. On peut considérer pour cela une superposition de n branes coïncidentes [4] [414, 63], multipliant ainsi l'échelle d'excursion de l'inflaton par $\sqrt{n}$ (voir la référence [190] pour les contraintes correspondantes sur l'amplitude des ondes gravitationnelles et [400] pour une variante infrarouge). On peut également considérer comme inflaton la position radiale d'une D5 ou d'une D7-brane enroulée le long des dimensions compactes [54, 213] mais il est alors difficile de contrôler leur réaction sur la géométrie de celles-ci.

Une façon de reformuler le problème posé par la borne de Baumann McAllister est la suivante : étant donné que l'inflaton branaire est sous-Planckien, les non-gaussianités générées dans l'inflation DBI (7.53) sont d'amplitude supérieure aux bornes observationnelles (7.54). Plutôt que de vouloir étendre la valeur maximale de l'inflaton, ne peut-on donc pas diminuer l'amplitude des non-gaussianités générées dans ce type de modèles ? On verra au chapitre suivant que l'inflation DBI multichamp présente cette possibilité.

4. La description de la dynamique collective de plusieurs branes fait intervenir des matrices [318, 319], reflétant la nature non-abélienne des champs de jauge vivant à la surface de celles-ci quand elles sont coïncidentes.

Chapitre 8

L'inflation DBI multichamp

Sommaire

8.1 Fluctuations primordiales et non-gaussianités dans l'inflation multichamp générale et dans l'inflation multichamp DBI (articles) . . . 249

8.1.1 Motivations, contexte scientifique et résultats . . . 249

8.1.2 Article court . . . 252

8.1.3 Article long . . . 257

8.2 Les champs de fond et les ondes gravitationnelles dans l'inflation DBI multichamp (article) . . . 274

8.2.1 Motivations et résultats . . . 274

8.2.2 Article . . . 275

8.3 Non-gaussianités locales et équilatérales combinées dans l'inflation DBI multichamp (article) . . . 299

8.3.1 Motivations et résultats . . . 299

8.3.2 Article . . . 300

8.4 Autres travaux . . . 335

8.1 Fluctuations primordiales et non-gaussianités dans l'inflation multichamp générale et dans l'inflation multichamp DBI (articles)

8.1.1 Motivations, contexte scientifique et résultats

Au chapitre précédent traitant de l'inflation branaire, nous avons suivi l'approche historique en considérant que les positions de la D3-brane mobile sont gelées dans cinq des six dimensions compactes – les directions angulaires dans le cas de l'inflation dans des gorges coniques. Cette situation est évidemment hautement restrictive et il est naturel de vouloir prendre en compte tous les degrés de liberté de la brane [204, 392, 71, 70, 134, 123, 92].

Étant donné que chacune de ses coordonnées dans les dimensions supplémentaires se manifeste comme un champ scalaire du point de vue quadridimensionnel, nous sommes donc naturellement menés à considérer les aspects multichamps de l'inflation branaire. Certaines directions angulaires sont par exemple isométriques, comme dans la gorge de Klebanov-Strassler [211, 182], de telle façon que les champs associés, à priori légers, voient leurs fluctuations quantiques amplifiées et peuvent avoir des effets observationnels importants [280]. Le potentiel branaire, beaucoup étudié dans la limite de roulement lent, est également en général dépendant de certaines des coordonnées angulaires (voir par exemple la revue [49]). L'hypothèse selon laquelle celles-ci suivent leur minimum local – fonction de la position radiale de la brane – et donc que ces champs peuvent être intégrés s'avère alors en général incorrecte [324]. Connus dans la limite de roulement lent – le cadre théorique est alors l'inflation multichamp canonique présentée au chapitre 4.2 – les aspects multichamps de l'inflation branaire dans la limite relativiste n'avaient pas été explorés avant le début de cette thèse.

Comme mentionné à la section 4.3, les références [135, 189] initièrent cette étude sur la base d'un Lagrangien du type de ceux de l'inflation multichamp généralisée [235] (dont ils ont motivé l'introduction) mais dont l'origine n'était pas précisée. L'action gouvernant la dynamique d'une D-brane est pourtant connue : il s'agit de l'action de Dirac-Born-Infeld (7.7) (suppléée par l'action de Wess-Zumino (7.8)) qui, négligeant le champ de Ramond-Ramond B_2 et le champ de jauge F_2 [1], n'est rien d'autre que l'action de Nambu-Goto, proportionnelle au volume d'univers couvert par la D-brane. En termes techniques, celui-ci est donné par la racine de - le déterminant de la métrique induite sur la brane. David Langlois, Danièle A. Steer, Takahiro Tanaka et moi-même l'avons calculé en toute généralité [237, 238] et avons montré que l'action DBI multichamp contient des termes, d'ordres élevés en gradients spatio-temporels et s'annulant dans l'espace de fond, ignorés dans les références [135, 189]. Les résultats de ces-dernières concernant l'évolution homogène de l'inflation DBI multichamp sont donc corrects mais ce n'est pas le cas de ceux traitant des perturbations cosmologiques générées dans une telle phase d'inflation. Pour les étudier, on ne doit pas, comme fait dans ces références, employer un Lagrangien de la forme $P(X, \phi^I)$, où X est un terme cinétique global (4.57) pour les champs scalaires ϕ^I, mais un de la forme plus générale

$$P(X^{IJ}, \phi^K) \tag{8.1}$$

où les

$$X^{IJ} \equiv -\frac{1}{2}\nabla_\mu \phi^I \nabla^\mu \phi^J \tag{8.2}$$

sont des termes cinétiques mixtes pour les champs scalaires. Le Lagrangien (8.1) est en fait celui invariant de Lorentz le plus général possible pour des champs scalaires minimalement couplés à la gravité si on se limite à ne faire intervenir que les dérivées premières des champs. Il convient cependant de remarquer que le Lagrangien DBI est d'un type très particulier parmi ceux de la forme (8.1) dans le sens où il peut se mettre sous la forme $P(\tilde{X}, \phi^I)$ où X (4.57) et $\tilde{X}$ diffèrent seulement par des termes faisant intervenir des gradients spatiaux. Pour cette raison, le formalisme développé dans la référence [235] nous a été particulièrement utile dans l'étude de l'inflation DBI multichamp.

1. Le cas général sera traité à la section 8.2.

Notre travail avec David Langlois, Danièle A. Steer et Takahiro Tanaka a donné lieu à deux publications [237, 237]. L'article [238], reproduit à la section 8.1.3, développe la théorie des perturbations cosmologiques dans le cadre général des Lagrangiens de la forme (8.1), avec une attention particulière pour l'inflation DBI multichamp, tandis que l'article compagnon [237], reproduit à la section 8.1.2, se concentre sur ce dernier type de modèles. Avant le texte des deux articles proprement dit, nous résumons ici les principaux résultats obtenus.

Dans le cadre des modèles multichamps de termes cinétiques quelconques (8.1), nous avons calculé de manière exacte l'action au second ordre et au troisième ordre dans les fluctuations scalaires, comme requis pour l'étude du spectre et du bispectre primordial, unifiant et généralisant ainsi différents calculs présents dans la littérature [286, 364, 363, 100]. Nous avons également identifié dans le cas général la matrice de propagation dont les valeurs propres donnent les vitesses du son des perturbations et dont les vecteur propres définissent les variables à quantifier sous l'horizon.

Appliquant ces résultats à l'inflation DBI, nous avons montré que l'inclusion des termes négligées dans les références [135, 189] altèrent considérablement leurs conclusions. Les modes entropiques et adiabatique évoluent en effet à la même vitesse, *i.e.* une vitesse du son effective c_s plus petite que la vitesse de la lumière. Les fluctuations quantiques des champs légers sont donc amplifiées à la traversée de l'horizon du son pour tous les modes de perturbations. Il en résulte que, dans la limite relativiste où $c_s \ll 1$, les modes entropiques sont d'amplitude beaucoup plus importante que le modes adiabatique (avec une normalisation "naturelle") et non d'amplitude inférieure comme suggéré par les analyses des références [135, 189]. Dans le cas d'un transfert des modes entropiques vers le mode adiabatique hors de l'horizon – un aspect générique des modèles multichamp comme on l'a vu au chapitre 4 – ceci altère bien évidemment le spectre de puissance de la perturbation de courbure mais également le bispectre primordial. Se concentrant sur les non-linéarités d'origine quantique générées à la traversée de l'horizon, nous avons montré que leur dépendance géométrique est exactement la même que dans le cas à un champ (7.51), mais que leur amplitude $f_{NL}^{\rm eq}$ est *diminuée* par les effets du transfert entropique

$$f_{NL}^{\rm eq,DBImulti} = -\frac{35}{108}\frac{1}{c_{s*}^2}\frac{1}{1+T_{\mathcal{RS}}^2} \tag{8.3}$$

où $T_{\mathcal{RS}}$ quantifie le transfert des modes entropiques vers le mode adiabatique : $\mathcal{P}_{\mathcal{R}} = (1+T_{\mathcal{RS}}^2)\mathcal{P}_*$ avec $\mathcal{P}_*$ évalué à la traversée de l'horizon (*c.f.* la sous-section 4.2.4). Ce résultat est particulièrement important car, comme on l'a décrit au chapitre précédent, les modèles les plus simples d'inflation DBI à un champ génèrent des non-gaussianités équilatérales d'amplitude supérieure aux bornes observationnelles. Intuitivement, on pourrait s'attendre à ce que les non-linéarités des différents champs s'ajoutent et que l'inflation DBI multichamp génère plus de non-gaussianités que son homologue à un champ. Il est vrai que la fonction à trois points de la perturbation de courbure $\mathcal{R}$ est amplifiée par rapport au cas à un champ, par un facteur $1+T_{\mathcal{RS}}^2$. Cependant, le spectre l'est également par la même quantité et la fonction f_{NL} (5.3) est, par définition, donnée par le rapport entre le bispectre et le carré du spectre primordial, d'où la diminution de $f_{NL}^{\rm eq}$. Précisons que ces résultats, ainsi que le formalisme développé dans les références [237, 238], sont complètement généraux, dans le sens où ils sont valables pour tout potentiel, toute métrique (facteur de déformation et métrique de l'espace de Calabi-Yau) et tout mouvement de la

brane dans les six dimensions compactes. Un aspect plus technique enfin : la contribution naïve à la masse effective des fluctuations entropiques, donnée par la dérivée seconde du potentiel dans ces directions, est en fait multipliée par la vitesse du son c_s. Cela implique qu'à potentiel égal, il est plus facile de générer des fluctuations entropiques dans le régime relativiste que dans le régime de roulement lent.

L'inflation de type Dirac-Born-Infeld à un champ a reçu énormément d'attention comme scénario prototype de k-inflation, inspiré par la théorie des cordes et générant d'importantes non-gaussianités. Suite aux travaux [48, 265, 53, 328] cependant, il est apparu que les modèles originaux, ultraviolets, ne peuvent simultanément vérifier les contraintes microphysiques internes à la théorie des cordes et reproduire les données cosmologiques, du fait de l'amplitude élevée des non-gaussianités équilatérales qu'ils génèrent. Le fait que celle-ci soit de manière générique diminuée par les effets multichamps, contrairement aux affirmations antérieures de la littérature, est donc extrêmement important. L'inflation DBI multichamp est d'ailleurs devenu depuis notre travail [237] un sujet de recherche particulièrement actif (*c.f.* la sous-section 8.4). De manière plus générale, l'inflation DBI multichamp illustre le fait que la cosmologie cordiste donne lieu à des actions effectives quadridimensionnelles beaucoup plus complexes que ce que des considérations phénoménologiques basées sur la simplicité pourraient dicter et a ouvert la voie à l'étude des modèles d'inflation multichamp avec des termes cinétiques non-standard.

8.1.2 Article court

Nous reproduisons à présent l'article [237] publié en 2008 par D. Langlois, D.A. Steer, T. Tanaka et moi-même (S. R-P) dans *Physical Review Letters (PRL)* et intitulé *"Primordial Fluctuations and Non-Gaussianities in Multifield Dirac-Born-Infeld inflation"*.

Primordial Fluctuations and Non-Gaussianities in Multifield Dirac-Born-Infeld Inflation

David Langlois,[1] Sébastien Renaux-Petel,[1] Danièle A. Steer,[1,2] and Takahiro Tanaka[3]
[1]*APC, UMR 7164, 10 rue Alice Domon et Léonie Duquet,75205 Paris Cedex 13, France*
[2]*CERN Physics Department, Theory Division, CH-1211 Geneva 23, Switzerland*
[3]*Yukawa Institute for Theoretical Physics, Kyoto University, Kyoto, 606-8502, Japan*
(Received 9 May 2008; published 7 August 2008)

We study Dirac-Born-Infeld inflation models with multiple scalar fields. We show that the adiabatic and entropy modes propagate with a common effective sound speed and are thus amplified at the sound horizon crossing. In the small sound speed limit, we find that the amplitude of the entropy modes is much higher than that of the adiabatic modes. We show that this could strongly affect the observable curvature power spectrum as well as the amplitude of non-Gaussianities, although their shape remains as in the single-field Dirac-Born-Infeld case.

DOI: 10.1103/PhysRevLett.101.061301 PACS numbers: 98.80.Cq

The past decade has seen an accumulation of cosmological data of increasing precision. Together with future experiments planned to measure the cosmic microwave background (CMB) fluctuations with yet further accuracy, we may be able to piece together more clues about early Universe physics. In parallel with this observational effort, there has been tremendous progress in recent years in the construction of early Universe models in the framework of high energy physics and string theory.

A particularly interesting class of models based on string theory is known as Dirac-Born-Infeld (DBI) inflation [1,2], associated with the motion of a D3-brane in a higher-dimensional background spacetime. The characteristic of DBI inflation, and that which gives it its name, is that the action is of the Dirac-Born-Infeld type and thus contains nontrivial kinetic terms. Most studies of DBI inflation models (or even of string-based inflationary models) have so far concentrated on a single-field description meaning, in the DBI case, that the inflaton corresponds to a radial coordinate of the brane in the extra dimensions. Taking into account the "angular" coordinates of the brane naturally leads to a multifield description since each brane coordinate in the extra dimensions gives rise to a scalar field from the effective four-dimensional point of view. This setup has started to be explored only very recently [3,4].

In this Letter, we show that the multifield DBI action contains some terms, higher order in spacetime gradients and vanishing in the homogeneous case, which have been overlooked. The inclusion of these terms leads to drastic consequences on the primordial fluctuations generated in these types of models. The scalar-type perturbations in multifield models can be divided into (instantaneous) adiabatic modes, fluctuations along the trajectory in field space, and entropy modes which are orthogonal to the former [5]. In contrast with previous expectations, we show that, in DBI models, these two classes of modes propagate with the same speed, namely, an effective speed of sound c_s smaller than the speed of light. As a consequence, the amplification of quantum fluctuations occurs at the sound horizon crossing for both types of modes. Moreover, when $c_s \ll 1$, this leads to an enhancement of the amplitude of the entropy modes with respect to that of the usual adiabatic modes. As primordial non-Gaussianities—potentially detectable in forthcoming experiments if strong enough—discriminate between various models, we also study the impact of the entropy modes on non-Gaussianity in the DBI case.

Our starting point is the DBI Lagrangian governing the dynamics of a D3-brane:

$$L_{\rm DBI} = -\frac{1}{f}\sqrt{-\det(g_{\mu\nu} + fG_{IJ}\partial_\mu\phi^I\partial_\nu\phi^J)}, \qquad (1)$$

where $f = f(\phi^I)$ is a function of the scalar fields ϕ^I ($I = 1, 2, \ldots$) and $G_{IJ}(\phi^K)$ is a metric in field space. From a higher-dimensional point of view, (1) is proportional to the square root of the determinant of the induced metric on the brane, meaning that the ϕ^I correspond to the brane coordinates in the extra dimensions, f embodies the warp factor, and G_{IJ} is (up to a rescaling) the metric in the extra dimensions. We also allow for the presence of a potential and hence consider a full action of the form

$$S = \int d^4x\sqrt{-g}\left[\frac{\mathcal{R}}{2} + P\right],$$
$$P = -\frac{1}{f(\phi^I)}(\sqrt{\mathcal{D}} - 1) - V(\phi^I), \qquad (2)$$

where we have set $8\pi G = 1$. The determinant $\mathcal{D} = \det(\delta^\mu_\nu + fG_{IJ}\partial^\mu\phi^I\partial_\nu\phi^J)$ coming from Eq. (1) can be rewritten as

$$\begin{aligned}\mathcal{D} &= \det(\delta^J_I - 2fX^J_I)\\ &= 1 - 2fG_{IJ}X^{IJ} + 4f^2X^{[I}_I X^{J]}_J - 8f^3X^{[I}_I X^J_J X^{K]}_K\\ &\quad + 16f^4X^{[I}_I X^J_J X^K_K X^{L]}_L,\end{aligned} \qquad (3)$$

where we have defined

$$X^{IJ} \equiv -\tfrac{1}{2}\partial^\mu\phi^I\partial_\mu\phi^J, \qquad X^J_I = G_{IK}X^{KJ}, \qquad (4)$$

and where the brackets denote antisymmetrization of the field indices. In the *single-field* case ($I = 1$), the terms in

 © 2008 The American Physical Society

f^2, f^3, and f^4 in (3) vanish. This is also true for multiple homogeneous scalar fields for which $X^{IJ} = \frac{1}{2}\dot{\phi}^I\dot{\phi}^J$. However, for multiple inhomogeneous scalar fields, these terms, which are higher order in gradients and have not been considered in previous works, do not vanish. We now show that they change drastically the behavior of perturbations.

In order to study the dynamics of linear perturbations about a homogeneous cosmological solution, we expand the initial action (2) to second order in the linear perturbations, including both metric and scalar field perturbations. This is a constrained system, and the number of (scalar) degrees of freedom is the same as the number of scalar fields. It is convenient to express these degrees of freedom in terms of the scalar field perturbations defined in the flat gauge, usually denoted Q^I. To obtain the second-order action, we follow the procedure outlined in Ref. [6] for a Lagrangian of the form $P(X, \phi^J)$, with $X = G_{IJ}X^{IJ}$. As we have stressed above, the multifield DBI Lagrangian is not of this form, but despite that it can be rewritten as

$$\tilde{P}(\tilde{X}, \phi^K) = -\frac{1}{f}(\sqrt{1 - 2f\tilde{X}} - 1) - V, \tag{5}$$

where $\tilde{X} = (1 - \mathcal{D})/(2f)$ [see Eq. (3)]. Although in the homogeneous background $\tilde{X}$ and X coincide, their perturbed values differ. Taking into account the corresponding extra terms, one can show [7] that the second-order action can be written in the compact form

$$S_{(2)} = \frac{1}{2}\int dt\, d^3x\, a^3\Big[\tilde{P}_{,\tilde{X}}\tilde{G}_{IJ}\mathcal{D}_tQ^I\mathcal{D}_tQ^J - \frac{c_s^2}{a^2}\tilde{P}_{,\tilde{X}}\tilde{G}_{IJ}\partial_iQ^I\partial^iQ^J - \mathcal{M}_{IJ}Q^IQ^J + 2\tilde{P}_{,\tilde{X}J}\dot{\phi}_IQ^J\mathcal{D}_tQ^I\Big]. \tag{6}$$

Here a is the cosmological scale factor; the effective (squared) mass matrix is

$$\mathcal{M}_{IJ} = -\mathcal{D}_I\mathcal{D}_J\tilde{P} - \tilde{P}_{,\tilde{X}}\mathcal{R}_{IKLJ}\dot{\phi}^K\dot{\phi}^L + \frac{X\tilde{P}_{,\tilde{X}}}{H}(\tilde{P}_{,\tilde{X}J}\dot{\phi}_I + \tilde{P}_{,\tilde{X}I}\dot{\phi}_J) + \frac{\tilde{X}\tilde{P}^3_{,\tilde{X}}}{2H^2}\Big(1 - \frac{1}{c_s^2}\Big)\dot{\phi}_I\dot{\phi}_J - \frac{1}{a^3}\mathcal{D}_t\Big[\frac{a^3}{2H}\tilde{P}^2_{,\tilde{X}}\Big(1 + \frac{1}{c_s^2}\Big)\dot{\phi}_I\dot{\phi}_J\Big], \tag{7}$$

and we have introduced covariant derivatives $\mathcal{D}_I$ defined with respect to the field space metric G_{IJ}, as well as the time covariant derivative $\mathcal{D}_tQ^I \equiv \dot{Q}^I + \Gamma^I_{JK}\dot{\phi}^JQ^K$, where Γ^I_{JK} is the Christoffel symbol constructed from G_{IJ} and $\mathcal{R}_{IKLJ}$ is the corresponding Riemann tensor. Finally, we have defined the (background) matrix

$$\tilde{G}_{IJ} = G_{IJ} + \frac{2fX}{1 - 2fX}e_{\sigma I}e_{\sigma J} = \perp_{IJ} + \frac{1}{c_s^2}e_{\sigma I}e_{\sigma J}, \tag{8}$$

where $e^I_\sigma = \dot{\phi}^I/\sqrt{2X}$ ($\dot{\sigma} \equiv \sqrt{2X}$ is also used in the following) is the unit vector pointing along the trajectory in field space, $\perp_{IJ} \equiv G_{IJ} - e_{\sigma I}e_{\sigma J}$ is the projector orthogonal to the vector e^I_σ, and

$$c_s^2 \equiv \frac{\tilde{P}_{,\tilde{X}}}{\tilde{P}_{,\tilde{X}} + 2\tilde{X}\tilde{P}_{,\tilde{X}\tilde{X}}} = 1 - f\dot{\sigma}^2. \tag{9}$$

Let us stress that the only difference between action (6) and the corresponding expression in Ref. [6] is the term in spatial gradients, with coefficient $c_s^2\tilde{P}_{,\tilde{X}}\tilde{G}_{IJ}$ instead of $\tilde{P}_{,X}G_{IJ}$. This crucial difference implies that all perturbations, both adiabatic and entropic, propagate with the same speed of sound in multifield DBI inflation, in contrast with Refs. [3,4,6], where they have different speeds. Finally, one should recall that the above expressions apply to the DBI context where $\tilde{P}$ is given in (5) so that $\tilde{P}_{,\tilde{X}} = 1/c_s$.

For simplicity, let us now restrict our attention to two fields ($I = 1, 2$). The perturbations can then be decomposed into $Q^I = Q_\sigma e^I_\sigma + Q_s e^I_s$, where e^I_s, the unit vector orthogonal to e^I_σ, characterizes the entropy direction. [For N fields, the entropy modes would span an $(N-1)$-dimensional subspace in field space.] As in standard inflation, it is more convenient, after going to conformal time $\tau = \int dt/a(t)$, to work in terms of the canonically normalized fields

$$v_\sigma \equiv \frac{a}{c_s}\sqrt{\tilde{P}_{,\tilde{X}}}Q_\sigma, \qquad v_s \equiv a\sqrt{\tilde{P}_{,\tilde{X}}}Q_s. \tag{10}$$

Note that the adiabatic and entropy coefficients differ because $\tilde{G}_{IJ}$ is anisotropic. The equations of motion for v_σ and v_s then follow from the action (6), reexpressed in terms of the rescaled quantities (10). One finds

$$v_\sigma'' - \xi v_s' + \Big(c_s^2k^2 - \frac{z''}{z}\Big)v_\sigma - \frac{(z\xi)'}{z}v_s = 0, \tag{11}$$

$$v_s'' + \xi v_\sigma' + \Big(c_s^2k^2 - \frac{\alpha''}{\alpha} + a^2\mu_s^2\Big)v_s - \frac{z'}{z}\xi v_\sigma = 0, \tag{12}$$

where

$$\xi = \frac{a}{\dot{\sigma}\tilde{P}_{,\tilde{X}}c_s}[(1 + c_s^2)\tilde{P}_{,s} - c_s^2\dot{\sigma}^2\tilde{P}_{,\tilde{X}s}], \tag{13}$$

$$z = \frac{a\dot{\sigma}}{c_sH}\sqrt{\tilde{P}_{,\tilde{X}}}, \qquad \alpha = a\sqrt{\tilde{P}_{,\tilde{X}}}, \tag{14}$$

and μ_s^2 follows from the mass matrix (7) (see [6,7] for details). We will assume that the effect of the coupling ξ can be neglected when the scales of interest cross out the sound horizon, so that the two degrees of freedom are decoupled and the system can easily be quantized. In the slow-varying regime, where the time evolution of H, c_s, and $\dot{\sigma}$ is slow with respect to that of the scale factor, one gets $z''/z \simeq 2/\tau^2$ and $\alpha''/\alpha \simeq 2/\tau^2$. The solutions of (11) and (12) corresponding to the Minkowski-like vacuum on small scales are thus

$$v_{\sigma k} \simeq v_{sk} \simeq \frac{1}{\sqrt{2kc_s}}e^{-ikc_s\tau}\Big(1 - \frac{i}{kc_s\tau}\Big), \tag{15}$$

when μ_s^2/H^2 is negligible for the entropic modes (if

μ_s^2/H^2 is large, the entropic modes are suppressed). The power spectra for v_σ and v_s after sound horizon crossing therefore have the same amplitude $\mathcal{P}_v = (k^3/2\pi^2)|v_k|^2$. The power spectra for Q_σ and Q_s are thus

$$\mathcal{P}_{Q_\sigma} \simeq \frac{H^2}{4\pi^2 c_s \tilde{P}_{,\tilde{X}}}, \qquad \mathcal{P}_{Q_s} \simeq \frac{H^2}{4\pi^2 c_s^3 \tilde{P}_{,\tilde{X}}}, \tag{16}$$

evaluated at the sound horizon crossing. One recognizes the familiar result of k inflation for the adiabatic part [8,9], while for small c_s, the entropic modes are amplified with respect to the adiabatic modes: $Q_s \simeq Q_\sigma/c_s$.

These results can be reexpressed in terms of the comoving curvature perturbation $\mathcal{R} = (H/\dot{\sigma})Q_\sigma$ which is useful to relate the perturbations during inflation to the primordial fluctuations during the standard radiation era. We recover the usual single-field result for the power spectrum of $\mathcal{R}$ at the sound horizon crossing:

$$\mathcal{P}_{\mathcal{R}_*} \simeq \frac{H^4}{8\pi^2 c_s \tilde{X}\tilde{P}_{,\tilde{X}}} = \frac{H^2}{8\pi^2 \epsilon c_s}, \tag{17}$$

where $\epsilon = -\dot{H}/H^2 = \tilde{X}\tilde{P}_{,\tilde{X}}/H^2$ (the subscript $*$ indicates that the corresponding quantity is evaluated at the sound horizon crossing). It is then convenient to define an entropy perturbation $\mathcal{S} = c_s \frac{H}{\dot{\sigma}} Q_s$ such that $\mathcal{P}_{\mathcal{S}_*} \simeq \mathcal{P}_{\mathcal{R}_*}$. The power spectrum for the tensor modes is, as usual, governed by the transition at Hubble radius, and its amplitude $\mathcal{P}_\mathcal{T} = (2H^2/\pi^2)_{k=aH}$ is much smaller than the curvature amplitude for $c_s \ll 1$.

Leaving aside the possibility that the entropy modes during inflation lead directly to primordial entropy fluctuations that could be detectable in the CMB fluctuations (potentially correlated with adiabatic modes as discussed in Ref. [10]), we consider here only the influence of the entropy modes on the final curvature perturbation. Indeed, on large scales, the curvature perturbation can evolve in time in the multifield case, because of the entropy modes. This transfer from the entropic to the adiabatic modes depends on the details of the scenario and on the background trajectory in field space, but it can be parametrized by a transfer coefficient [11] which appears in the formal solution $\mathcal{R} = \mathcal{R}_* + T_{\mathcal{RS}}\mathcal{S}_*$ of the first-order evolution equations for $\mathcal{R}$ and $\mathcal{S}$ which follow from (11) and (12) in the slow-varying regime on large scales. Equivalently, one can define the "transfer angle" Θ by $\sin\Theta = T_{\mathcal{RS}}/\sqrt{1 + T_{\mathcal{RS}}^2}$ (so that $\Theta = 0$ if there is no transfer and $|\Theta| = \pi/2$ if the final curvature perturbation is mostly of entropic origin). This implies in particular that the final curvature power spectrum can be formally expressed as $\mathcal{P}_\mathcal{R} = (1 + T_{\mathcal{RS}}^2)\mathcal{P}_{\mathcal{R}_*} = \mathcal{P}_{\mathcal{R}_*}/\cos^2\Theta$. Therefore, the tensor to scalar ratio is given by

$$r \equiv \frac{\mathcal{P}_\mathcal{T}}{\mathcal{P}_\mathcal{R}} = 16\epsilon c_s \cos^2\Theta. \tag{18}$$

This expression combines the result of k inflation [9], where the ratio is suppressed by the sound speed c_s and that of standard multifield inflation [5].

We finally turn to primordial non-Gaussianities, whose detection would provide an additional window on the very early Universe. This aspect is especially important for DBI models since it is well known that (single-field) DBI inflation produces a (relatively) high level of non-Gaussianity for small c_s [2]. How, therefore, do the entropic modes, whose amplitude is much larger than that of the adiabatic fluctuations, affect the primordial non-Gaussianity? In the small c_s limit, one can estimate the dominant contribution by extracting from the third-order Lagrangian the analogue of the terms giving the dominant contribution in the single-field case, but including now the entropy components. These terms are [7]

$$S_{(3)}^{(\mathrm{main})} = \int dt d^3x \frac{a^3}{2c_s^5\dot{\sigma}}[\dot{Q}_\sigma^3 + c_s^2\dot{Q}_\sigma\dot{Q}_s^2] - \frac{a}{2c_s^3\dot{\sigma}}[\dot{Q}_\sigma(\nabla Q_\sigma)^2 - c_s^2\dot{Q}_\sigma(\nabla Q_s)^2 + 2c_s^2\dot{Q}_s\nabla Q_\sigma\nabla Q_s],$$

where we have replaced f by $1/\dot{\sigma}^2$ since, for $c_s \ll 1$, $f\dot{\sigma}^2 \simeq 1$. Following the standard procedure [12–14], one can compute the 3-point functions involving adiabatic and entropy fields. The purely adiabatic 3-point function is naturally the same as in single-field DBI [15,16]. The new contribution is

$$\begin{aligned}\langle Q_\sigma(\boldsymbol{k}_1)Q_s(\boldsymbol{k}_2)Q_s(\boldsymbol{k}_3)\rangle = -(2\pi)^3\delta\Big(\sum_i \boldsymbol{k}_i\Big)\frac{H^4}{4\sqrt{2c_s}\epsilon c_s^4}\frac{1}{(\prod_i k_i^3)K^3}[-2k_1^2k_2^2k_3^2 - k_1^2(\boldsymbol{k}_2\cdot\boldsymbol{k}_3)(2k_2k_3 - k_1K + 2K^2)\\ + k_3^2(\boldsymbol{k}_1\cdot\boldsymbol{k}_2)(2k_1k_2 - k_3K + 2K^2) + k_2^2(\boldsymbol{k}_1\cdot\boldsymbol{k}_3)(2k_1k_3 - k_2K + 2K^2)],\end{aligned} \tag{19}$$

where $K = \sum_i k_i$. By using $\mathcal{R} \approx \mathcal{A}_\sigma Q_{\sigma*} + \mathcal{A}_s Q_{s*}$, with $\mathcal{A}_\sigma = (H/\dot{\sigma})_*$ and $\mathcal{A}_s = T_{\mathcal{RS}}c_{s*}\mathcal{A}_\sigma$, one can express the 3-point function of the curvature perturbation $\mathcal{R}$, which is the observable quantity, in terms of the correlation functions of the scalar fields. We find

$$\begin{aligned}\langle\mathcal{R}(\boldsymbol{k}_1)\mathcal{R}(\boldsymbol{k}_2)\mathcal{R}(\boldsymbol{k}_3)\rangle &= (\mathcal{A}_\sigma)^3\langle Q_\sigma(\boldsymbol{k}_1)Q_\sigma(\boldsymbol{k}_2)Q_\sigma(\boldsymbol{k}_3)\rangle + \mathcal{A}_\sigma(\mathcal{A}_s)^2[\langle Q_\sigma(\boldsymbol{k}_1)Q_s(\boldsymbol{k}_2)Q_s(\boldsymbol{k}_3)\rangle + \text{perm.}]\\ &= (\mathcal{A}_\sigma)^3\langle Q_\sigma(\boldsymbol{k}_1)Q_\sigma(\boldsymbol{k}_2)Q_\sigma(\boldsymbol{k}_3)\rangle(1 + T_{\mathcal{RS}}^2),\end{aligned} \tag{20}$$

where we have implicitly assumed that the vectors $\boldsymbol{k}_i$ are of the same order of magnitude (so that the slowly varying background parameters are evaluated at about the same time). As we see, the above quantity depends on the symmetrized

version of the 3-point function (19), which has exactly the same shape as in single-field DBI. Note that the enhancement of the mixed correlation $\langle Q_\sigma Q_s Q_s \rangle$ by a factor of $1/c_s^2$ is compensated by the ratio between $\mathcal{A}_\sigma$ and $\mathcal{A}_s$ so that the adiabatic and mixed contributions in (20) are exactly of the same order. In principle, there are other contributions to the observable 3-point function, in particular, those coming from the 4-point function of the scalar fields, which can be reexpressed in terms of the power spectrum via Wick's theorem [17]. The amplitude of this contribution will depend on the specific models. We implicitly ignore them in the following.

The non-Gaussianity parameter $f_{\rm NL}$ is defined by

$$\langle \mathcal{R}(\boldsymbol{k}_1)\mathcal{R}(\boldsymbol{k}_2)\mathcal{R}(\boldsymbol{k}_3)\rangle = -(2\pi)^7 \delta\Big(\sum_i \boldsymbol{k}_i\Big)\Big[\frac{3}{10} f_{\rm NL}(\mathcal{P}_\mathcal{R})^2\Big] \times \frac{\sum_i k_i^3}{\prod_i k_i^3}, \tag{21}$$

from which we obtain, for the equilateral configuration,

$$f_{\rm NL}^{(3)} = -\frac{35}{108}\frac{1}{c_s^2}\frac{1}{1+T_{\mathcal{RS}}^2} = -\frac{35}{108}\frac{1}{c_s^2}\cos^2\Theta. \tag{22}$$

One can easily understand this result. The curvature power spectrum is amplified by a factor of $(1 + T_{\mathcal{RS}}^2)$ due to the feeding of curvature by entropy modes. Similarly, the 3-point correlation function for $\mathcal{R}$ resulting from the 3-point correlation functions of the adiabatic and entropy modes is enhanced by the same factor $(1 + T_{\mathcal{RS}}^2)$. However, since $f_{\rm NL}$ is roughly the ratio of the 3-point function with respect to the square of the power spectrum, one sees that $f_{\rm NL}$ is now reduced by the factor $(1 + T_{\mathcal{RS}}^2)$. The so-called UV model of DBI inflation is under strong observational pressure because it generates a high level of non-Gaussianities that exceed the experimental bound [18,19]. We stress that their reduction by multiple-field effects may be very important for model building.

We end by revisiting the consistency condition relating the non-Gaussianity of the curvature perturbation, the tensor to scalar ratio r, and the tensor spectral index $n_\mathcal{T} = -2\epsilon$, given in Ref. [20] for single-field DBI. In our case, substituting $f_{\rm NL}^{(3)} \simeq -\frac{1}{3}\frac{1}{c_s^2}\cos^2\Theta$ in (18) gives

$$r + 8n_\mathcal{T} = -r\Big(\sqrt{-3f_{\rm NL}^{(3)}}\cos^{-3}\Theta - 1\Big). \tag{23}$$

As we can can see from (22) and (23), violation of the standard inflation consistency relation [corresponding to a vanishing right-hand side in (23)] would be stronger in multifield DBI than in single-field DBI and thus easier to detect. In the multifield case, the consistency condition is only an inequality (unless Θ is observable when the entropy modes survive after inflation).

To summarize, we have shown that both adiabatic and entropy modes propagate with the same speed of sound c_s, in multifield DBI models. Both modes are thus amplified at the sound horizon crossing, with an enhancement of the entropy modes with respect to the adiabatic ones in the small c_s limit. The amplitude of the non-Gaussianities, which are important in DBI models, is also strongly affected by the entropy modes, although their shape remains as in the single-field case. All of these features are generic in any model governed by the multifield DBI action. The model-specific quantity (depending on the field metric, the warp factor, and the potential) is the transfer coefficient between the initial entropy modes and the final curvature perturbation between the time when the fluctuations cross out the sound horizon and the end of inflation. Recent analyses (see, e.g., [21]) in slightly different contexts show that this transfer can be very efficient, leading to a final curvature perturbation of entropic origin (as in the curvaton scenario). More generally, our results show that multifield effects, common in string theory-motivated inflation models, deserve close attention as the entropy modes produced could significantly affect the cosmological observable quantities.

We are grateful for a CNRS-JSPS grant.

[1] E. Silverstein and D. Tong, Phys. Rev. D **70**, 103505 (2004).
[2] M. Alishahiha, E. Silverstein, and D. Tong, Phys. Rev. D **70**, 123505 (2004).
[3] D. A. Easson, R. Gregory, D. F. Mota, G. Tasinato, and I. Zavala, J. Cosmol. Astropart. Phys. 02 (2008) 010.
[4] M. X. Huang, G. Shiu, and B. Underwood, Phys. Rev. D **77**, 023511 (2008).
[5] C. Gordon, D. Wands, B. A. Bassett, and R. Maartens, Phys. Rev. D **63**, 023506 (2000).
[6] D. Langlois and S. Renaux-Petel, J. Cosmol. Astropart. Phys. 04 (2008) 017.
[7] D. Langlois, S. Renaux-Petel, D. A. Steer, and T. Tanaka (to be published).
[8] C. Armendariz-Picon, T. Damour, and V. F. Mukhanov, Phys. Lett. B **458**, 209 (1999).
[9] J. Garriga and V. F. Mukhanov, Phys. Lett. B **458**, 219 (1999).
[10] D. Langlois, Phys. Rev. D **59**, 123512 (1999).
[11] D. Wands, N. Bartolo, S. Matarrese, and A. Riotto, Phys. Rev. D **66**, 043520 (2002).
[12] J. M. Maldacena, J. High Energy Phys. 05 (2003) 013.
[13] D. Seery and J. E. Lidsey, J. Cosmol. Astropart. Phys. 06 (2005) 003.
[14] D. Seery and J. E. Lidsey, J. Cosmol. Astropart. Phys. 09 (2005) 011.
[15] X. Chen, Phys. Rev. D **72**, 123518 (2005).
[16] X. Chen, M. x. Huang, S. Kachru, and G. Shiu, J. Cosmol. Astropart. Phys. 01 (2007) 002.
[17] D. H. Lyth and Y. Rodriguez, Phys. Rev. Lett. **95**, 121302 (2005).
[18] R. Bean, S. E. Shandera, S. H. Henry Tye, and J. Xu, J. Cosmol. Astropart. Phys. 05 (2007) 004.
[19] H. V. Peiris, D. Baumann, B. Friedman, and A. Cooray, Phys. Rev. D **76**, 103517 (2007).
[20] J. E. Lidsey and D. Seery, Phys. Rev. D **75**, 043505 (2007).
[21] Z. Lalak, D. Langlois, S. Pokorski, and K. Turzynski, J. Cosmol. Astropart. Phys. 07 (2007) 014.

8.1.3 Article long

Nous reproduisons à présent l'article [238] publié en 2008 par D. Langlois, D.A. Steer, T. Tanaka et moi-même (S. R-P) dans *Physical Review D (PRD)* et intitulé *"Primordial perturbations and non-Gaussianities in DBI and general multifield inflation"*.

PHYSICAL REVIEW D **78,** 063523 (2008)

Primordial perturbations and non-Gaussianities in DBI and general multifield inflation

David Langlois,[1,2] Sébastien Renaux-Petel,[1] Danièle A. Steer,[1,3] and Takahiro Tanaka[4]

[1]*APC (UMR 7164, CNRS, Université Paris 7), 10 Rue Alice Domon et Léonie Duquet, 75205 Paris Cedex 13, France*

[2]*IAP, 98bis Boulevard Arago, 75014 Paris, France*

[3]*CERN Physics Department, Theory Division, CH-1211 Geneva 23, Switzerland*

[4]*Yukawa Institute for Theoretical Physics, Kyoto University, Kyoto, 606-8502, Japan*

(Received 6 June 2008; published 15 September 2008)

We study cosmological perturbations in general inflation models with multiple scalar fields and arbitrary kinetic terms, with special emphasis on the multifield extension of Dirac-Born-Infeld (DBI) inflation. We compute the second-order action governing the dynamics of linear perturbations in the most general case. Specializing to DBI inflation, we show that the adiabatic and entropy modes propagate with a *common* effective sound speed and are thus amplified at sound horizon crossing. In the small sound speed limit, we find that the amplitude of the entropy modes is much higher than that of the adiabatic modes. We also derive, in the general case, the third-order action which is useful for studying primordial non-Gaussianities generated during inflation. In the DBI case, we compute the dominant contributions to non-Gaussianities, which depend on both the adiabatic and entropy modes.

DOI: 10.1103/PhysRevD.78.063523 PACS numbers: 98.80.Cq

I. INTRODUCTION

While inflation has become a standard paradigm with which to describe the physics of the very early Universe, the nature of the field(s) responsible for inflation remains an open question. The last few years have seen an intensive effort devoted to trying to connect string theory and inflation (for recent reviews, see e.g. [1–5]), with the hope that future cosmological observations, in particular, of the cosmic microwave background anisotropies, could detect some specific stringy signatures.

Of particular interest are scenarios based on the motion of a D-brane in a higher-dimensional spacetime. Since the dynamics of a D-brane is described by the Dirac-Born-Infeld (DBI) action, characterized by a nonstandard kinetic term, inflation can occur with steep potentials, in contrast with usual slow-roll inflation. In this sense, this scenario, called DBI inflation [6–9], belongs to the more general class of k-inflation models [10,11] characterized by a Lagrangian of the form $P(X, \phi)$, where $X = -\partial_\mu \phi \partial^\mu \phi/2$.

In DBI inflation, the effective four-dimensional scalar field corresponds to the radial position of a brane in a higher dimensional warped conical geometry. For simplicity, the other possible degrees of freedom of the brane, namely, the angular coordinates, are usually assumed to be frozen. Relaxing this assumption and allowing the brane to move in the angular directions (see e.g. [12–15]) leads to a multifield scenario, since each brane coordinate in the extra dimensions gives rise to a scalar field from the effective four-dimensional point of view.

Beyond the multifield extension of DBI inflation, it is interesting to study, in the spirit of k inflation, very general multifield Lagrangians of the form

$$P = P(X^{IJ}, \phi^K), \tag{1}$$

with

$$X^{IJ} \equiv -\tfrac{1}{2}\partial_\mu \phi^I \partial^\mu \phi^J, \tag{2}$$

where $I = 1, \ldots, N$ labels the multiple fields. (In the following we will adopt the implicit summation convention on both field and space-time indices.)

A more restrictive class of models consists of Lagrangians that depend on the global kinetic term $X = G_{IJ}X^{IJ}$ where the functions $G_{IJ}(\phi^K)$ are the components of some metric defined in field space [16]. While this simpler class of Lagrangians is enough to describe the *homogeneous* dynamics of multifield DBI inflation, it turns out that the full *inhomogeneous* dynamics *cannot* be described by such a Lagrangian, as we pointed out in [17] and show below in more detail.

The purpose of the present work is thus two-fold. Our first aim is to derive the equations governing cosmological perturbations in the generalized models of the form given in Eq. (1). Our second aim is to apply this general formalism to the multifield extension of the DBI scenario.

The structure of this paper is the following. In the next section, we first consider the multifield DBI action which motivates our subsequent study of the general formalism. In Sec. III we derive, in the general case, the field equations for the metric and for the scalar fields, after which we specialize to the homogeneous background. Section IV is devoted to the dynamics of the linear perturbations in the general case: we derive the second-order action and analyze the resulting equations of motion for the perturbations. We then focus, in Sec. V, on the specific example of the DBI action: we show that the adiabatic and entropy modes propagate with the same speed of sound c_s and we compute the second-order action for linear perturbations. For two-field DBI inflation we also compute the power spectra of the adiabatic and entropy modes. Finally in Sec. VI we

 © 2008 The American Physical Society

discuss non-Gaussianities. We first derive, in the general case, the third-order action for perturbations. We then limit our analysis to two-field DBI models, for which we compute the main contribution to non-Gaussianity in the limit of small c_s. We summarize our main results in the last section.

II. THE MULTIFIELD DBI ACTION

In this section we motivate our reasons for looking at Lagrangians of the general form $P(X^{IJ}, \phi^K)$ by showing, in particular, that multifield DBI inflation is described by a Lagrangian of this form. We also discuss the properties of the higher-order terms in derivatives which appear in the DBI Lagrangian.

Consider a D3-brane with tension T_3 evolving in a 10-dimensional geometry described by the metric

$$ds^2 = h^{-1/2}(y^K)g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu + h^{1/2}(y^K)G_{IJ}(y^K)dy^I dy^J \equiv H_{AB}dY^A dY^B \tag{3}$$

with coordinates $Y^A = \{x^\mu, y^I\}$, where $\mu = 0, \ldots, 3$ and $I = 1, \ldots, 6$ (the label I has been chosen in this way as below it will label the multiple effective scalar fields). The kinetic part of the DBI action,

$$L = -T_3\sqrt{-\det\gamma_{\mu\nu}} \tag{4}$$

depends on the determinant of the induced metric on the 3-brane,

$$\gamma_{\mu\nu} = H_{AB}\partial_\mu Y^A_{(b)}\partial_\nu Y^B_{(b)} \tag{5}$$

where the brane embedding is defined by the functions $Y^A_{(b)}(x^\mu)$, with the x^μ being the spacetime coordinates on the brane. In our case, they coincide with the first four bulk coordinates. On writing $Y^A_{(b)} = (x^\mu, \varphi^I(x^\mu))$, we find

$$\gamma_{\mu\nu} = h^{-1/2}(g_{\mu\nu} + hG_{IJ}\partial_\mu\varphi^I\partial_\nu\varphi^J), \tag{6}$$

which after substitution into (4) implies

$$L = -T_3h^{-1}\sqrt{-g}\sqrt{\det(\delta^\mu_\nu + hG_{IJ}\partial^\mu\varphi^I\partial_\nu\varphi^J)}. \tag{7}$$

Finally, in order to absorb the brane tension T_3, it is convenient to rescale in the following way:

$$f = \frac{h}{T_3}, \qquad \phi^I = \sqrt{T_3}\varphi^I. \tag{8}$$

As a result, in the following, we consider the DBI Lagrangian

$$P = -\frac{1}{f(\phi^I)}(\sqrt{\mathcal{D}} - 1) - V(\phi^I) \tag{9}$$

where

$$\mathcal{D} = \det(\delta^\mu_\nu + fG_{IJ}\partial^\mu\phi^I\partial_\nu\phi^J), \tag{10}$$

and where we have also included potential terms, which arise from the brane's interactions with bulk fields or other branes. From now on we let $I = 1, \ldots, N$.

One can express the above Lagrangian in (9) explicitly in terms of the X^{IJ} defined in (2), by rewriting $\mathcal{D}$, which is the determinant of a 4×4 matrix, as the determinant of an $N \times N$ matrix:

$$\mathcal{D} = \det(\delta^J_I - 2fX^J_I) \tag{11}$$

where

$$X^J_I = G_{IK}X^{KJ}. \tag{12}$$

Throughout this paper field indices will always be raised and lowered with the "field metric" $G_{IJ} = G_{IJ}(\phi^K)$. The equality between the expressions (10) and (11) for the determinant can be proved by using the identity $\det(\mathbf{Id} + \alpha) = \exp[\mathrm{Tr}(\ln(\mathbf{Id} + \alpha))]$ for the matrix α of components $\alpha^\mu_\nu = fG_{IJ}\partial^\mu\phi^I\partial_\nu\phi^J$. Indeed from Eq. (10) we have

$$\mathcal{D} = \exp[\mathrm{Tr}(\alpha) - \tfrac{1}{2}\mathrm{Tr}(\alpha^2) + \tfrac{1}{3}\mathrm{Tr}(\alpha^3) + \ldots], \tag{13}$$

and on noting that

$$\mathrm{Tr}\,(\alpha^n) = \mathrm{Tr}[(-2f\mathcal{X})^n] \tag{14}$$

where $\mathcal{X}$ represents the matrix of components X^J_I, one obtains the expression given in Eq. (11).

Another very useful expression for $\mathcal{D}$ can be obtained by computing directly the determinant in Eq. (10). As we show in Appendix A, this yields

$$\mathcal{D} = 1 - 2fG_{IJ}X^{IJ} + 4f^2X^{[I}_I X^{J]}_J - 8f^3X^{[I}_I X^J_J X^{K]}_K + 16f^4X^{[I}_I X^J_J X^K_K X^{L]}_L, \tag{15}$$

where the brackets denote antisymmetrization on the field indices. We note that, in four spacetime dimensions, Eq. (15) is automatically truncated at order f^4 even if the number of scalar fields is larger than 4 (see Appendix A). To use shorter notations, we will rewrite the above equation as

$$\mathcal{D} = 1 - 2f\tilde{X}, \tag{16}$$

with

$$\tilde{X} \equiv X + \mathcal{F}(X^{IJ}, \phi^K), \tag{17}$$

$$X \equiv G_{IJ}X^{IJ} \tag{18}$$

and where $\mathcal{F}(X^{IJ}, \phi^K)$ can be read from Eq. (15):

$$\mathcal{F}(X^{IJ}, \phi^K) = -2fX^{[I}_I X^{J]}_J + 4f^2X^{[I}_I X^J_J X^{K]}_K - 8f^3X^{[I}_I X^J_J X^K_K X^{L]}_L. \tag{19}$$

For a single field, $I = 1$, it is straightforward to see that $\mathcal{F}$ vanishes so that the determinant takes the familiar form $\mathcal{D} = 1 + f\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi$ (for $G_{11} = 1$). Similarly, for a multifield *homogeneous* configuration in which the scalar fields depend only on time and $X^{IJ} = \dot{\phi}^I\dot{\phi}^J/2$, one again finds

$\mathcal{F} = 0$ because of the antisymmetrization on field indices in Eq. (19). Thus in this case the determinant $\mathcal{D}$ reduces to

$$\bar{\mathcal{D}} = 1 - fG_{IJ}\dot{\phi}^I\dot{\phi}^J. \tag{20}$$

(In the following a bar denotes homogeneous background quantities.)

However, for *multiple inhomogeneous* scalar fields, the terms in $\mathcal{F}$, which are higher order in gradients and have not been considered in previous works, do not vanish: we will show later in this paper that they drastically change the behavior of perturbations. Furthermore, since they vanish in the homogeneous background, we expect them to modify only the terms in the perturbation equations which contain spatial derivatives. From this discussion we therefore see explicitly that the multifield DBI action does not depend only on $X = G_{IJ}X^{IJ}$ (as has been assumed in recent works on multifield DBI inflation [18,19]), but requires a general description of the form $P = P(X^{IJ}, \phi^K)$.

After this digression on the specific form of the multifield DBI Lagrangian, in the following section we return to the general Lagrangian given in Eq. (1).

III. FIELD EQUATIONS

We begin this section by deriving the equations of motion for the general action

$$S = \frac{1}{2}\int \mathrm{d}^4x\sqrt{-g}[{}^{(4)}R + 2P(X^{IJ}, \phi^K)], \tag{21}$$

where we have set $8\pi G = 1$. The energy-momentum tensor can be obtained by varying P with respect to the metric, and is given by

$$T^{\mu\nu} = Pg^{\mu\nu} + P_{\langle IJ\rangle}\partial^\mu\phi^I\partial^\nu\phi^J, \tag{22}$$

where we have defined

$$P_{\langle IJ\rangle} \equiv \frac{1}{2}\left(\frac{\partial P}{\partial X^{IJ}} + \frac{\partial P}{\partial X^{JI}}\right) = P_{\langle JI\rangle}. \tag{23}$$

We use this symmetrized derivative of the Lagrangian P with respect to X^{IJ} for the following reason: since X^{IJ} is symmetric in I and J, the explicit dependence of P on say X^{12} and X^{21} can vary depending on the chosen convention and the above definition avoids any ambiguity. The same notation will apply to the derivative of any arbitrary function which depends on X^{IJ}.

The equations of motion for the scalar fields follow from the variation of the action in Eq. (21) with respect to each scalar field. One finds

$$\frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_\mu(\sqrt{-g}P_{\langle IJ\rangle}\partial^\mu\phi^J) + P_{,I} = 0, \tag{24}$$

where $P_{,I}$ denotes a partial derivative with respect to ϕ^I.

Now we consider a spatially flat Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker geometry with metric

$$ds^2 = -dt^2 + a(t)^2d\mathbf{x}^2, \tag{25}$$

where t is cosmic time. Then the kinetic terms defined in Eq. (2) reduce to

$$X^{IJ} = \tfrac{1}{2}\dot{\phi}^I\dot{\phi}^J, \tag{26}$$

where a dot denotes a derivative with respect to t. From Eq. (22), the energy density can be expressed as

$$\rho = 2P_{\langle IJ\rangle}X^{IJ} - P \tag{27}$$

while the pressure is simply P, and the Friedmann equations are given by

$$H^2 = \tfrac{1}{3}(2P_{\langle IJ\rangle}X^{IJ} - P), \qquad \dot{H} = -X^{IJ}P_{\langle IJ\rangle}. \tag{28}$$

The equations of motion for the scalar fields Eq. (24) reduce to

$$a^{-3}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}(a^3P_{\langle IJ\rangle}\dot{\phi}^J) = P_{,I}. \tag{29}$$

On calculating the time derivative and taking into account the terms in $\ddot{\phi}^J$ contained in $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}P_{\langle IJ\rangle}$, the above equation can be rewritten as

$$(P_{\langle IJ\rangle} + P_{\langle IL\rangle,\langle JK\rangle}\dot{\phi}^L\dot{\phi}^K)\ddot{\phi}^J + (3HP_{\langle IJ\rangle} + P_{\langle IJ\rangle,K}\dot{\phi}^K)\dot{\phi}^J - P_{,I} = 0 \tag{30}$$

where, in analogy with Eq. (23), we have defined

$$P_{\langle IJ\rangle,\langle KL\rangle} \equiv \frac{1}{2}\left(\frac{\partial P_{\langle IJ\rangle}}{\partial X^{KL}} + \frac{\partial P_{\langle IJ\rangle}}{\partial X^{LK}}\right) = P_{\langle KL\rangle,\langle IJ\rangle}. \tag{31}$$

Finally we end this section by noting that were the Lagrangian to depend on the X^{IJ} *only* through $X = G_{IJ}X^{IJ}$, then one would define $\tilde{P}(X, \phi^K) = P(X^{IJ}, \phi^K)$ so that $P_{\langle IJ\rangle} = \tilde{P}_{,X}G_{IJ}$. In that case all the above expressions would reduce to those of [16].

IV. LINEAR PERTURBATIONS IN THE GENERAL CASE

In this section, we derive the second-order action governing the dynamics of the linear perturbations for the general action given in Eq. (21). As in [20], we use the Arnowitt-Deser-Misner (ADM) approach, and our calculations are very similar to those of [16], except that we work with the quantities X^{IJ} rather than X.

Starting from the metric in the ADM form

$$ds^2 = -N^2dt^2 + h_{ij}(dx^i + N^idt)(dx^j + N^jdt) \tag{32}$$

where N is the lapse and N^i the shift, the full action becomes

$$S = \frac{1}{2}\int \mathrm{d}^4x\sqrt{-g}({}^{(4)}R + 2P) = \frac{1}{2}\int \mathrm{d}t\mathrm{d}^3x\sqrt{h}\left[N^{(3)}R + \frac{1}{N}(-E^2 + E_{ij}E^{ij}) + 2NP\right] \tag{33}$$

where ${}^{(3)}R$ is the scalar curvature of the spatial metric h_{ij}

with h its determinant, and the symmetric tensor E_{ij}, defined by

$$E_{ij} = \tfrac{1}{2}\dot{h}_{ij} - D_{(i}N_{j)} \tag{34}$$

is proportional to the extrinsic curvature of the spatial slices (D_i denotes the spatial covariant derivative associated with the spatial metric h_{ij}).

The function $P = P(X^{IJ}, \phi^K)$ in Eq. (33) depends on the kinetic quantities X^{IJ}, which can be decomposed as

$$X^{IJ} = \frac{1}{2N^2} v^I v^J - \frac{1}{2} h^{ij} \partial_i \phi^I \partial_j \phi^J \tag{35}$$

with

$$v^J = \dot{\phi}^J - N^i \partial_i \phi^J. \tag{36}$$

We now work in the flat gauge so that spatial sections are flat, $h_{ij} = a^2(t)\delta_{ij}$ and ${}^{(3)}R = 0$. The Hamiltonian and momentum constraints, which follow from the variation of (33) with respect to the lapse and the shift are, respectively,

$$2(N^2 P - P_{\langle IJ\rangle} v^I v^J) + E^2 - E_{ij}E^{ij} = 0, \tag{37}$$

$$D_j\left[\frac{1}{N}(E^j_i - E\delta^j_i)\right] = \frac{1}{N} P_{\langle IJ\rangle} v^I \partial_i \phi^J. \tag{38}$$

To zeroth order (background), the Hamiltonian constraint simply gives the first Friedmann equation in Eq. (28), while the momentum constraint vanishes identically.

At first order in the scalar perturbations, we write

$$N = 1 + \delta N, \qquad N_i = \partial_i \psi, \qquad \phi^I = \bar{\phi}^I(t) + Q^I(t, \mathbf{x}) \tag{39}$$

where, from now on and when there is no ambiguity, we promptly drop the bars on all the unperturbed fields. Note that ψ is related to the standard Bardeen potential Ψ by

$$\Psi = -H\psi. \tag{40}$$

At linear order, the momentum constraint (38) gives

$$\delta N = \frac{1}{2H} P_{\langle IJ\rangle} \dot{\phi}^I Q^J. \tag{41}$$

The Hamiltonian constraint is more complicated, but a straightforward calculation yields

$$-2H\left(\frac{\partial^2 \psi}{a^2}\right) = 2A\delta N + B_{IJ}\dot{\phi}^J \dot{Q}^I + C_I Q^I \tag{42}$$

with

$$\begin{aligned} A &= P_{\langle IJ\rangle} X^{IJ} - P - 2X^{IJ}X^{KL}P_{\langle IJ\rangle,\langle KL\rangle}, \\ B_{IJ} &= P_{\langle IJ\rangle} + 2X^{KL}P_{\langle IJ\rangle,\langle KL\rangle}, \\ C_I &= -P_{,I} + 2P_{\langle KL\rangle,I}X^{KL}. \end{aligned} \tag{43}$$

Actually, this explicit expression for ψ is not necessary in order to derive the second-order action, as the terms involving ψ (coming from the matter and gravitational parts of the action) cancel each other. The scalar field perturbations are related to a useful geometrical quantity, namely, the comoving curvature perturbation $\mathcal{R}$ (see e.g. [21,22]). On using the standard definition of $\mathcal{R}$ which combines the metric perturbations with the perturbations of the momentum density for the Lagrangian $P = P(X^{IJ}, \phi^K)$, one obtains

$$\mathcal{R} = \left(\frac{H}{2P_{\langle IJ\rangle}X^{IJ}}\right) P_{\langle KL\rangle}\dot{\phi}^K Q^L. \tag{44}$$

After these preliminary steps, one can now expand the action (33) up to second order in the linear perturbations δN, ψ and Q^I. As mentioned earlier, the terms involving ψ cancel each other. On reexpressing δN in terms of the Q^I using the constraint (41), one obtains, after a long but straightforward calculation,

$$\begin{aligned} S_{(2)} = \frac{1}{2}\int \mathrm{d}t\mathrm{d}^3x a^3 [&(P_{\langle IJ\rangle} + 2P_{\langle MJ\rangle,\langle IK\rangle}X^{MK})\dot{Q}^I\dot{Q}^J \\ &- P_{\langle IJ\rangle}h^{ij}\partial_i Q^I \partial_j Q^J - \mathcal{M}_{KL}Q^K Q^L + 2\Omega_{KI}Q^K\dot{Q}^I] \end{aligned} \tag{45}$$

where the mass matrix is

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{KL} = &-P_{,KL} + 3X^{MN}P_{\langle NK\rangle}P_{\langle ML\rangle} \\ &+ \frac{1}{H}P_{\langle NL\rangle}\dot{\phi}^N[2P_{\langle IJ\rangle,K}X^{IJ} - P_{,K}] \\ &- \frac{1}{H^2}X^{MN}P_{\langle NK\rangle}P_{\langle ML\rangle}[X^{IJ}P_{\langle IJ\rangle} \\ &+ 2P_{\langle IJ\rangle,\langle AB\rangle}X^{IJ}X^{AB}] - \frac{1}{a^3}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{a^3}{H}P_{\langle AK\rangle}P_{\langle LJ\rangle}X^{AJ}\right) \end{aligned} \tag{46}$$

and the mixing matrix is

$$\Omega_{KI} = \dot{\phi}^J P_{\langle IJ\rangle,K} - \frac{2}{H}P_{\langle LK\rangle}P_{\langle MJ\rangle,\langle NI\rangle}X^{LN}X^{MJ}. \tag{47}$$

On denoting the coefficient of the kinetic parts in Eq. (45) by

$$K_{IJ} \equiv P_{\langle IJ\rangle} + 2P_{\langle MJ\rangle,\langle IK\rangle}X^{MK}, \tag{48}$$

we find that the equations of motion for the Q^I (in Fourier space) are

$$\begin{aligned} K_{IJ}\ddot{Q}^J + \frac{k^2}{a^2}P_{\langle IJ\rangle}Q^J + (\dot{K}_{IJ} + 3HK_{IJ} + \Omega_{JI} - \Omega_{IJ})\dot{Q}^J \\ + (\dot{\Omega}_{KI} + \mathcal{M}_{IK} + 3H\Omega_{KI})Q^K = 0. \end{aligned} \tag{49}$$

The propagation velocities can be deduced from the structure of the first two terms in the above equation. On assuming that K_{IJ} is invertible, the sound speeds correspond to the eigenvalues of the matrix of components $(K^{-1})^{IL}P_{\langle LJ\rangle}$ (recall that these are background quantities).

For a *single scalar field*, $P_{\langle IJ\rangle}$ reduces to $P_{,X}$, and it is easy to see that the kinetic coefficient in Eq. (48) is simply $K = P_{,X} + 2XP_{,XX}$ which can be identified with $\rho_{,X}$ according to the relation (27). Hence one recovers the familiar result [11] that the effective speed of sound is given by

$$c_s^2 = \frac{P_{,X}}{\rho_{,X}} = \frac{P_{,X}}{P_{,X} + 2XP_{,XX}} \quad \text{(single scalar field)}. \tag{50}$$

For *multiple fields* and in the particular case where the Lagrangian is a function of $X = G_{IJ}X^{IJ}$, i.e. $P = P(X, \phi^K)$, it has been shown in [16] (see also [18,19]) that the propagation matrix $(K^{-1})^{IL}P_{\langle LJ\rangle}$ becomes *anisotropic*: the perturbations along the field-space trajectory propagate with an effective speed of sound c_s, defined as in the single-field case above (50), whereas the perturbations orthogonal to the background trajectory propagate at the speed of light. In the next section, we examine what happens in multifield DBI inflation for which $P = P(X^{IJ}, \phi^K)$.

V. LINEAR PERTURBATIONS IN DBI INFLATION

We now focus on linear perturbations in the specific case of multifield DBI inflation for which the Lagrangian was derived in Sec. II:

$$P(X^{IJ}, \phi^K) = -\frac{1}{f(\phi^I)}(\sqrt{\mathcal{D}} - 1) - V(\phi^I), \tag{51}$$

where $\mathcal{D}$ is given in Eq. (11) or Eq. (15). According to Eq. (16), this Lagrangian can also be seen as a function of $\tilde{X}$, and it will be convenient later to use $\tilde{P}$ defined by

$$\begin{aligned} P(X^{IJ}, \phi^K) &\equiv \tilde{P}(\tilde{X}, \phi^K) \\ &= -\frac{1}{f(\phi^I)}(\sqrt{1 - 2f(\phi^I)\tilde{X}} - 1) - V(\phi^I). \end{aligned} \tag{52}$$

A. Propagation speed

Before considering the full dynamics of the linear perturbations, it is instructive to concentrate on their propagation speed. According to the general analysis given in the previous section, we simply need to calculate $P_{\langle IJ\rangle}$ as well as the matrix K_{IJ}, defined in Eq. (48).

To do so, it is convenient to use the form of the determinant given in Eq. (11), namely,

$$\mathcal{D} = \det(M), \qquad M_I^J \equiv \delta_I^J - 2fG_{IK}X^{KJ}. \tag{53}$$

In the homogeneous background, the components of the matrix M_I^J reduce to

$$\bar{M}_I^J = \delta_I^J - 2fXe_Ie^J, \tag{54}$$

when expressed in terms of $X = G_{IJ}X^{IJ}$ and of the unit vector in field space

$$e^I \equiv \frac{\dot{\phi}^I}{\sqrt{2X}}, \qquad e_I \equiv G_{IJ}e^J. \tag{55}$$

We will shortly need the inverse of the background matrix $\bar{M}$, denoted by $\tilde{G}$. Its components are given by

$$\tilde{G}_I^J = \delta_I^J + \frac{2fX}{1 - 2fX}e_Ie^J = \perp_I^J + \frac{1}{1 - 2fX}e_Ie^J \tag{56}$$

where, in the second equality, we have introduced the projector orthogonal to the vector e^I,

$$\perp_I^J = \delta_I^J - e_Ie^J. \tag{57}$$

Let us also define

$$c_s = \sqrt{1 - 2fX} = \bar{\mathcal{D}}^{1/2} \tag{58}$$

which, as we show below, is the propagation speed for *all* perturbations. Note that this definition coincides with that given in Eq. (50) for a single scalar field (on replacing $P(X, \phi^I)$ by $\tilde{P}(\tilde{X}, \phi^I)$ given in Eq. (52)), and that $\tilde{G}$ given in Eq. (56) can be rewritten as

$$\tilde{G}_I^J = \perp_I^J + \frac{1}{c_s^2}e_Ie^J. \tag{59}$$

Let us now compute $P_{\langle IJ\rangle}$. The identity $\delta\det(M) = \det(\bar{M})\mathrm{Tr}(\bar{M}^{-1}\delta M)\delta\det(M) = \det(\bar{M})\bar{M}^{-1}\delta M$ implies, using Eq. (58), that

$$\mathcal{D}_{\langle IJ\rangle} = -2fc_s^2\tilde{G}_{IJ}, \tag{60}$$

where $\tilde{G}_{IJ} = \tilde{G}_I^K G_{KJ}$. It then follows from Eq. (51) that

$$P_{\langle IJ\rangle} = -\frac{1}{2fc_s}\mathcal{D}_{\langle IJ\rangle} = c_s\tilde{G}_{IJ}, \tag{61}$$

where all quantities are evaluated on the background. For the matrix K_{IJ}, one needs the second derivative of P with respect with X^{IJ}. On using the second derivative of the determinant $\mathcal{D}$, which can be deduced from Appendix A, it is straightforward to obtain

$$P_{\langle IK\rangle,\langle JL\rangle} = fc_s(\tilde{G}_{IL}\tilde{G}_{KJ} + \tilde{G}_{IJ}\tilde{G}_{KL} - \tilde{G}_{IK}\tilde{G}_{JL}). \tag{62}$$

By noting that $X^{KL}\tilde{G}_{KL} = X/c_s^2$, the above equation together with Eq. (61) leads to

$$K_{IJ} \equiv P_{\langle IJ\rangle} + 2P_{\langle IK\rangle,\langle JL\rangle}X^{KL} = \frac{1}{c_s}\tilde{G}_{IJ} = \frac{1}{c_s^2}P_{\langle IJ\rangle}. \tag{63}$$

Hence we obtain the remarkable result that the propagation matrix is proportional to the identity matrix and that all perturbations propagate at the same speed, namely, the effective sound speed c_s defined in Eq. (58).

Intuitively one can understand this result as follows. Let us return to the DBI action in terms of the embedding of a brane in a higher dimensional spacetime, as discussed in Sec. II. The perturbations we have considered above can be seen as fluctuations of the brane position in the higher dimensional background. Since the brane action is the

world sheet volume, its fluctuations propagate at the speed of light from the higher dimensional point of view. From a 4-dimensional point of view, this translates into the speed of sound c_s as a consequence of time-dilation between the bulk time coordinate and the brane proper time (the Lorentz factor is $1/c_s$).

B. Second-order action for the perturbations

We now turn to the full dynamics of linear perturbations in multifield DBI inflation. In the second-order action (45), the mass and mixing terms could be determined by explicit substitution of P given in Eq. (51). Here, however, we follow a more direct route and extend the results of [16] (which were obtained for Lagrangians depending only on X). To do so, we use $\tilde{P}(\tilde{X}, \phi^I)$ defined in Eq. (52) and simply identify the new terms which appear because the DBI Lagrangian depends on $\tilde{X}$ rather than X.

Computation of the first- and second-order variations of $\tilde{X}$ gives (see Appendix B)

$$\begin{aligned} \delta^{(1)}\tilde{X} &= \delta^{(1)}X, \\ \delta^{(2)}\tilde{X} &= \delta^{(2)}X + fX \perp_{IJ} h^{ij}\partial_i Q^I \partial_j Q^J. \end{aligned} \tag{64}$$

With respect to the second-order action of [16], the extra term in Eq. (64) *only* modifies the spatial gradient term, while the rest of that action is unchanged. Hence, as in [16], we can rewrite the action in terms of covariant derivatives $\mathcal{D}_I$ defined with respect to the field-space metric G_{IJ}. This gives

$$\begin{aligned} S_{(2)} = \frac{1}{2}\int \mathrm{d}t\mathrm{d}^3x a^3 \Big[&\frac{1}{c_s}(\tilde{G}_{IJ}\mathcal{D}_t Q^I \mathcal{D}_t Q^J \\ &- c_s^2 \tilde{G}_{IJ} h^{ij}\partial_i Q^I \partial_j Q^J) - \tilde{\mathcal{M}}_{IJ} Q^I Q^J \\ &+ 2\frac{f_J X}{c_s^3}\dot{\phi}_I Q^J \mathcal{D}_t Q^I \Big], \end{aligned} \tag{65}$$

where we have substituted $\tilde{P}_{,\tilde{X}} = 1/c_s$ and $\tilde{P}_{,\tilde{X}J} = f_J X/c_s^3$ into the expression of [16], and introduced the time covariant derivative $\mathcal{D}_t Q^I \equiv \dot{Q}^I + \Gamma^I_{JK}\dot{\phi}^J Q^K$ where Γ^I_{JK} is the Christoffel symbol constructed from G_{IJ} (and $\mathcal{R}_{IKLJ}$ will denote the corresponding Riemann tensor). Finally the mass matrix which appears above, and which differs from $\mathcal{M}_{IJ}$ in Eq. (46), is

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{M}}_{IJ} &= -\mathcal{D}_I\mathcal{D}_J\tilde{P} - \tilde{P}_{,\tilde{X}}\mathcal{R}_{IKLJ}\dot{\phi}^K\dot{\phi}^L + \frac{X\tilde{P}_{,\tilde{X}}}{H}(\tilde{P}_{,\tilde{X}J}\dot{\phi}_I + \tilde{P}_{,\tilde{X}I}\dot{\phi}_J) + \frac{X\tilde{P}^3_{,\tilde{X}}}{2H^2}\left(1 - \frac{1}{c_s^2}\right)\dot{\phi}_I\dot{\phi}_J \\ &\quad - \frac{1}{a^3}\mathcal{D}_t\left[\frac{a^3}{2H}\tilde{P}^2_{,\tilde{X}}\left(1 + \frac{1}{c_s^2}\right)\dot{\phi}_I\dot{\phi}_J\right] \\ &= \mathcal{D}_I\mathcal{D}_J V - \frac{(1-c_s)^2}{2c_s}\frac{\mathcal{D}_I\mathcal{D}_J f}{f^2} - \frac{(1-c_s)^3(1+3c_s)}{4c_s^3}\frac{\mathcal{D}_I f\mathcal{D}_J f}{f^3} + 2\dot{H}\mathcal{R}_{IKLJ}e^K e^L + \frac{(1-c_s^2)^2}{2c_s^4 f^2 H}f_{,(I}\dot{\phi}_{J)} \\ &\quad + \frac{\dot{H}}{2H^2c_s^4}(1-c_s^2)\dot{\phi}_I\dot{\phi}_J - \frac{1}{a^3}\mathcal{D}_t\left[\frac{a^3}{2Hc_s^4}(1+c_s^2)\dot{\phi}_I\dot{\phi}_J\right] \end{aligned} \tag{66}$$

where in the second equality we have substituted the explicit DBI Lagrangian, and used $\dot{H} = -X/c_s$ as well as $c_s^2 = 1 - 2fX$.

C. Two-field DBI

We can gain a better intuition for the system of perturbations described by the action (65) by restricting our attention to a two-field system, $I = 1, 2$. Then one can unambiguously decompose perturbations into (instantaneous) adiabatic and entropic modes by projecting, respectively, parallel and perpendicular to the background trajectory in field space. In other words, we introduce the basis $\{e_\sigma, e_s\}$ where $e^I_\sigma = e^I$, and e^I_s is the entropy unit vector orthogonal to e^I_σ:

$$e^I_\sigma \equiv e^I, \qquad G_{IJ}e^I_s e^J_s = 1, \qquad G_{IJ}e^I_s e^J_\sigma = 0. \tag{67}$$

We also define

$$\dot{\sigma} \equiv \sqrt{2X}. \tag{68}$$

One can reformulate the background equations of motion Eq. (30) for DBI in terms of these quantities. The adiabatic component is

$$\ddot{\sigma} = c_s^2(c_s\tilde{P}_{,\sigma} - c_s\dot{\sigma}^2\tilde{P}_{,\tilde{X}\sigma} - 3H\dot{\sigma}), \tag{69}$$

whereas the entropy component gives the time variation of e^I_σ:

$$\mathcal{D}_t e^I_\sigma = \frac{c_s\tilde{P}_{,s}}{\dot{\sigma}}e^I_s. \tag{70}$$

In the above equations, $\tilde{P}$ is given in (52) and partial derivatives with respect to σ or s denote the projection of the field-space gradients along e^I_σ or e^I_s, respectively. For example, $\tilde{P}_{,\sigma} \equiv e^I_\sigma\tilde{P}_{,I}$ and $\tilde{P}_{;ss} \equiv e^I_s e^J_s\mathcal{D}_I\mathcal{D}_J\tilde{P}$.

On introducing the decomposition

$$Q^I = Q_\sigma e^I_\sigma + Q_s e^I_s, \tag{71}$$

the equations of motion for Q_σ and Q_s follow from Eqs. (65) and (66) (see [16]). For the adiabatic part one

finds

$$\ddot{Q}_\sigma + \left(3H - 3\frac{\dot{c}_s}{c_s}\right)\dot{Q}_\sigma + \left(\frac{c_s^2 k^2}{a^2} + \mu_\sigma^2\right)Q_\sigma = (\Xi Q_s)^\bullet - \left(\frac{(Hc_s^2)^\bullet}{Hc_s^2} - \frac{c_s \tilde{P}_{,\sigma}}{\dot{\sigma}}\right)\Xi Q_s, \tag{72}$$

where the coupling Ξ between the adiabatic and entropy components is

$$\Xi \equiv \frac{c_s}{\dot{\sigma}}[(1 + c_s^2)\tilde{P}_{,s} - c_s^2 \tilde{P}_{,\tilde{X}s}\dot{\sigma}^2] = -c_s\sqrt{\frac{f}{1 - c_s^2}}\left[\frac{(1 - c_s)^2}{f^2} f_{,s} + (1 + c_s^2)V_{,s}\right] \tag{73}$$

while the effective mass of the adiabatic modes can be written in the form

$$\mu_\sigma^2 \equiv -\frac{(\dot{\sigma}/H)^{\bullet\bullet}}{\dot{\sigma}/H} - \left(3H - 3\frac{\dot{c}_s}{c_s} + \frac{(\dot{\sigma}/H)^\bullet}{\dot{\sigma}/H}\right)\frac{(\dot{\sigma}/H)^\bullet}{\dot{\sigma}/H}. \tag{74}$$

The equation of motion for the entropy part can be expressed as

$$\ddot{Q}_s + \left(3H - \frac{\dot{c}_s}{c_s}\right)\dot{Q}_s + \left(\frac{c_s^2 k^2}{a^2} + \mu_s^2 + \frac{\Xi^2}{c_s^2}\right)Q_s = -\frac{\dot{\sigma}}{\dot{H}}\Xi\frac{k^2}{a^2}\Psi, \tag{75}$$

where the right-hand side depends on the Bardeen potential Ψ, introduced in Eq. (40), and which depends on Q_σ and Q_s through Eqs. (41) and (42). The effective mass appearing above is given by

$$\begin{aligned}\mu_s^2 &\equiv -c_s\tilde{P}_{;ss} + \frac{1}{2}\dot{\sigma}^2\mathcal{R}_G - \frac{\tilde{P}_{,s}^2}{\dot{\sigma}^2} + 2c_s^2\tilde{P}_{,\tilde{X}s}\tilde{P}_{,s} \\ &= c_s V_{;ss} - \frac{f}{1 - c_s^2}V_{,s}^2 - \frac{(1 - c_s)^3}{4(1 + c_s)f^3}f_{,s}^2 \\ &\quad - \frac{(2 + c_s)(1 - c_s)}{(1 + c_s)f}f_{,s}V_{,s} - \frac{(1 - c_s)^2}{2f^2}f_{;ss} \\ &\quad + \frac{1}{2}\dot{\sigma}^2\mathcal{R}_G.\end{aligned} \tag{76}$$

($\mathcal{R}_G$ is the scalar Riemann curvature in field space.) Note that in this form, Eq. (75) is useful on large scales when the right-hand side can be neglected—in this case one sees immediately that the entropy perturbation Q_s evolves independently of the adiabatic mode.

In order to study the quantum fluctuations of the system, it is convenient, after going to conformal time $\tau = \int dt/a(t)$, to work in terms of canonically normalized fields given by

$$v_\sigma = \frac{a}{c_s^{3/2}}Q_\sigma, \qquad v_s = \frac{a}{\sqrt{c_s}}Q_s. \tag{77}$$

Remarkably, in terms of these new variables, the second-order action (65) reduces to the very simple form

$$S_{(2)} = \frac{1}{2}\int d\tau d^3x\left\{v_\sigma'^2 + v_s'^2 - 2\xi v_\sigma' v_s - c_s^2[(\partial v_\sigma)^2 + (\partial v_s)^2] + \frac{z''}{z}v_\sigma^2 + \left(\frac{\alpha''}{\alpha} - a^2\mu_s^2\right)v_s^2 + 2\frac{z'}{z}\xi v_\sigma v_s\right\} \tag{78}$$

where a prime denotes a derivative with respect to conformal time. The coupling between v_σ and v_s depends on

$$\xi = \frac{a}{c_s}\Xi \tag{79}$$

and we have introduced the two background-dependent functions

$$z = \frac{a\dot{\sigma}}{Hc_s^{3/2}}, \qquad \alpha = \frac{a}{\sqrt{c_s}}. \tag{80}$$

This result is similar to that of [16], except for the spatial gradient terms which have the same coefficient c_s^2 for both the adiabatic and isocurvature perturbations. The equations of motion for v_σ and v_s are

$$v_\sigma'' - \xi v_s' + \left(c_s^2 k^2 - \frac{z''}{z}\right)v_\sigma - \frac{(z\xi)'}{z}v_s = 0, \tag{81}$$

$$v_s'' + \xi v_\sigma' + \left(c_s^2 k^2 - \frac{\alpha''}{\alpha} + a^2\mu_s^2\right)v_s - \frac{z'}{z}\xi v_\sigma = 0. \tag{82}$$

In the following we will assume that the time evolution of H, $\dot{\sigma}$ and c_s is very slow with respect to that of the scale factor, so that $z''/z \simeq \alpha''/\alpha \simeq 2/\tau^2$. Since τ varies from $-\infty$ to 0, the wavelength of a given mode is first inside the sound horizon (when $|kc_s\tau| \gg 1$) and then crosses out the sound horizon. As in standard inflation, the initial conditions for the perturbations are determined by choosing the familiar Minkowski-like vacuum on very small scales. Below, we consider in turn the quantization on subhorizon scales and then the classical evolution on large scales.

1. Quantization

For simplicity, we assume that the coupling ξ is very small when the scales of interest cross out the sound horizon, in which case one can quantize the 2 degrees of freedom independently and solve analytically the system (otherwise, one can resort to numerical integration by starting deep enough inside the sound horizon as in [23,24]). Furthermore we only work at tree level. Loop corrections to the power spectrum and higher n-point correlation functions may be important, and their contribution can be calculated following the arguments of [25,26]: we leave their estimation for future work. The amplification of the vacuum fluctuations at horizon cross-

ing is possible only for very light degrees of freedom. Consequently, if μ_s^2 is larger than H^2, this amplification is suppressed and there is no production of entropy modes. Interestingly we see from Eq. (76) that the term coming from the second derivative of the potential along the entropy direction is multiplied by the sound speed c_s, which implies that, with a similar potential, it is easier to generate entropy modes in DBI inflation than in standard slow-roll inflation. Moreover, the second and third terms in μ_s^2 are always negative and thus tend to destabilize the entropic direction. Below we assume that $|\mu_s^2|/H^2 \ll 1$.

Following the standard procedure (see e.g. [21] or [22]) one selects the positive frequency solutions of Eqs. (81) and (82), which correspond to the usual vacuum on very small scales:

$$v_{\sigma k} \simeq v_{sk} \simeq \frac{1}{\sqrt{2kc_s}} e^{-ikc_s\tau}\left(1 - \frac{i}{kc_s\tau}\right). \tag{83}$$

As a consequence, the power spectra for v_σ and v_s after sound horizon crossing have the same amplitude

$$\mathcal{P}_{v_\sigma} = \mathcal{P}_{v_s} = \frac{k^3}{2\pi^2}|v_{\sigma k}|^2 \simeq \frac{H^2a^2}{4\pi^2c_s^3}. \tag{84}$$

However, in terms of the initial fields Q_σ and Q_s, one finds, using (77),

$$\mathcal{P}_{Q_\sigma *} \simeq \frac{H^2}{4\pi^2}, \qquad \mathcal{P}_{Q_s *} \simeq \frac{H^2}{4\pi^2c_s^2}, \tag{85}$$

(the subscript $*$ indicates that the corresponding quantity is evaluated at sound horizon crossing $kc_s = aH$) which shows that, for small c_s, the entropic modes are *amplified* with respect to the adiabatic modes:

$$Q_{s*} \simeq \frac{Q_{\sigma *}}{c_s}. \tag{86}$$

In order to confront the predictions of inflationary models to cosmological observations, it is useful to rewrite the scalar field perturbations in terms of geometrical quantities, such as the comoving curvature perturbation. The latter is related to the adiabatic perturbation by the expression (44), which yields

$$\mathcal{R} = \frac{H}{\dot\sigma} Q_\sigma, \tag{87}$$

so that one recovers the usual *single-field* result [11] that the power spectrum for $\mathcal{R}$ at sound horizon crossing is given by

$$\mathcal{P}_{\mathcal{R}_*} = \frac{k^3}{2\pi^2}\frac{|v_{\sigma k}|^2}{z^2} \simeq \frac{H^4}{4\pi^2\dot\sigma^2} = \frac{H^2}{8\pi^2\epsilon c_s}, \tag{88}$$

where $\epsilon \equiv -\dot H/H^2$.

It is then convenient to define an entropy perturbation, which we denote $\mathcal{S}$, such that its power spectrum at sound horizon crossing is the same as that of the curvature perturbation:

$$\mathcal{S} = c_s \frac{H}{\dot\sigma} Q_s. \tag{89}$$

We thus have

$$\mathcal{P}_{\mathcal{R}_*} = \mathcal{P}_{\mathcal{S}_*} \equiv \mathcal{P}_*. \tag{90}$$

We stress that our convention for the definition of $\mathcal{S}$ is purely for convenience.

In contrast with the scalar perturbations, the tensor modes are, as usual, amplified at *Hubble radius* crossing. The amplitude of their power spectrum, given by

$$\mathcal{P}_{\mathcal{T}} = \left(\frac{2H^2}{\pi^2}\right)_{k=aH}, \tag{91}$$

is much smaller than the curvature amplitude in the small c_s limit.

2. Evolution on large scales

In order to determine the observational consequences of *single-field* inflation models, it is usually sufficient to evaluate the amplitude of the comoving curvature perturbation just after horizon crossing. The reason is that the comoving curvature perturbation is conserved on large scales for adiabatic perturbations, as is also the case for the curvature perturbation on uniform energy density hypersurfaces ζ, which coincides with $-\mathcal{R}$ on large scales. This property is simply a consequence of the conservation of the energy-momentum tensor [27] (this is also true for nonlinear perturbations [28–30]).

In contrast with the single-field case, the curvature perturbation generally evolves in time, even on large scales, in a multifield scenario [31] (see also [24] for a recent analysis with nonstandard kinetic terms). This can be interpreted as due to a transfer between the adiabatic and entropic modes, governed by the relation [16]

$$\dot{\mathcal{R}} = \frac{\Xi}{c_s}\mathcal{S} + \frac{H}{\dot H}\frac{c_s^2k^2}{a^2}\Psi. \tag{92}$$

Note that, whereas this relation might be useful during inflation, it is not always relevant, for example, at the end of inflation and during reheating where $\dot\sigma$ may temporarily vanish. The importance of the transfer depends on the specific model under consideration and can be computed analytically only in some simple cases.

On large scales the curvature-entropy evolution can be approximated by two equations of the form

$$\dot{\mathcal{R}} \approx \alpha H\mathcal{S}, \qquad \dot{\mathcal{S}} \approx \beta H\mathcal{S}, \tag{93}$$

where in the latter, we have neglected the second-order time derivative in Eq. (75). In our case, the coefficients α and β are given by

$$\alpha = \frac{\Xi}{c_s H}, \qquad \beta \simeq \frac{s}{2} - \frac{\eta}{2} - \frac{1}{3H^2}\left(\mu_s^2 + \frac{\Xi^2}{c_s^2}\right), \tag{94}$$

where we have introduced the slow-varying parameters

$$\eta = \frac{\dot{\epsilon}}{H\epsilon}, \qquad s = \frac{\dot{c}_s}{Hc_s}, \tag{95}$$

and kept only the leading order terms in the expression for β.

The system of Eqs. (93) can be formally integrated (see [32]) to yield

$$\begin{pmatrix} \mathcal{R} \\ \mathcal{S} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & T_{\mathcal{RS}} \\ 0 & T_{\mathcal{SS}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathcal{R} \\ \mathcal{S} \end{pmatrix}_* \tag{96}$$

with

$$\begin{aligned} T_{\mathcal{SS}}(t_*, t) &= \exp\left(\int_{t_*}^{t} \beta(t')H(t')\mathrm{d}t'\right), \\ T_{\mathcal{RS}}(t_*, t) &= \int_{t_*}^{t} \alpha(t')T_{\mathcal{SS}}(t_*, t')H(t')\mathrm{d}t'. \end{aligned} \tag{97}$$

Hence the (time-dependent) power spectra for the curvature perturbation, the entropy perturbation and the correlation between the two can be formally expressed as

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_{\mathcal{R}} &= (1 + T_{\mathcal{RS}}^2)\mathcal{P}_*, \qquad \mathcal{P}_{\mathcal{S}} = T_{\mathcal{SS}}^2 \mathcal{P}_*, \\ \mathcal{C}_{\mathcal{RS}} &\equiv \langle \mathcal{RS} \rangle = T_{\mathcal{RS}} T_{\mathcal{SS}} \mathcal{P}_*, \end{aligned} \tag{98}$$

(recall that $\mathcal{R}$ and $\mathcal{S}$ are implicitly assumed to be uncorrelated at sound horizon crossing).

An interesting question, which depends on the details of reheating and thus goes beyond the scope of the present work, is whether the entropy perturbation *during* inflation can be transferred to some entropy perturbations *after* inflation, i.e. in the radiation phase. If this is the case, then the primordial entropy fluctuations could be directly observable, with the interesting possibility that there could be a correlation between the adiabatic and entropy modes [33].

In any case, one can introduce the correlation angle Θ, defined by

$$\sin\Theta \equiv \frac{\mathcal{C}_{\mathcal{RS}}}{\sqrt{\mathcal{P}_{\mathcal{R}}}\sqrt{\mathcal{P}_{\mathcal{S}}}} \tag{99}$$

which can also be seen as a transfer angle, since

$$\sin\Theta = \frac{T_{\mathcal{RS}}}{\sqrt{1 + T_{\mathcal{RS}}^2}}. \tag{100}$$

If $\Theta = 0$ there is no transfer ($T_{\mathcal{RS}} = 0$), whereas if $|\Theta| = \pi/2$ ($T_{\mathcal{RS}} \gg 1$) the final curvature perturbation is mostly of entropic origin. The relationship between the curvature power spectrum at sound horizon crossing and its final value is thus

$$\mathcal{P}_{\mathcal{R}_*} = \mathcal{P}_{\mathcal{R}} \cos^2\Theta. \tag{101}$$

This implies, on using the tensor amplitude Eq. (91), that the tensor to scalar ratio is given by

$$r \equiv \frac{\mathcal{P}_{\mathcal{T}}}{\mathcal{P}_{\mathcal{R}}} = 16\epsilon c_s \cos^2\Theta. \tag{102}$$

Interestingly this expression combines the result of k inflation [11], where the ratio is suppressed by the sound speed c_s, and that of standard multifield inflation [32].

From the expression of the curvature power spectrum, one can compute the scalar spectral index in the slow-varying approximation. We obtain

$$\begin{aligned} n_{\mathcal{R}} &\equiv \frac{\mathrm{d}\ln\mathcal{P}_{\mathcal{R}}}{\mathrm{d}\ln k} = n_{\mathcal{R}_*} + H_*^{-1}\sin(2\Theta)\frac{\partial T_{\mathcal{RS}}}{\partial t^*} \\ &= n_{\mathcal{R}_*} - \alpha_* \sin(2\Theta) - 2\beta_* \sin^2\Theta \end{aligned} \tag{103}$$

with

$$n_{\mathcal{R}_*} - 1 = -2\epsilon_* - \eta_* - s_*, \tag{104}$$

and where we have used

$$H_*^{-1}\frac{\partial T_{\mathcal{SS}}}{\partial t^*} = -T_{\mathcal{SS}}\beta_*, \qquad H_*^{-1}\frac{\partial T_{\mathcal{RS}}}{\partial t^*} = -\alpha_* - T_{\mathcal{RS}}\beta_*. \tag{105}$$

The observable spectral index, given in Eq. (103), not only depends on the values of the various parameters at sound horizon crossing, but also on the transfer angle Θ.

VI. NON-GAUSSIANITIES

In the simplest models of inflation, primordial perturbations are characterized by a very small amount of non-Gaussianity [20]. However, other models, such as single-field DBI inflation, are expected to produce significant non-Gaussianity [34]. If ever detected, primordial non-Gaussianity would be a powerful discriminator between various early universe models. In order to study non-Gaussianities, one must analyze the perturbations beyond linear order. During inflation, primordial non-Gaussianities can arise from the quantum fluctuations at horizon crossing or, in the case of multifield inflation, from the classical nonlinear evolution on large scales (see e.g. [35,36]).

In this section, we concentrate on the primordial non-Gaussianity originating from the three-point function of the scalar field fluctuations, which is the main contribution in single-field DBI inflation. Its calculation requires the third-order action in perturbations. Below, we first consider the general case—that is models of the form (1)—and then specialize to DBI.

A. Third-order action: general case

We follow the standard approach which has been presented in [20,37–39], considering successively the third-order action from the Einstein-Hilbert term and then from the matter part. A similar calculation of the third-order

action can be found in [40], but only for the multifield Lagrangians of the form $P(X, \phi^K)$, where $X = \delta_{IJ}X^{IJ}$.

The third-order action coming from the gravitational part is the same as in the single-field case and is given by the expression

$$S^{(G)}_{(3)} = \frac{1}{2}\int \mathrm{d}t\mathrm{d}^3x a^3\Big\{-\frac{\delta N}{a^4}[(\partial_i\partial_j\psi)\partial^i\partial^j\psi - (\partial^2\psi)^2] + 4\frac{H}{a^2}\partial^2\psi(\delta N)^2 + 6H^2(\delta N)^3\Big\}, \tag{106}$$

where the relation between δN and the field perturbations given in Eq. (41) can be rewritten as

$$\delta N \equiv \mathcal{N}_A Q^A \tag{107}$$

with the (field-space) vector

$$\mathcal{N}_A = \frac{1}{2H}P_{\langle AB\rangle}\dot{\phi}^B. \tag{108}$$

By expanding systematically the matter part of the action up to third order, we finally find (intermediate steps can be found in Appendix C)

$$\begin{aligned} S^{(M)}_{(3)} &= \int \mathrm{d}t\mathrm{d}^3x a^3(\delta^{(3)}P + (\delta N)\delta^{(2)}P) \\ &= \int \mathrm{d}t\mathrm{d}^3x a^3\{(g_1)_{ABC}Q^AQ^BQ^C + (g_2)_{ABC}Q^AQ^B\dot{Q}^C \\ &\quad + (g_3)_{ABC}Q^A\dot{Q}^B\dot{Q}^C + (g_4)_{ABC}\dot{Q}^A\dot{Q}^B\dot{Q}^C \\ &\quad + (g_a)_{AB}Q^A\partial_jQ^B(\delta N^j) + (g_b)_{AB}\dot{Q}^A\partial_jQ^B(\delta N^j) \\ &\quad + (g_c)_{ABC}Q^A(h^{ij}\partial_iQ^B\partial_jQ^C) \\ &\quad + (g_d)_{ABC}\dot{Q}^A(h^{ij}\partial_iQ^B\partial_jQ^C)\} \end{aligned} \tag{109}$$

with

$$\begin{aligned} (g_1)_{ABC} &= \tfrac{1}{6}P_{,ABC} + \tfrac{1}{2}P_{,BC}\mathcal{N}_A - P_{\langle IJ\rangle}X^{IJ}\mathcal{N}_A\mathcal{N}_B\mathcal{N}_C \\ &\quad + P_{\langle IJ\rangle,B}X^{IJ}\mathcal{N}_A\mathcal{N}_C \\ &\quad - 4P_{\langle IJ\rangle,\langle KL\rangle}X^{IJ}X^{KL}\mathcal{N}_A\mathcal{N}_B\mathcal{N}_C \\ &\quad - X^{IJ}P_{\langle IJ\rangle,BC}\mathcal{N}_A + 2P_{\langle IJ\rangle,\langle KL\rangle,C}X^{IJ}X^{KL}\mathcal{N}_A\mathcal{N}_B \\ &\quad - \tfrac{4}{3}P_{\langle IJ\rangle,\langle KL\rangle,\langle MN\rangle}X^{IJ}X^{KL}X^{MN}\mathcal{N}_A\mathcal{N}_B\mathcal{N}_C, \end{aligned} \tag{110}$$

$$\begin{aligned} (g_2)_{ABC} &= 2H\mathcal{N}_A\mathcal{N}_B\mathcal{N}_C + \tfrac{1}{2}P_{\langle KC\rangle,AB}\dot{\phi}^K \\ &\quad + \mathcal{N}_A\dot{\phi}^K[5\mathcal{N}_BX^{IJ}P_{\langle IJ\rangle,\langle KC\rangle} - P_{\langle KC\rangle,B} \\ &\quad + 2\mathcal{N}_BX^{IJ}X^{NL}P_{\langle IJ\rangle,\langle NL\rangle,\langle KC\rangle} \\ &\quad - 2X^{IJ}P_{\langle IJ\rangle,\langle KC\rangle,B}], \end{aligned} \tag{111}$$

$$\begin{aligned} (g_3)_{ABC} &= -\tfrac{1}{2}\mathcal{N}_AP_{\langle BC\rangle} + \tfrac{1}{2}P_{\langle BC\rangle,A} - \mathcal{N}_A[3X^{IK}P_{\langle IB\rangle,\langle KC\rangle} \\ &\quad + X^{KL}P_{\langle BC\rangle,\langle KL\rangle}] - 2\mathcal{N}_AP_{\langle IJ\rangle,\langle KB\rangle,\langle MC\rangle}X^{IJ}X^{KM} \\ &\quad + P_{\langle IB\rangle,\langle KC\rangle,A}X^{IK}, \end{aligned} \tag{112}$$

$$(g_4)_{ABC} = \tfrac{1}{2}\dot{\phi}^MP_{\langle BC\rangle,\langle MA\rangle} + \tfrac{1}{3}X^{IK}\dot{\phi}^MP_{\langle IA\rangle,\langle KB\rangle,\langle MC\rangle}, \tag{113}$$

$$\begin{aligned} (g_a)_{AB} &= 2H\mathcal{N}_A\mathcal{N}_B + 2\mathcal{N}_AX^{KL}\dot{\phi}^IP_{\langle IB\rangle,\langle KL\rangle} \\ &\quad - \dot{\phi}^IP_{\langle IB\rangle,A}, \end{aligned} \tag{114}$$

$$(g_b)_{AB} = -P_{\langle AB\rangle} - 2X^{IK}P_{\langle IB\rangle,\langle KA\rangle}, \tag{115}$$

$$(g_c)_{ABC} = \mathcal{N}_AX^{KL}P_{\langle BC\rangle,\langle KL\rangle} - \tfrac{1}{2}P_{\langle BC\rangle,A} - \tfrac{1}{2}P_{\langle BC\rangle}\mathcal{N}_A, \tag{116}$$

$$(g_d)_{ABC} = -\tfrac{1}{2}\dot{\phi}^KP_{\langle BC\rangle,\langle KA\rangle}. \tag{117}$$

In order to get a flavor for the new effects which could arise in multifield inflation with *nonstandard* kinetic terms, it is instructive to compare the above terms with their counterparts in standard multifield inflation, such as studied in [38]. Substituting the standard matter Lagrangian

$$P = G_{IJ}X^{IJ} - V(\phi), \qquad G_{IJ} = \delta_{IJ}, \tag{118}$$

the above coefficients reduce to

$$\begin{aligned} &(g_1)_{ABC} = -\tfrac{1}{6}V_{,ABC} - \tfrac{1}{2}V_{,BC}\mathcal{N}_A - X\mathcal{N}_A\mathcal{N}_B\mathcal{N}_C, \\ &(g_2)_{ABC} = 2H\mathcal{N}_A\mathcal{N}_B\mathcal{N}_C, \qquad (g_3)_{ABC} = -\tfrac{1}{2}\mathcal{N}_AG_{BC}, \\ &(g_4)_{ABC} = 0, \qquad (g_a)_{AB} = 2H\mathcal{N}_A\mathcal{N}_B, \\ &(g_b)_{AB} = -G_{AB}, \qquad (g_c)_{ABC} = -\tfrac{1}{2}G_{BC}\mathcal{N}_A, \\ &(g_d)_{ABC} = 0. \end{aligned} \tag{119}$$

As we will see in the next subsection, the main contribution for DBI inflation will come precisely from the vertices associated with the coefficients g_4 and g_d, which do not exist for standard kinetic terms.

B. Non-Gaussianities in DBI inflation

Single-field DBI inflation is an inflationary model which naturally produces a (relatively) high level of non-Gaussianity in the small c_s limit, as shown in [7,41]. It is thus important to investigate how the amplitude and shape of primordial non-Gaussianities are modified in the multifield case [42,43].

Here, we will focus on the dominant contributions to the non-Gaussianities for $c_s \ll 1$, and therefore ignore the contributions coming from the gravitational part of the action, which are known to be subdominant. As in the single-field case, the dominant contributions come from the terms involving derivatives of P with respect to the X^{IJ}'s, because they are enhanced by negative powers of c_s with respect to the other terms. Moreover, terms containing $\mathcal{N}_A$ are suppressed in the slow-varying approximation. Indeed, if one compares, for example, the first term of g_c with g_d, one finds schematically

$$\frac{g_c}{Hg_d} \sim \frac{\dot{\sigma}^2}{H^2c_s}, \tag{120}$$

which is proportional to $\epsilon = -\dot{H}/H^2$ and thus small. Finally, the dominant contributions come from the following terms in $S_{(3)}$:

$$(g_4)_{IJK}\dot{Q}^I\dot{Q}^J\dot{Q}^K + (g_d)_{IJK}\dot{Q}^I h^{jk}\partial_j Q^J \partial_k Q^K. \quad (121)$$

On substituting the multifield DBI Lagrangian into the expressions given in Eqs. (113) and (117), the coefficients g_4 and g_d can be calculated explicitly (one needs the third derivative of P with respect to the X^{IJ}, which can be deduced from Appendix A).

In the two-field case, decomposing the fields in terms of their adiabatic and entropic components according to (71), as well as using (62), one finally finds that the relevant terms of the third-order action are given by

$$S_{(3)}^{(\mathrm{main})} = \int \mathrm{d}t\mathrm{d}^3x\Big\{\frac{a^3}{2c_s^5\dot{\sigma}}[(\dot{Q}_\sigma)^3 + c_s^2\dot{Q}_\sigma(\dot{Q}_s)^2] - \frac{a}{2c_s^3\dot{\sigma}}[\dot{Q}_\sigma(\nabla Q_\sigma)^2 - c_s^2\dot{Q}_\sigma(\nabla Q_s)^2 + 2c_s^2\dot{Q}_s\nabla Q_\sigma\nabla Q_s)]\Big\} \quad (122)$$

where we have used the fact that $f \simeq 1/\dot{\sigma}^2$ in the limit $c_s \ll 1$. All the terms which appear in Eq. (122) are of the same order of magnitude, since $Q_s \simeq Q_\sigma/c_s$ as we have seen earlier. Note that using X instead of $\tilde{X}$ in the DBI action (that is, neglecting the higher-order terms appearing in $\mathcal{F}$) would lead to a different third-order action.

Let us now compute the contribution of these vertices to the relevant three-point functions, by following the procedure outlined in detail in [37]. Working at leading order in the slow-varying regime, we use the adiabatic and entropic propagators defined by, respectively,

$$\langle Q_\sigma(0)Q_\sigma(\tau)\rangle = \frac{H^2}{2k^3}(1 - ikc_s\tau)\mathrm{e}^{ikc_s\tau}, \qquad \langle Q_s(0)Q_s(\tau)\rangle = \frac{H^2}{2k^3c_s^2}(1 - ikc_s\tau)\mathrm{e}^{ikc_s\tau}, \quad (123)$$

which correspond to the Fourier transforms of the Green functions, solutions of Eqs. (81) and (82) with $\xi = 0$ and $z''/z = \alpha''/\alpha = 2/\tau^2$. The calculation of the three-point functions involve time integrations and we assume that, as usual, the main contribution to these integrals comes from the period around horizon crossing [44], which enables us to extrapolate the integration bound to $\tau = 0$. We also implicitly ignore the correlations at different times between the adiabatic and entropy modes, since these are expected to be small if the coupling ξ is small. The quantities $\dot{\sigma}$ and c_s will be considered as constant in time in the integrals. Given these assumptions, the only integrals required are

$$\int_{-\infty}^0 \mathrm{d}\tau\mathrm{e}^{iKc_s\tau} = -\frac{i}{Kc_s}, \qquad \int_{-\infty}^0 \mathrm{d}\tau\tau\mathrm{e}^{iKc_s\tau} = \frac{1}{(Kc_s)^2}, \qquad \int_{-\infty}^0 \mathrm{d}\tau\tau^2\mathrm{e}^{iKc_s\tau} = \frac{2i}{(Kc_s)^3} \quad (124)$$

which have been computed by using the appropriate contour in the complex plane ($\tau \to -(\infty - i\epsilon)$).

The contributions to the three-point function $\langle Q_\sigma(\boldsymbol{k}_1)Q_\sigma(\boldsymbol{k}_2)Q_\sigma(\boldsymbol{k}_3)\rangle$ are, respectively,

$$(2\pi)^3\delta\Big(\sum_i \boldsymbol{k}_i\Big)\frac{3H^4}{2\sqrt{2c_s\epsilon}c_s^2}\frac{1}{\prod_i k_i^3}\frac{k_1^2k_2^2k_3^2}{K^3} \quad (125)$$

from the vertex proportional to $\dot{Q}_\sigma^3$ and

$$-(2\pi)^3\delta\Big(\sum_i \boldsymbol{k}_i\Big)\frac{H^4}{4\sqrt{2c_s\epsilon}c_s^2}\frac{1}{\prod_i k_i^3}\Big[k_1^2(\boldsymbol{k}_2\cdot\boldsymbol{k}_3)\Big(\frac{1}{K} + \frac{k_2+k_3}{K^2} + \frac{2k_2k_3}{K^3}\Big) + \text{perm.}\Big] \quad (126)$$

from the vertex proportional to $\dot{Q}_\sigma(\nabla Q_\sigma)^2$, where we have introduced $K \equiv k_1 + k_2 + k_3$ and used $\dot{\sigma} = H\sqrt{2\epsilon c_s}$. Summing these contributions, one thus finds

$$\langle Q_\sigma(\boldsymbol{k}_1)Q_\sigma(\boldsymbol{k}_2)Q_\sigma(\boldsymbol{k}_3)\rangle = -(2\pi)^3\delta\Big(\sum_i \boldsymbol{k}_i\Big)\frac{H^4}{4\sqrt{2c_s\epsilon}c_s^2} \times \frac{1}{\prod_i k_i^3K^3}[-6k_1^2k_2^2k_3^2 + k_3^2(\boldsymbol{k}_1\cdot\boldsymbol{k}_2) \times (2k_1k_2 - k_3K + 2K^2) + \text{perm.}] \quad (127)$$

where the "perm." indicate two other terms with the same structure as the last term but permutations of indices 1, 2 and 3). This is the standard result from single-field DBI inflation [41].

Let us now turn to the new terms which arise from the entropy fluctuations. They appear in the three-point function $\langle Q_\sigma(\boldsymbol{k}_1)Q_s(\boldsymbol{k}_2)Q_s(\boldsymbol{k}_3)\rangle$, with the contribution

$$(2\pi)^3\delta\Big(\sum_i \boldsymbol{k}_i\Big)\frac{H^4}{2\sqrt{2c_s\epsilon}c_s^4}\frac{1}{\prod_i k_i^3}\frac{k_1^2k_2^2k_3^2}{K^3} \quad (128)$$

from the vertex proportional to $\dot{Q}_\sigma\dot{Q}_s^2$, the contribution

$$(2\pi)^3\delta\Big(\sum_i \boldsymbol{k}_i\Big)\frac{H^4}{4\sqrt{2c_s\epsilon}c_s^4}\frac{1}{\prod_i k_i^3}k_1^2(\boldsymbol{k}_2\cdot\boldsymbol{k}_3) \times \Big(\frac{1}{K} + \frac{k_2+k_3}{K^2} + \frac{2k_2k_3}{K^3}\Big) \quad (129)$$

from the vertex proportional to $\dot{Q}_\sigma(\nabla Q_s)^2$ and finally the contribution

$$-(2\pi)^3\delta\Big(\sum_i \boldsymbol{k}_i\Big)\frac{H^4}{4\sqrt{2c_s\epsilon}c_s^4}\frac{1}{\prod_i k_i^3}\Big[k_3^2(\boldsymbol{k}_1\cdot\boldsymbol{k}_2) \times \Big(\frac{1}{K} + \frac{k_1+k_2}{K^2} + \frac{2k_1k_2}{K^3}\Big) + (k_2 \leftrightarrow k_3)\Big] \quad (130)$$

from the vertex proportional to $\dot{Q}_s\nabla Q_s\nabla Q_\sigma$.

Summing these three contributions, we find

$$\begin{aligned}\langle Q_\sigma(\boldsymbol{k}_1)Q_s(\boldsymbol{k}_2)Q_s(\boldsymbol{k}_3)\rangle = &-(2\pi)^3\delta\Big(\sum_i \boldsymbol{k}_i\Big)\frac{H^4}{4\sqrt{2c_s\epsilon}c_s^4}\\ &\times\frac{1}{\prod_i k_i^3 K^3}[-2k_1^2k_2^2k_3^2 - k_1^2(\boldsymbol{k}_2\cdot\boldsymbol{k}_3)\\ &\times(2k_2k_3 - k_1K + 2K^2)\\ &+ k_3^2(\boldsymbol{k}_1\cdot\boldsymbol{k}_2)(2k_1k_2 - k_3K + 2K^2)\\ &+ k_2^2(\boldsymbol{k}_1\cdot\boldsymbol{k}_3)(2k_1k_3 - k_2K + 2K^2)].\end{aligned} \tag{131}$$

As we will see below, the three-point function of the curvature perturbation depends on the symmetrized (with respect to permutations of the three wave vectors $\boldsymbol{k}_i$) version of this three-point function, and this has exactly the same shape as (127). Nevertheless, its amplitude is enhanced with respect to the purely adiabatic one by a factor of $1/c_s^2$.

Let us now relate the correlation function of the scalar fields to the three-point function of the curvature perturbation $\mathcal{R}$ which is the observable quantity. In order to do so, we use Eqs. (87), (89), and (96) to write

$$\mathcal{R} \approx \mathcal{A}_\sigma Q_{\sigma*} + \mathcal{A}_s Q_{s*} \tag{132}$$

with

$$\mathcal{A}_\sigma = \left(\frac{H}{\dot\sigma}\right)_*, \qquad \mathcal{A}_s = T_{\mathcal{RS}}\left(\frac{c_s H}{\dot\sigma}\right)_*. \tag{133}$$

Let us compute the three-point function for three wave vectors of comparable magnitude (so that the coefficients A_σ and A_s, which depend on the time at which the relevant scales cross the sound horizon, have approximately the same value). The two three-point functions of the fields we have calculated give the following contribution:

$$\begin{aligned}\langle\mathcal{R}(\boldsymbol{k}_1)\mathcal{R}(\boldsymbol{k}_2)\mathcal{R}(\boldsymbol{k}_3)\rangle^{(3)} &= (\mathcal{A}_\sigma)^3\langle Q_\sigma(\boldsymbol{k}_1)Q_\sigma(\boldsymbol{k}_2)Q_\sigma(\boldsymbol{k}_3)\rangle\\ &\quad + \mathcal{A}_\sigma(\mathcal{A}_s)^2(\langle Q_\sigma(\boldsymbol{k}_1)Q_s(\boldsymbol{k}_2)\\ &\quad \times Q_s(\boldsymbol{k}_3)\rangle + \text{perm.})\\ &= (\mathcal{A}_\sigma)^3\langle Q_\sigma(\boldsymbol{k}_1)Q_\sigma(\boldsymbol{k}_2)\\ &\quad \times Q_\sigma(\boldsymbol{k}_3)\rangle(1 + T_{\mathcal{RS}}^2)\end{aligned} \tag{134}$$

where the adiabatic three-point function is given in Eq. (127). Note that the enhancement of the mixed correlation $\langle Q_\sigma Q_s Q_s\rangle$ by a factor of $1/c_s^2$ is compensated by the ratio between $\mathcal{A}_\sigma$ and $\mathcal{A}_s$ so that the purely adiabatic and mixed contributions in (134) are exactly of the same order.

The superscript (3) in the above equation indicates that we take into account only the contribution from the three-point function of the scalar fields. One could also include the contribution from the four-point function of the scalar fields, which can be expressed in terms of the power spectra using Wick's theorem, and also from other higher-order terms. This has been done for instance in [35,36]. In the single-field DBI case, the corresponding contribution $f_{NL}^{(4)}$ is negligible compared to $f_{NL}^{(3)}$. Because of the transfer between adiabatic and entropic modes, this should be reconsidered in specific multifield models. Here we simply disregard these contributions though it should be borne in mind that they are present in principle.

Instead of the three-point function, it is now customary to use the non-Gaussianity parameter f_{NL} defined by

$$\langle\mathcal{R}(\boldsymbol{k}_1)\mathcal{R}(\boldsymbol{k}_2)\mathcal{R}(\boldsymbol{k}_3)\rangle = -(2\pi)^7\delta\Big(\sum_i \boldsymbol{k}_i\Big)\Big(\frac{3}{10}f_{NL}(\mathcal{P}_\mathcal{R})^2\Big) \times\frac{\sum_i k_i^3}{\prod_i k_i^3}. \tag{135}$$

From the relation between $\mathcal{P}_\mathcal{R}$ and $\mathcal{P}_{\mathcal{R}*}$ given in Eq. (101), we then obtain, for the equilateral configuration,

$$f_{NL}^{(3)} = -\frac{35}{108}\frac{1}{c_s^2}\frac{1}{1 + T_{\mathcal{RS}}^2} = -\frac{35}{108}\frac{1}{c_s^2}\cos^2\Theta. \tag{136}$$

One can easily understand this result. The curvature power spectrum is amplified by a factor of $(1 + T_{\mathcal{RS}}^2)$ due to the feeding of curvature by entropy modes. Similarly the three-point correlation function for $\mathcal{R}$ resulting from the three-point correlation functions of the adiabatic and entropy modes is enhanced by the same factor $(1 + T_{\mathcal{RS}}^2)$. However, since f_{NL} is roughly the ratio of the three-point function with respect to the *square* of the power spectrum, one sees that f_{NL} is now *reduced* by the factor $(1 + T_{\mathcal{RS}}^2)$. This may be important in confronting DBI models to observations [45,46].

We end by revisiting the consistency condition relating the non-Gaussianity of the curvature perturbation, the tensor to scalar ratio r, and the tensor spectral index $n_\mathcal{T} = -2\epsilon$, given in [47] for single-field DBI. In our case, substituting $f_{NL}^{(3)} \simeq -\frac{1}{3}\frac{1}{c_s^2}\cos^2\Theta$ in (102) gives

$$r + 8n_\mathcal{T} = -r\Big(\sqrt{-3f_{NL}^{(3)}}\cos^{-3}\Theta - 1\Big). \tag{137}$$

As we can see from (136) and (137), violation of the standard inflation consistency relation (corresponding to a vanishing right-hand side in (137)) would be stronger in multifield DBI than in single-field DBI, and thus easier to detect. In the multifield case the consistency condition is only an inequality, unless the entropy modes survive after inflation in which case Θ is potentially observable.

VII. CONCLUSIONS

In this paper we have studied cosmological perturbations in multifield inflation models for which the Lagrangian depends *a priori* on all the $N(N+1)/2$ kinetic terms that can be constructed by contracting the spacetime gradients of the N scalar fields. Our analysis can be seen as

the multifield extension of k inflation, and it also generalizes very recent papers which considered more restrictive Lagrangians of the form $P = P(X, \phi^K)$. In our very general framework, we have computed the second-order action which governs the dynamics of the linear perturbations, and were thus able to identify the propagation matrix whose eigenvalues correspond to the generalized propagation speeds.

We have argued that such a general framework is necessary in order to study multifield DBI inflation. In that model, we showed that all modes propagate with the same speed of sound c_s, and hence (if light) they are all amplified simultaneously at sound horizon crossing. However, because their respective canonically normalized functions differ, the result is that the entropy modes are *enhanced* with respect to the adiabatic modes: $Q_s \sim Q_\sigma/c_s$. If there is a subsequent transfer from the entropy modes into the curvature perturbation—a generic feature as soon as the trajectory in field space is nontrivial—the final amplitude of the curvature perturbation is significantly affected by the entropy modes.

We have also derived, in the general case, the third-order action from which one can compute the predictions for primordial non-Gaussianities. We have identified the vertices which appear in this action and expressed their coefficients in terms of the initial Lagrangian and its derivatives. In the DBI case, we have computed the dominant contributions to the non-Gaussianities of the curvature perturbation in the small c_s limit. If there is an entropy-curvature transfer, we have shown that the contribution from the entropy modes will increase the amplitude of the three-point function with respect to the single-field DBI prediction, but the shape of the non-Gaussianities remains exactly the same. Since the entropy modes enhance the curvature two-point and three-point functions by the same amount, it implies that the f_{NL} parameter, which is related to the three-point function divided by the square of the two-point function, is smaller than in the single-field case. The impact of the entropy modes can be expressed simply in terms of the entropy-curvature transfer coefficient, which is model-dependent. In the future, it would be interesting to study specific scenarios of DBI inflation and to estimate quantitatively this transfer coefficient.

ACKNOWLEDGMENTS

We would like to thank E. Babichev, P. Creminelli, G. Tasinato, K. Turzynski, F. Vernizzi for interesting discussions related to the topic of this paper. We would also like to thank the participants of the workshop "Cosmological frontiers in fundamental physics," and especially G. Shiu and E. Silverstein, for their useful questions and comments. We also acknowledge the support from a joint CNRS-JSPS grant. T. T. is supported by Monbukagakusho Grant-in-Aid for Scientific Research No. 17340075 and No. 19540285.

APPENDIX A: THE DBI LAGRANGIAN AND ITS DERIVATIVES

1. Calculation of the DBI determinant

The expression for $\mathcal{D}$ in Eq. (15) can be obtained from its definition in Eq. (10) on substituting into

$$\det(A) = -\frac{1}{4!}\epsilon_{\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4}\epsilon^{\beta_1\beta_2\beta_3\beta_4}A^{\alpha_1}{}_{\beta_1}A^{\alpha_2}{}_{\beta_2}A^{\alpha_3}{}_{\beta_3}A^{\alpha_4}{}_{\beta_4} \tag{A1}$$

the matrix of components

$$A^\alpha_\beta = \delta^\alpha_\beta + fB^\alpha_I B^I_\beta, \qquad B^\alpha_I \equiv G_{IJ}\partial^\alpha\phi^J, \qquad B^I_\beta \equiv \partial_\beta\phi^I. \tag{A2}$$

On using the identity

$$\epsilon_{\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4}\epsilon^{\alpha_1\ldots\alpha_j\beta_{j+1}\ldots\beta_4} = -(4-j)!j!\delta^{[\beta_{j+1}}_{\alpha_{j+1}}\ldots\delta^{\beta_4]}_{\alpha_4}, \tag{A3}$$

and the contractions $B^\alpha_I B^J_\alpha = -2G_{IK}X^{KJ}$, one finally gets the expression

$$\mathcal{D} = 1 - 2fG_{IJ}X^{IJ} + 4f^2X^{[I}_I X^{J]}_J - 8f^3X^{[I}_I X^J_J X^{K]}_K + 16f^4X^{[I}_I X^J_J X^K_K X^{L]}_L. \tag{A4}$$

If there are three scalar fields, the last term disappears because of the antisymmetrization over the field indices. For two scalar fields, the last two terms disappear; and for one scalar field, only the first two terms remain. For more than four scalar fields, the truncation at order f^4 is natural if one considers $\mathcal{D}$ as the determinant of a 4×4 matrix, but it is less obvious if one starts from the expression for $\mathcal{D}$ as the determinant of a $N\times N$ matrix, Eq. (11). However, this can be understood by noting that the term proportional to f^n is a sum of products involving n terms of the form $X^I_J = -B^I_\mu B^\mu_J/2$. If $n > 4$, among the n terms of the form B^I_μ, at least two have the same index μ because the spacetime index μ can only take four different values. Since, by definition of the determinant, all the field indices I are antisymmetrized, one thus finds that the term of order f^n necessarily vanishes.

2. Derivatives

In order to compute the derivatives of the DBI Lagrangian with respect to X^{IJ}, one can use the explicit expression for $\mathcal{D}$ given above in Eq. (A4). An alternative derivation, which is simpler, is to start from the identity

$$\mathcal{D} = \exp[\mathrm{Tr}\ln M] = \exp[\mathrm{Tr}\ln(\bar{M} + \delta M)] = \exp\{\mathrm{Tr}[\ln(\bar{M}) + \ln(\mathbf{Id} + \bar{M}^{-1}\delta M)]\}, \tag{A5}$$

where the components of M, given in (53), are decomposed into

$$\bar{M}^J_I = \delta^J_I - 2fG_{IK}\bar{X}^{KJ}, \qquad \delta M^J_I = -2fG_{IK}\delta X^{KJ}. \tag{A6}$$

Moreover the components of the matrix $(\bar{M})^{-1}$ are the $\tilde{G}^J_I$ given in Eq. (59).

Using (A5), the expansion of $\mathcal{D}^{1/2}$ in terms of the matrix $U = \bar{M}^{-1}\delta M$ yields

$$\begin{aligned}\mathcal{D}^{1/2} &= \bar{\mathcal{D}}^{1/2}\exp\Big[\tfrac{1}{2}\mathrm{Tr}(U) - \tfrac{1}{4}\mathrm{Tr}(U^2) + \tfrac{1}{6}\mathrm{Tr}(U^3) + \ldots\Big] \\ &= \bar{\mathcal{D}}^{1/2}[1 + \tfrac{1}{2}\mathrm{Tr}(U) - \tfrac{1}{4}\mathrm{Tr}(U^2) + \tfrac{1}{8}(\mathrm{Tr}U)^2 \\ &\quad + \tfrac{1}{6}\mathrm{Tr}(U^3) - \tfrac{1}{8}\mathrm{Tr}(U)\mathrm{Tr}(U^2) + \tfrac{1}{48}(\mathrm{Tr}U)^3 + \ldots].\end{aligned} \tag{A7}$$

Substituting in the above expression the components

$$U_I{}^J = -2f\tilde{G}_{IK}\delta X^{KJ} \tag{A8}$$

of the matrix U, one gets

$$\begin{aligned}\mathcal{D}^{1/2} = \bar{\mathcal{D}}^{1/2}\Big[&1 - f\tilde{G}_{IJ}\delta X^{IJ} - \frac{f^2}{2}(2\tilde{G}_{IL}\tilde{G}_{JK} \\ &- \tilde{G}_{IJ}\tilde{G}_{KL})\delta X^{IJ}\delta X^{KL} + f^3\Big(\tilde{G}_{IJ}\tilde{G}_{KM}\tilde{G}_{LN} \\ &- \frac{4}{3}\tilde{G}_{IN}\tilde{G}_{JK}\tilde{G}_{LM} - \frac{1}{6}\tilde{G}_{IJ}\tilde{G}_{KL}\tilde{G}_{MN}\Big) \\ &\times \delta X^{IJ}\delta X^{KL}\delta X^{MN}\Big].\end{aligned} \tag{A9}$$

By interpreting this relation as a Taylor expansion with respect to the variables X^{IJ}, one can obtain the derivatives of $\mathcal{D}^{1/2}$ and thus of the DBI Lagrangian with respect to the X^{IJ}, up to third order, as required for the computation of the non-Gaussianities.

APPENDIX B: VARIATIONS OF $\tilde{X}$ UP TO SECOND ORDER

The computation of the first- and second-order variations of $\tilde{X}$ follows from

$$\delta^{(1)}\tilde{X} = \delta^{(1)}X + \mathcal{F}_{\langle IJ\rangle}\delta^{(1)}X^{IJ} + \mathcal{F}_{,K}Q^K \tag{B1}$$

where

$$\delta^{(1)}X^{IJ} = \dot{\phi}^{(I}\dot{Q}^{J)} - \dot{\phi}^I\dot{\phi}^J\delta N, \tag{B2}$$

and also from

$$\begin{aligned}\delta^{(2)}\tilde{X} = \delta^{(2)}X &+ \mathcal{F}_{\langle IJ\rangle}\delta^{(2)}X^{IJ} + \tfrac{1}{2}\mathcal{F}_{\langle IJ\rangle,\langle KL\rangle}\delta^{(1)}X^{IJ}\delta^{(1)}X^{KL} \\ &+ \tfrac{1}{2}\mathcal{F}_{,KL}Q^KQ^L + \mathcal{F}_{\langle IJ\rangle,K}\delta^{(1)}X^{IJ}Q^K\end{aligned} \tag{B3}$$

where

$$\begin{aligned}\delta^{(2)}X^{IJ} &= \tfrac{1}{2}\dot{Q}^I\dot{Q}^J + \tfrac{3}{2}\dot{\phi}^I\dot{\phi}^J\delta N^2 + \dot{\phi}^{(I}\delta^{(2)}v^{J)} \\ &\quad - \tfrac{1}{2}h^{ij}\partial_iQ^I\partial_jQ^J - 2\dot{\phi}^{(I}\dot{Q}^{J)}\delta N.\end{aligned} \tag{B4}$$

From the explicit expression for $\mathcal{F}$ in Eq. (19), we immediately see that its antisymmetric structure implies that $\mathcal{F}_{,K} = \mathcal{F}_{,KL} = 0$. We also find

$$\mathcal{F}_{\langle IJ\rangle} = -2fX\perp_{IJ}, \tag{B5}$$

$$\mathcal{F}_{\langle IJ\rangle,\langle KL\rangle} = 2fc_s^2(\tilde{G}_{I(K}\tilde{G}_{L)J} - \tilde{G}_{IJ}\tilde{G}_{KL}), \tag{B6}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_{\langle IJ\rangle,K} = &-2fX(G_{IJ,K} + G_{IJ}e^Le^MG_{LM,K} - e_Ie^LG_{JL,K} \\ &- e_Je^LG_{IL,K}) - 2f_{,K}X\perp_{IJ},\end{aligned} \tag{B7}$$

where the first two identities can be deduced from Eqs. (61) and (62). This readily gives

$$\begin{aligned}\delta^{(1)}\tilde{X} &= \delta^{(1)}X, \\ \delta^{(2)}\tilde{X} &= \delta^{(2)}X + fX\perp_{IJ}h^{ij}\partial_iQ^I\partial_jQ^J.\end{aligned} \tag{B8}$$

APPENDIX C: THIRD-ORDER ACTION

The following relations are useful for determining the third-order action:

$$X^{IJ} = \tfrac{1}{2}\dot{\phi}^I\dot{\phi}^J + \delta^{(1)}X^{IJ} + \delta^{(2)}X^{IJ} + \delta^{(3)}X^{IJ} \tag{C1}$$

where we have used Eq. (108) to rewrite (B2) and (B4) in the form

$$\delta^{(1)}X^{IJ} = -2\mathcal{N}_AX^{IJ}Q^A + \dot{\phi}^{(I}\dot{Q}^{J)}, \tag{C2}$$

$$\begin{aligned}\delta^{(2)}X^{IJ} = &-2\mathcal{N}_A\dot{\phi}^{(I}\dot{Q}^{J)}Q^A + 3\mathcal{N}_A\mathcal{N}_BX^{IJ}Q^AQ^B \\ &+ \tfrac{1}{2}\dot{Q}^I\dot{Q}^J - \dot{\phi}^{(I}\partial_iQ^{J)}(\delta N^i) - \tfrac{1}{2}h^{ij}\partial_iQ^I\partial_jQ^J.\end{aligned} \tag{C3}$$

We also have

$$\begin{aligned}P_{\langle IJ\rangle}\delta^{(3)}X^{IJ} = &-4P_{\langle IJ\rangle}X^{IJ}\mathcal{N}_A\mathcal{N}_B\mathcal{N}_CQ^AQ^BQ^C \\ &+ 6H\mathcal{N}_A\mathcal{N}_B\mathcal{N}_CQ^AQ^B\dot{Q}^C \\ &- P_{\langle BC\rangle}\mathcal{N}_AQ^A\dot{Q}^B\dot{Q}^C \\ &+ 4H\mathcal{N}_B\mathcal{N}_AQ^A\partial_iQ^B\delta N^i \\ &- P_{\langle AB\rangle}\dot{Q}^A\partial_iQ^B\delta N^i\end{aligned} \tag{C4}$$

as well as

$$\begin{aligned}\delta^{(2)}P = &P_{\langle IJ\rangle}\delta^{(2)}X^{IJ} + \tfrac{1}{2}P_{\langle IJ\rangle,\langle KL\rangle}\delta^{(1)}X^{IJ}\delta^{(1)}X^{KL} \\ &+ P_{\langle IJ\rangle,K}Q^K\delta^{(1)}X^{IJ} + \tfrac{1}{2}P_{,KL}Q^KQ^L\end{aligned} \tag{C5}$$

and

$$\begin{aligned}\delta^{(3)}P = &P_{\langle IJ\rangle}\delta^{(3)}X^{IJ} + [P_{\langle IJ\rangle,\langle KL\rangle}\delta^{(2)}X^{IJ}\delta^{(1)}X^{KL} \\ &+ P_{\langle IJ\rangle,K}Q^K\delta^{(2)}X^{IJ}] \\ &+ \tfrac{1}{6}[P_{\langle IJ\rangle,\langle KL\rangle,\langle MN\rangle}\delta^{(1)}X^{IJ}\delta^{(1)}X^{KL}\delta^{(1)}X^{MN} \\ &+ P_{,IJK}Q^IQ^JQ^K] \\ &+ \tfrac{1}{2}[P_{\langle IJ\rangle,\langle KL\rangle,M}Q^M\delta^{(1)}X^{IJ}\delta^{(1)}X^{KL} \\ &+ P_{\langle MN\rangle,IJ}Q^IQ^J\delta^{(1)}X^{MN}].\end{aligned} \tag{C6}$$

[1] L. McAllister and E. Silverstein, Gen. Relativ. Gravit. **40**, 565 (2008).
[2] C. P. Burgess, Proc. Sci. P2GC (2006) 008; Classical Quantum Gravity **24**, S795 (2007).
[3] R. Kallosh, Lect. Notes Phys. **738**, 119 (2008).
[4] J. M. Cline, arXiv:hep-th/0612129.
[5] S. H. Henry Tye, Lect. Notes Phys. **737**, 949 (2008).
[6] E. Silverstein and D. Tong, Phys. Rev. D **70**, 103505 (2004).
[7] M. Alishahiha, E. Silverstein, and D. Tong, Phys. Rev. D **70**, 123505 (2004).
[8] X. Chen, Phys. Rev. D **71**, 063506 (2005).
[9] X. Chen, J. High Energy Phys. 08 (2005) 045.
[10] C. Armendariz-Picon, T. Damour, and V. F. Mukhanov, Phys. Lett. B **458**, 209 (1999).
[11] J. Garriga and V. F. Mukhanov, Phys. Lett. B **458**, 219 (1999).
[12] A. Kehagias and E. Kiritsis, J. High Energy Phys. 11 (1999) 022.
[13] D. A. Steer and M. F. Parry, Int. J. Theor. Phys. **41**, 2255 (2002).
[14] Ph. Brax and D. A. Steer, Phys. Rev. D **66**, 061501 (2002).
[15] D. Easson, R. Gregory, G. Tasinato, and I. Zavala, J. High Energy Phys. 04 (2007) 026.
[16] D. Langlois and S. Renaux-Petel, J. Cosmol. Astropart. Phys. 04 (2008) 017.
[17] D. Langlois, S. Renaux-Petel, D. A. Steer, and T. Tanaka, Phys. Rev. Lett. **101**, 061301 (2008).
[18] D. A. Easson, R. Gregory, D. F. Mota, G. Tasinato, and I. Zavala, J. Cosmol. Astropart. Phys. 02 (2008) 010.
[19] M. X. Huang, G. Shiu, and B. Underwood, Phys. Rev. D **77**, 023511 (2008).
[20] J. M. Maldacena, J. High Energy Phys. 05 (2003) 013.
[21] V. F. Mukhanov, H. A. Feldman, and R. H. Brandenberger, Phys. Rep. **215**, 203 (1992).
[22] D. Langlois, arXiv:hep-th/0405053.
[23] S. Tsujikawa, D. Parkinson, and B. A. Bassett, Phys. Rev. D **67**, 083516 (2003).
[24] Z. Lalak, D. Langlois, S. Pokorski, and K. Turzynski, J. Cosmol. Astropart. Phys. 07 (2007) 014.
[25] D. Seery, J. Cosmol. Astropart. Phys. 11 (2007) 025.
[26] D. Seery, J. Cosmol. Astropart. Phys. 02 (2008) 006.
[27] D. Wands, K. A. Malik, D. H. Lyth, and A. R. Liddle, Phys. Rev. D **62**, 043527 (2000).
[28] D. H. Lyth, K. A. Malik, and M. Sasaki, J. Cosmol. Astropart. Phys. 05 (2005) 004.
[29] D. Langlois and F. Vernizzi, Phys. Rev. Lett. **95**, 091303 (2005).
[30] D. Langlois and F. Vernizzi, Phys. Rev. D **72**, 103501 (2005).
[31] A. A. Starobinsky and J. Yokoyama, arXiv:gr-qc/9502002.
[32] D. Wands, N. Bartolo, S. Matarrese, and A. Riotto, Phys. Rev. D **66**, 043520 (2002).
[33] D. Langlois, Phys. Rev. D **59**, 123512 (1999).
[34] N. Bartolo, E. Komatsu, S. Matarrese, and A. Riotto, Phys. Rep. **402**, 103 (2004).
[35] D. H. Lyth and Y. Rodriguez, Phys. Rev. Lett. **95**, 121302 (2005).
[36] F. Vernizzi and D. Wands, J. Cosmol. Astropart. Phys. 05 (2006) 019.
[37] D. Seery and J. E. Lidsey, J. Cosmol. Astropart. Phys. 06 (2005) 003.
[38] D. Seery and J. E. Lidsey, J. Cosmol. Astropart. Phys. 09 (2005) 011.
[39] X. Chen, M. x. Huang, S. Kachru, and G. Shiu, J. Cosmol. Astropart. Phys. 01 (2007) 002.
[40] X. Gao, J. Cosmol. Astropart. Phys. 06 (2008) 029.
[41] X. Chen, Phys. Rev. D **72**, 123518 (2005).
[42] D. Babich, P. Creminelli, and M. Zaldarriaga, J. Cosmol. Astropart. Phys. 08 (2004) 009.
[43] F. Bernardeau and J. P. Uzan, Phys. Rev. D **66**, 103506 (2002).
[44] S. Weinberg, Phys. Rev. D **72**, 043514 (2005).
[45] R. Bean, S. E. Shandera, S. H. Henry Tye, and J. Xu, J. Cosmol. Astropart. Phys. 05 (2007) 004.
[46] H. V. Peiris, D. Baumann, B. Friedman, and A. Cooray, Phys. Rev. D **76**, 103517 (2007).
[47] J. E. Lidsey and D. Seery, Phys. Rev. D **75**, 043505 (2007).

8.2 Les champs de fond et les ondes gravitationnelles dans l'inflation DBI multichamp (article)

8.2.1 Motivations et résultats

Nous avons indiqué à la sous-section 8.1.1 que l'action de Dirac-Born-Infeld (7.7) se réduit, dans les cas simples, à l'action de Nambu-Goto. Dans le cas général cependant, la situation est rendue plus complexe du fait de la présence du champ de jauge de type $U(1)$ vivant sur la brane, F_2, du champ de Kalb-Ramond B_2 ainsi que du dilaton Φ. L'action DBI doit également être complétée par l'action de Wess-Zumino (7.8), dont la contribution de la 4-forme C_4 à l'action (7.22) n'est qu'un cas particulier. Comme une extension naturelle de notre travail dans les références [237, 238], où ces aspects n'avaient pas été pris en compte, David Langlois, Danièle A. Steer et moi-même avons donc étudié dans la référence [236] l'impact de ces champs de fond et du champ de jauge dynamique vivant sur la brane sur l'inflation branaire. Cette étude est d'autant plus importante que les champs de fond sont de manière générique non-nuls dans les compactifications avec flux, comme dans la solution de Klebanov-Strassler [211].

Notre résultat principal peut s'énoncer simplement : le spectre et le bispectre primordial générées dans l'inflation branaire – dans le régime relativiste comme dans celui de roulement lent – par les fluctuations scalaires ne sont pas affectés par les champs de fond et le champ de jauge vivant sur la brane. Pour le voir, nous avons calculé de manière exacte les actions quadratique et cubique dans les fluctuations scalaires et nous avons montré qu'elles sont rigoureusement égales à celles calculées dans la référence [238]. Une subtilité importante à prendre en compte pour prouver ce résultat réside dans le fait que les fluctuations des champs scalaires décrivant la position de la brane induisent, en présence d'un champ de Kalb-Ramond B_2 non-nul, une fluctuation du degré de liberté scalaire non-dynamique du champ de jauge F_2 vivant sur la brane, et ce de telle façon que la partie scalaire de la combinaison $\hat{B}_2 + 2\pi\alpha' F_2$ apparaissant dans l'action soit nulle [2].

Le champ de jauge F_2 présente également deux degrés de libertés vectoriels (les deux états de polarisation du photon si F_2 était le champ U(1) de l'électromagnétisme) dont nous avons étudié les propriétés. Nous avons montré en particulier que leur action quadratique est invariante conforme par rapport à la métrique induite sur la brane si le dilaton et l'axion sont homogènes dans les dimensions compactes. Ceci permet de comprendre de manière simple pourquoi, dans cette situation, les fluctuations vectorielles ne sont pas amplifiées à la traversée de l'horizon sonique [29]. Si le dilaton et/ou l'axion évalués à la position de la brane sont au contraire dépendant du temps, l'invariance conforme de la théorie est brisée, ouvrant la voie à l'amplification des fluctuations vectorielles, comme bien connu dans le contexte, distinct, de la magnétogénèse (voir les références [229, 164, 422] pour des revues).

Enfin, nous avons vu au chapitre précédent que Baumann et McAllister d'un côté [48] et Lidsey et Huston de l'autre [265] ont déterminé des contraintes sur l'amplitude des ondes gravitationnelles générées dans l'inflation DBI un champ qui sont incompatibles entre elles dans le cas de l'inflation ultraviolette. La première indique que le rapport tenseur sur scalaire r est extrêmement petit du fait que l'inflaton est largement sous-Planckien dans l'inflation branaire tandis que la seconde utilise le fait qu'un spectre primordial rouge –

2. Seule la combinaison $\hat{B}_2+2\pi\alpha' F_2$ est invariante sous l'effet d'une transformation de jauge du potentiel de jauge B_2, comme nous l'expliquons dans l'article [236].

maintenant favorisé par les données – implique une amplitude non négligeable pour r. Nous avons étudié dans la référence [236] comment ces contraintes se généralisent au cas multichamp : tandis que la borne supérieure de Baumann McAllister sur le rapport tenseur sur scalaire n'est pas profondément modifiée par les effets multichamp – les gorges de la théorie des cordes restent de taille sous-Planckienne –, un spectre rouge est parfaitement compatible avec une amplitude très faible des ondes gravitationnelles dans le cas multichamp à condition que le transfert entropique/adiabatique soit non négligeable. L'inflation DBI multichamp n'est donc pas exclue par ce type de considérations.

8.2.2 Article

Nous reproduisons à présent l'article [236] publié en 2009 par D. Langlois, D.A. Steer et moi-même (S. R-P) dans *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics (JCAP)* et intitulé *"Multi-field DBI inflation : introducing bulk forms and revisiting the gravitational wave constraints"*.

Journal of Cosmology and Astroparticle Physics
An IOP and SISSA journal

Multi-field DBI inflation: introducing bulk forms and revisiting the gravitational wave constraints

David Langlois,[a,b] **Sébastien Renaux-Petel**[a] **and Danièle A. Steer**[a]

[a]APC (Astroparticules et Cosmologie), UMR 7164 (CNRS, Université Paris 7),
10, rue Alice Domon et Léonie Duquet, 75205 Paris Cedex 13, France
[b]Institut d'Astrophysique de Paris (IAP),
98bis Boulevard Arago, 75014 Paris, France

E-mail: langlois@apc.univ-paris7.fr, renaux@apc.univ-paris7.fr,
steer@apc.univ-paris7.fr

Received March 12, 2009
Accepted April 7, 2009
Published April 22, 2009

Abstract. We study multi-field Dirac-Born-Infeld (DBI) inflation models, taking into account the NS-NS and R-R bulk fields present in generic flux compactifications. We compute the second-order action, which governs the behaviour of linear cosmological perturbations, as well as the third-order action, which can be used to calculate non-Gaussianities in these models. Remarkably, for scalar-type perturbations, we show that the contributions due to the various form fields exactly cancel in both the second- and third-order actions. Primordial perturbations and their non-Gaussianities are therefore unaffected by the presence of form fields and our previous results are unmodified. We also study vector-type perturbations associated with the U(1) gauge field confined on the D3-brane, and discuss whether their quantum fluctuations can be amplified. Finally, we revisit the gravitational wave constraints on DBI inflation and show that an ultra-violet DBI multi-field scenario is still compatible with data, in contrast with the single field case, provided there is a transfer from entropy into adiabatic perturbations.

Keywords: inflation, string theory and cosmology

JCAP04(2009)021

© 2009 IOP Publishing Ltd and SISSA doi:10.1088/1475-7516/2009/04/021

Contents

1 Introduction **1**

2 The effective multi-field DBI action **2**
2.1 DBI action 4
2.2 WZ action 5
2.3 Full action 6

3 Background evolution **6**

4 Dynamics of linear perturbations **7**
4.1 DBI determinant 8
4.2 WZ terms 9

5 Linear scalar perturbations **10**

6 Linear vector perturbations **12**

7 Non-Gaussianities **14**

8 Gravitational wave constraints on DBI inflation **16**

9 Conclusions **17**

1 Introduction

Although inflation is today the main mechanism with which to describe the very early universe, the nature of the field or fields responsible for inflation still remains an open question. In particular, inflation model building in the context of string theory has proved rather challenging (for recent reviews, see e.g. [1–6]), one of the reasons being that inflation usually requires an extremely flat potential. An interesting way to bypass this problem[1] is to resort to non-standard kinetic terms e.g. [9, 10], and these arise naturally in inflation associated with the motion of a D-brane in a higher-dimensional spacetime. Indeed, the Dirac-Born-Infeld (DBI) action, which is a part of the full D-brane action, contains non-standard kinetic terms of a specific form. In the context of warped geometries with moving D3-branes, they can lead to a phase of inflation, dubbed DBI-inflation [11–14].

In DBI-inflation, the coordinates of the brane in the higher-dimensional spacetime give rise to scalar fields from the effective four-dimensional point of view. Although initial works studied the motion of the brane along a *single direction* (namely the radial direction in the context of warped conical compactifications), it is interesting to consider the more general motion of the brane in all compact dimensions (namely the angular directions also). This effectively leads to *multiple field* inflationary scenarios.

[1] Recently, the slow down of scalar fields by particle production was also revived in [7, 8].

JCAP04(2009)021

DBI inflation, and more generally inflation with non standard kinetic terms, can lead to significant non-Gaussianity which could potentially be observable in the future measurements of the CMB by the Planck satellite. The cosmological perturbations generated in such scenarios have been investigated in single-field inflation (see e.g. [15, 16] for a general analysis), and in multi-field inflation [17–20]. In the latter case, entropy modes can be generated during inflation, in addition to the usual adiabatic modes, and these entropy modes can affect the final curvature perturbation if there is a transfer from entropy modes into adiabatic modes. As we also showed in the context of multi-field DBI inflation, this transfer also affects the amplitude of non-Gaussianities, although the shape is the same as in the single-field case (assuming a small sound speed).

In our previous works on multi-field DBI-inflation [18, 19], we ignored the presence of NS-NS and R-R form fields in the bulk, as well as the U(1) gauge field confined on the brane: these fields, however, are generically present in typical bulk solutions, for example the Klebanov-Strassler solution [21, 22], and they contribute to the D3-brane action through both the DBI and Wess-Zumino terms. One of the goals of this paper is thus to investigate the consequences of the bulk form fields on scalar-type cosmological perturbations, both at linear and non-linear order. We find that for the second-order and third-order actions involving scalar perturbations, the terms arising from the coupling between the bulk forms and the brane position scalar fields are exactly compensated by the terms due to the fluctuations of the U(1) gauge field confined on the brane. This implies that our previous results for the primordial spectra and the non-Gaussianities remain unchanged in this more general context. We also study the two vector degrees of freedom associated with the U(1) gauge field on the brane and investigate in which case their quantum fluctuations can be amplified during inflation.

Finally, we consider the observational constraints on DBI-inflation models, based on a combination of their predictions for the scalar spectral index, non-Gaussianities and gravitational waves. By confronting an upper bound on the amount of gravitational waves [23] (typically negligible in the original models of DBI inflation [24]) with a lower bound related to the deviation of the scalar spectrum from scale-invariance [25], it has been argued that most models of *single-field* ultra-violet DBI inflation are ruled out. In the *multi-field* case, however, the second constraint can be relaxed when there is a transfer from entropy into adiabatic modes meaning that these models are not excluded.

The plan of the present paper is the following. In the next section we derive the effective multifield DBI action, paying particular attention to the various bulk form fields. In section 3 we focus on the homogeneous background evolution. The second-order action is calculated in section 4, and in section 5 we focus on linear scalar perturbations, comparing our results to those of [19]. In section 6 we concentrate on the vector perturbations associated with the abelian gauge field confined on the brane. section 7 is devoted to the predictions for non-Gaussianity, based on the third-order action. In section 8, we revisit arguments which disfavour single field ultra-violet DBI inflation, and show how a multi-field scenario can overcome those difficulties. We draw our conclusions in section 9.

2 The effective multi-field DBI action

In this section we derive the four-dimensional effective action associated with the motion of a probe D3-brane moving through a compact space with coordinates y^K $(K = 1, \ldots, 6)$. The non-compact space-time coordinates are denoted by x^μ $(\mu = 0, 1, 2, 3)$.

JCAP04(2009)021

Although we do not use any specific geometry and remain as general as possible, we have in mind warped flux compactifications in type IIB string theory [26] and consider a ten-dimensional metric of the general form

$$\begin{aligned} ds^2 &= h^{-1/2}(y^K)\, g_{\mu\nu}(x^\lambda)\, dx^\mu dx^\nu + h^{1/2}(y^K)\, \tilde{g}_{IJ}(y^K)\, dy^I dy^J \\ &\equiv \gamma_{AB}\, dY^A dY^B\,. \end{aligned} \tag{2.1}$$

Here $Y^A = \{x^\mu, y^I\}$, and the warp factor h and metric $\tilde{g}_{IJ}$ depend only on the compact coordinates y^K. In a general flux compactification, the dilaton Φ may be non trivial and all fluxes may be turned on: the R-R forms $F_{n+1} = dC_n$ for $n = 0, 2, 4$ (and their duals), as well as the NS-NS flux $H_3 = dB_2$. In order to maintain four-dimensional local Lorentz invariance, the three-fluxes F_3 and H_3 have only compact components and the axion C_0 and dilaton Φ are allowed to vary only along the compact manifold. As a consequence, in the following, we choose a gauge in which C_2 and B_2 have non-trivial components only along the compact directions, whereas C_4 has components only along the non-compact spacetime dimensions. Thus

$$B_{IJ} \neq 0 \qquad B_{\mu I} = B_{\mu\nu} = 0\,, \tag{2.2}$$

$$C_{IJ} \neq 0 \qquad C_{\mu I} = C_{\mu\nu} = 0\,,$$

$$C_{\mu\nu\rho\sigma} \neq 0 \qquad \text{with all other components vanishing.} \tag{2.3}$$

The action for a single D3-brane, with tension T_3, in this background is

$$S_{\text{brane}} = S_{\text{DBI}} + S_{\text{WZ}} \tag{2.4}$$

where the Dirac-Born-Infeld (DBI) and Wess-Zumino (WZ) actions are given by [27, 28]

$$S_{\text{DBI}} = -T_3 \int \mathrm{d}^4x\, e^{-\Phi} \sqrt{-\det\left(\hat{\gamma}_{\mu\nu} + \hat{B}_{\mu\nu} + 2\pi\alpha' F_{\mu\nu}\right)} \tag{2.5}$$

$$S_{\text{WZ}} = -T_3 \int_{\text{brane}} \sum_{n=0,2,4} \hat{C}_n \wedge e^{\left(\hat{B}_2 + 2\pi\alpha' F_2\right)}\Big|_{4-\text{form}}\,. \tag{2.6}$$

Here and in the following, a hat denotes a pull-back onto the brane so that $\hat{\gamma}_{\mu\nu}$, for example, is the induced metric on the brane. In the Wess-Zumino term, one keeps only the 4-forms resulting from the wedge product, and F_2 is the field strength of the worldvolume U(1) gauge field, i.e. $F_{\mu\nu} \equiv \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$. Note that it enters the brane's action only through the combination

$$\mathcal{F}_{\mu\nu} = \hat{B}_{\mu\nu} + 2\pi\alpha' F_{\mu\nu} \tag{2.7}$$

as is required from gauge invariance under the NS gauge transformation $B_2 \to B_2 + d\Sigma_1$, $2\pi\alpha' F_2 \to 2\pi\alpha' F_2 - \widehat{d\Sigma_1}$ [29]. Thus only $\mathcal{F}_{\mu\nu}$ as a whole is the physical, i.e. gauge-invariant, field strength on the brane. This implies, in particular, that one cannot take into account the perturbations of $\hat{B}_{\mu\nu}$ without doing so for $F_{\mu\nu}$: this point will have important consequences below. Finally, the brane embedding is defined by the functions

$$Y^A_{(\text{b})}(x^\mu) = (x^\mu, \varphi^I(x^\mu)) \tag{2.8}$$

where we have chosen the brane spacetime coordinates x^μ to coincide with the first four bulk coordinates.

It will be useful for the following discussion to consider the DBI and WZ actions separately.

JCAP04(2009)021

2.1 DBI action

Using (2.1) and (2.2), the metric and two-form induced on the brane are given by

$$\hat{\gamma}_{\mu\nu} = \gamma_{AB}\,\partial_\mu Y^A_{(\mathrm{b})}\partial_\nu Y^B_{(\mathrm{b})} = h^{-1/2}\left(g_{\mu\nu} + h\tilde{g}_{IJ}\partial_\mu\varphi^I\partial_\nu\varphi^J\right) \tag{2.9}$$

$$\hat{B}_{\mu\nu} = B_{AB}\,\partial_\mu Y^A_{(\mathrm{b})}\partial_\nu Y^B_{(\mathrm{b})} = B_{IJ}\,\partial_\mu\varphi^I\partial_\nu\varphi^J\,. \tag{2.10}$$

Now let us use the following rescalings

$$\phi^I = \sqrt{T_3}\,\varphi^I\,, \quad G_{IJ} = e^{-\Phi}\,\tilde{g}_{IJ} \quad b_{IJ} = \frac{h^{1/2}}{T_3}\,B_{IJ}\,. \tag{2.11}$$

Then on defining the functions

$$f(\phi^K) \equiv e^{\Phi}\frac{h}{T_3}\,, \qquad \lambda(\phi^K) = 2\pi\alpha' h^{1/2} \tag{2.12}$$

which depend only on the scalar fields, we can rewrite the DBI action eq. (2.5) as

$$S_{\mathrm{DBI}} = \int d^4x\sqrt{-g}\left(-\frac{1}{f}\sqrt{\mathcal{D}}\right), \tag{2.13}$$

with the determinant

$$\mathcal{D} \equiv \det(\delta^\mu_\nu + f\,G_{IJ}\partial^\mu\phi^I\partial_\nu\phi^J + b_{IJ}\partial^\mu\phi^I\partial_\nu\phi^J + \lambda F^\mu{}_\nu)\,, \tag{2.14}$$

where the greek indices are raised and lowered with the 'spacetime' metric $g_{\mu\nu}$. We can rewrite this determinant in the form

$$\mathcal{D} = \det(\mathbf{I} + \mathbf{S} + \mathcal{B}), \tag{2.15}$$

where $\mathbf{I}$ is the four-dimensional identity matrix, and from eq. (2.14) the matrices $\mathbf{S}$ and $\mathcal{B}$ are defined through their components

$$S^\mu_\nu = fG_{IJ}\partial^\mu\phi^I\partial_\nu\phi^J \qquad (S_{\mu\nu} = S_{\nu\mu}) \tag{2.16}$$

and

$$\mathcal{B}^\mu{}_\nu = b_{IJ}\partial^\mu\phi^I\partial_\nu\phi^J + \lambda F^\mu_\nu = \frac{\lambda}{2\pi\alpha'}g^{\mu\lambda}\mathcal{F}_{\lambda\nu} \qquad (\mathcal{B}_{\mu\nu} = -\mathcal{B}_{\nu\mu}) \tag{2.17}$$

where $\mathcal{F}_{\mu\nu}$ was defined in eq. (2.7).

Computing the determinant in eq. (2.15) yields (see also [30])

$$\begin{aligned}\mathcal{D} = \mathcal{D}_S &- \frac{1}{2}\mathrm{Tr}(\mathcal{B}^2)\,(1+\mathrm{Tr}\mathbf{S}) + \mathrm{Tr}(\mathbf{S}\mathcal{B}^2)\,(1+\mathrm{Tr}\mathbf{S}) - \mathrm{Tr}(\mathbf{S}^2\mathcal{B}^2)\\ &- \frac{1}{4}\mathrm{Tr}(\mathcal{B}^2)[(\mathrm{Tr}\mathbf{S})^2 - \mathrm{Tr}(\mathbf{S}^2)] - \frac{1}{2}\mathrm{Tr}(\mathbf{S}\mathcal{B}\mathbf{S}\mathcal{B})\\ &+ \frac{1}{8}\left[\left(\mathrm{Tr}(\mathcal{B}^2)\right)^2 - 2\mathrm{Tr}(\mathcal{B}^4)\right]\end{aligned} \tag{2.18}$$

where

$$\mathcal{D}_S \equiv 1 + \mathrm{Tr}\mathbf{S} + \frac{1}{2}[(\mathrm{Tr}\mathbf{S})^2 - \mathrm{Tr}(\mathbf{S}^2)] + S^{[\alpha}_\alpha S^\beta_\beta S^{\gamma]}_\gamma + S^{[\alpha}_\alpha S^\beta_\beta S^\gamma_\gamma S^{\delta]}_\delta\,. \tag{2.19}$$

JCAP04(2009)021

When $\mathbf{S}$ vanishes, $\mathcal{D}$ reduces to the determinant of standard Born-Infeld theory [31]. On the other hand, when the brane and bulk form fields are ignored, $\mathcal{D}$ reduces to $\mathcal{D}_S$, which depends only on the scalar fields. As we showed in [18, 19], it can be written in the form

$$\mathcal{D}_S = 1 - 2fG_{IJ}X^{IJ} + 4f^2 X_I^{[I} X_J^{J]} - 8f^3 X_I^{[I} X_J^J X_K^{K]} + 16f^4 X_I^{[I} X_J^J X_K^K X_L^{L]}, \tag{2.20}$$

where we have defined

$$X^{IJ} \equiv -\frac{1}{2}\partial^\mu \phi^I \partial_\mu \phi^J, \quad X_I^J = G_{IK} X^{KJ}, \tag{2.21}$$

and where the brackets denote antisymmetrisation of the field indices. Above and in the following, field indices are raised and lowered with the field space metric G_{IJ} defined in (2.11).

2.2 WZ action

Let us now turn to the Wess-Zumino part. The explicit expression given in eq. (2.6) is

$$\begin{aligned} S_{\rm WZ} &= -T_3 \left[\int_{\rm brane} \hat{C}_4 + \int_{\rm brane} \hat{C}_2 \wedge \left(\hat{B}_2 + 2\pi\alpha' F_2 \right) \right. \\ &\qquad \left. + \frac{1}{2} \int_{\rm brane} C_0 \left(\hat{B}_2 \wedge \hat{B}_2 + 4\pi\alpha' \hat{B}_2 \wedge F_2 + (2\pi\alpha')^2 F_2 \wedge F_2 \right) \right] \\ &\equiv S_{\rm WZ}^{[4]} + S_{\rm WZ}^{[2]}, \end{aligned} \tag{2.22}$$

where we have separated out the part ($S_{\rm WZ}^{[4]}$) coming from the 4-form $\hat{C}_4$, and the remainder ($S_{\rm WZ}^{[2]}$) containing the 2-forms $\hat{C}_2, \hat{B}_2$ and F_2. The 4-form $\hat{C}_4$ is given by

$$\hat{C}_4 = \mathcal{V}\, \epsilon_4, \tag{2.23}$$

where ϵ_4 is the fully antisymmetric tensor associated with the four-dimensional metric $g_{\mu\nu}$ (so that $\epsilon_{0123} = \sqrt{-g}$) and the coefficient $\mathcal{V}$ depends only on the compact coordinates. Therefore the first term on the right hand side of eq. (2.22) yields, in the effective four-dimensional action, a potential term depending on the scalar fields ϕ^I characterizing the brane position in the compact space:

$$S_{\rm WZ}^{[4]} = -T_3 \int_{\rm brane} \hat{C}_4 = -\int {\rm d}^4x \sqrt{-g}\, T_3 \mathcal{V}(\phi^I)\,. \tag{2.24}$$

There are five terms in $S_{\rm WZ}^{[2]}$. The first, involving $\hat{C}_2$, is proportional to

$$\begin{aligned} \int_{\rm brane} \hat{C}_2 \wedge \hat{B}_2 &= -\frac{1}{4} \int {\rm d}^4x \sqrt{-g}\, \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} C_{AB} \frac{\partial Y^A_{\rm (b)}}{\partial x^\mu} \frac{\partial Y^B_{\rm (b)}}{\partial x^\nu} B_{CD} \frac{\partial Y^C_{\rm (b)}}{\partial x^\rho} \frac{\partial Y^D_{\rm (b)}}{\partial x^\sigma} \\ &= -\frac{1}{4T_3^2} \int {\rm d}^4x \sqrt{-g}\, C_{IJ} B_{KL}\, \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \partial_\mu \phi^I \partial_\nu \phi^J \partial_\rho \phi^K \partial_\sigma \phi^L \end{aligned} \tag{2.25}$$

where we have used the brane embedding given in eq. (2.8) as well as the fact that $\hat{C}_2$ has only compact indices. The next term is proportional to

$$\int_{\rm brane} \hat{C}_2 \wedge F_2 = -\frac{1}{4T_3} \int {\rm d}^4x \sqrt{-g}\, C_{IJ}\, \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \partial_\mu \phi^I \partial_\nu \phi^J F_{\rho\sigma}\,. \tag{2.26}$$

JCAP04(2009)021

We do not write explicitly the two following terms involving $\hat{B}_2 \wedge \hat{B}_2$ and $\hat{B}_2 \wedge F_2$, since they are analogous to (2.25) and (2.26), respectively. The final term, involving C_0, is given by

$$\int_{\text{brane}} C_0\, F_2 \wedge F_2 = -\frac{1}{4}\int \mathrm{d}^4x\, \sqrt{-g}\, C_0 \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} F_{\mu\nu} F_{\rho\sigma} = -\frac{1}{2}\int \mathrm{d}^4x\, \sqrt{-g}\, C_0 F_{\mu\nu} \tilde{F}^{\mu\nu}\,, \tag{2.27}$$

where we have introduced the dual of the field strength $\tilde{F}^{\mu\nu} = \frac{1}{2}\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} F_{\rho\sigma}$. As is clear from the last equality, we refer to C_0 as the axion.

2.3 Full action

In the rest of this paper, we thus work with the four-dimensional effective action given by

$$\begin{aligned} S &= \int \mathrm{d}^4x \sqrt{-g}\, {}^{(4)}R + S_{\text{brane}} \\ &= \int \mathrm{d}^4x \sqrt{-g} \left[{}^{(4)}R - \frac{1}{f(\phi^I)}(\sqrt{\mathcal{D}} - 1) - V \right] + S^{[2]}_{\text{WZ}}, \end{aligned} \tag{2.28}$$

where we have set $M_{\text{P}} \equiv (8\pi G)^{-1/2} = 1$, $\mathcal{D}$ is given explicitly in eq. (2.18), and we have defined the potential

$$V \equiv T_3 \mathcal{V} + \frac{1}{f} \tag{2.29}$$

so that in the small velocity limit for the scalar field, the action reduces to the usual difference between the kinetic energy and potential energy. In the following we will keep V general so that it can incorporate other terms coming, for example, from moduli stabilization effects or interactions with other branes.

3 Background evolution

In this section, we assume the spacetime to be homogeneous and isotropic, and described by a spatially flat FLRW (Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker) geometry with metric

$$g_{\mu\nu}\, dx^\mu dx^\nu = -dt^2 + a(t)^2 d\mathbf{x}^2\,, \tag{3.1}$$

where t is cosmic time.

Since there is no prefered spatial direction, the scalar fields can be only time-dependent, $\phi^I = \bar{\phi}^I(t)$, and the field strength on the brane must vanish, $F_{\mu\nu} = 0$. This implies that the tensor $\mathcal{B}^\mu_{\ \nu}$, defined in eq. (2.17), vanishes (since $b_{IJ}\dot{\bar{\phi}}^I \dot{\bar{\phi}}^J = 0$ by antisymmetry of b_{IJ}) and that the only non-zero component of the matrix $\mathbf{S}$ is $S^0_{\ 0}$. As a result, there are only two non-zero terms in the determinant $\mathcal{D}$ of eq. (2.14), and they are the first two terms of $\mathcal{D}_S$. Thus the DBI action in (2.28) reduces to the simple form

$$S_{\text{DBI}} = -\int \mathrm{d}^4x\, \sqrt{-g} \frac{1}{f(\bar{\phi}^I)} \sqrt{1 - f\, G_{IJ} \dot{\bar{\phi}}^I \dot{\bar{\phi}}^J} \tag{3.2}$$

where a dot denotes a derivative with respect to t. Consider now the WZ terms given in eq. (2.22). All terms involving $F_{\mu\nu}$ are automatically zero. Morever, the terms with $\hat{C}_2 \wedge \hat{B}_2$ and $\hat{B}_2 \wedge \hat{B}_2$ also vanish, by antisymmetry (see eq. (2.25)). Hence $S^{[2]}_{\text{WZ}}$ vanishes on

JCAP04(2009)021

the background. Thus, to summarize, the background dynamics is described by the four-dimensional action

$$S_0 = \int \mathrm{d}^4x\sqrt{-g}\left[{}^{(4)}R - \frac{1}{f(\bar{\phi}^I)}\left(\sqrt{1 - f\,G_{IJ}\dot{\bar{\phi}}^I\dot{\bar{\phi}}^J} - 1\right) - V(\bar{\phi}^I)\right] \tag{3.3}$$

which is independent of the bulk form fields. Let us now define

$$\dot{\sigma} \equiv \sqrt{G_{IJ}\dot{\bar{\phi}}^I\dot{\bar{\phi}}^J} \tag{3.4}$$

(note that $\dot{\sigma}$ is not the time derivative of any field in general but merely a notational convenience) as well as

$$c_s \equiv \sqrt{1 - f\dot{\sigma}^2}, \tag{3.5}$$

which will later be interpreted as the propagation speed of the perturbations, i.e. as an effective sound speed. Then the background equations of motion are

$$H^2 = \frac{1}{3}\left(V + \frac{1 - c_s}{f c_s}\right) \tag{3.6}$$

$$\dot{H} = -\frac{\dot{\sigma}^2}{2c_s} \tag{3.7}$$

$$\ddot{\bar{\phi}}^I + \Gamma^I_{JK}\dot{\bar{\phi}}^J\dot{\bar{\phi}}^K + \left(3H - \frac{\dot{c}_s}{c_s}\right)\dot{\bar{\phi}}^I + c_s G^{IJ}\left(V_{,J} - \frac{f_{,J}}{f^2}\frac{(c_s - 1)^2}{2c_s}\right) = 0 \tag{3.8}$$

where Γ^I_{JK} is the Christoffel symbol constructed from the field space metric G_{IJ}.

4 Dynamics of linear perturbations

We now study linear perturbations. Their dynamics is described by the action quadratic in the perturbations, obtained by expanding eq. (2.28) to second order about the homogeneous and isotropic background described in the previous section.

In addition to the scalar fields describing the brane position in the compact dimensions, our dynamical system contains general relativity as well as a non-linear U(1) gauge theory. As a consequence, the linear dynamics is described by the perturbations of the scalar fields ϕ^I, of the metric $g_{\mu\nu}$ and of the gauge field A_μ, which are all coupled. The perturbations can be decomposed into scalar, vector and tensor modes, following the standard terminology in cosmological perturbation theory. These three sectors are completely decoupled at the linearized level and we will not consider tensor perturbations, i.e. gravitational waves, as they obey the usual equations.

It is convenient to work in the Arnowitt-Deser-Misner (ADM) formalism, in which the metric is written in the form

$$ds^2 = -N^2dt^2 + h_{ij}(dx^i + N^i dt)(dx^j + N^j dt)\,. \tag{4.1}$$

The gauge invariance of general relativity under spacetime diffeomorphisms manifests itself in the fact that the lapse function N and the shift vector N^i are not dynamical degrees of freedom (they appear without time derivatives in the action). The variation of this action with

JCAP04(2009)021

respect to the lapse and shift, yields, respectively, the energy constraint and the momentum constraint. Similarly, we write the four-dimensional vector potential A_μ in '3+1' form

$$A_\mu \equiv (A_0, A_i) \tag{4.2}$$

where, since A_μ vanishes on the background (up to gauge transformations), A_0 and A_i are perturbations. On imposing the Coulomb gauge $\partial^i A_i = 0$, it follows that A_i is transverse and contains only two vector-like modes. The scalar time component A_0 is not dynamical and the variation of the action with respect to it leads to a third constraint.

In the following, we work in the flat gauge

$$h_{ij} = a^2(t)\delta_{ij}\,, \tag{4.3}$$

where we denote the scalar field perturbations as Q^I:

$$\phi^I = \bar{\phi}^I + Q^I\,. \tag{4.4}$$

We also decompose the lapse and shift into scalar and vector perturbations

$$N = 1 + \delta N, \qquad N_i = \psi_{,i} + \bar{N}_i, \qquad \partial^i \bar{N}_i = 0\,. \tag{4.5}$$

We now expand the full action up to second order in the scalar perturbations $\delta N, \psi, A_0$ and Q^I and vector perturbations $\bar{N}_i, A_i$. On using the scalar components of the energy, momentum and gauge field constraints, we can express δN, ψ and A_0 in terms of the scalar field perturbations Q^I, which represent the true scalar degrees of freedom. Similarly, the vector-like part of the shift $\bar{N}_i$ will be determined in terms of A_i, via the momentum constraint equations, so that the true vector degrees of freedom will be the two polarizations of the brane gauge field.

4.1 DBI determinant

As an intermediate step in the calculation of the second-order action, it is necessary to expand, up to second order, the determinant which appears in the DBI Lagrangian. One can either use eq. (2.18) or more directly work with the DBI determinant of the form given in eq. (2.5):

$$\begin{aligned} S_{\rm DBI} &= -T_3 \int \mathrm{d}^4x\, e^{-\Phi} \sqrt{-\det\left(\hat{\gamma}_{\mu\nu} + \mathcal{F}_{\mu\nu}\right)} \\ &= -T_3 \int \mathrm{d}^4x\, e^{-\Phi} \sqrt{-\hat{\gamma}} \sqrt{\det\left(\delta^\mu_\nu + \hat{\gamma}^{\mu\lambda}\mathcal{F}_{\lambda\nu}\right)}\,. \end{aligned} \tag{4.6}$$

Expanding to second order yields

$$S_{\rm DBI\,(2)} = -T_3 \int \mathrm{d}^4x \left(\delta^{(2)}\left(e^{-\Phi}\sqrt{-\hat{\gamma}}\right) + e^{-\bar{\Phi}}\sqrt{-\gamma}\frac{1}{4}\mathcal{F}_{\mu\nu}\gamma^{\mu\alpha}\gamma^{\nu\beta}\mathcal{F}_{\alpha\beta}\right) \tag{4.7}$$

where $\gamma_{\mu\nu}$ is the background induced metric

$$\gamma_{\mu\nu}\mathrm{d}x^\mu \mathrm{d}x^\nu = \frac{e^{\Phi/2}}{\sqrt{fT_3}}\left(-c_s^2 \mathrm{d}t^2 + a^2(t)\mathrm{d}\vec{x}^2\right)\,. \tag{4.8}$$

(From now on we drop bars on background quantities when there is no ambiguity). The perturbations of $\gamma_{\mu\nu}$ are not relevant here since $\mathcal{F}$ is already first order. We have already

JCAP04(2009)021

computed the first term of eq. (4.7) in [18] and thus concentrate on the second term which, modulo the coupling to the dilaton, is very similar to the usual electromagnetic action, though now the generalized field strength $\mathcal{F}_{\mu\nu}$ couples to the induced metric $\gamma_{\mu\nu}$ rather than $g_{\mu\nu}$ (this can be seen as a specific manifestation of the so-called open string metric [32]).

The non vanishing components of $\mathcal{F}$, at linear order, are given by

$$\begin{aligned} {}^{(1)}\mathcal{F}_{0i} &= 2\pi\alpha' \left[\frac{1}{\lambda} b_{IJ}\dot{\phi}^I \partial_i Q^J + F_{0i}\right] = 2\pi\alpha' \left[-\frac{1}{\lambda}\partial_i \Lambda + \dot{A}_i\right] \\ {}^{(1)}\mathcal{F}_{ij} &= 2\pi\alpha' F_{ij} = 2\pi\alpha' \left(\partial_i A_j - \partial_j A_i\right), \end{aligned} \tag{4.9}$$

where all scalar modes appear in the combination

$$\Lambda \equiv -b_{IJ}\dot{\phi}^I Q^J + \lambda A_0. \tag{4.10}$$

On substituting the induced metric (4.8) and the components (4.9) into the second-order action (4.7), one finds that the scalar contribution is given by

$$S^{\rm DBI}_{(2){\rm scalar}} \supseteq \frac{1}{2}\int {\rm d}t\, {\rm d}^3x\, \frac{a}{f c_s}(\partial\Lambda)^2. \tag{4.11}$$

and the vector contribution by

$$S^{\rm DBI}_{(2){\rm vector}} = \frac{T_3(2\pi\alpha')^2}{2}\int {\rm d}t\, {\rm d}^3x\, \left[e^{-\Phi}\frac{a^3}{c_s}\left(\frac{1}{a^2}\dot{A}_i\dot{A}_i + \frac{c_s^2}{a^4}A_i\Delta A_i\right)\right]. \tag{4.12}$$

Here and in the following, we use the convention that repeated (lower) spatial indices are summed over: for example, $A_i\Delta A_i \equiv \sum_i A_i \Delta A_i$.

4.2 WZ terms

We now examine the contribution of the WZ terms to the second-order action. To lowest order in perturbations, the term $\int \hat{C}_2 \wedge \hat{B}_2$ given in eq. (2.25) is third order (since the partial derivatives $\partial_\mu\phi^I$ are first-order except for $\mu = 0$). Hence this term does not contribute to the second order action. The same conclusion applies to the term $\int C_0 \hat{B}_2 \wedge \hat{B}_2$. The term $\int \hat{C}_2 \wedge F_2$ given in eq. (2.26) yields, to second-order,

$$\int \hat{C}_2 \wedge F_2 \propto \int d^4x\, a^3 C_{IJ}\dot{\phi}^I \epsilon^{ijk}\partial_i Q^J F_{jk} = \int d^4x\, \partial_i\left(a^3 C_{IJ}\dot{\phi}^I\epsilon^{ijk}Q^J F_{jk}\right) = 0 \tag{4.13}$$

up to total spatial derivative (our sign convention is $\epsilon^{ijk} = -\epsilon^{0ijk}$). A similar result holds for the term $\int C_0 \hat{B}_2 \wedge F_2$. Finally, we must consider (see eq. (2.27))

$$\begin{aligned} \int C_0 F_2 \wedge F_2 &= -\frac{1}{2}\int {\rm d}^4x\sqrt{-g}\, C_0 F_{\mu\nu}\tilde{F}^{\mu\nu} = -\frac{1}{2}\int {\rm d}^4x\sqrt{-g}\, C_0 \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\partial_\mu\left(F_{\nu\rho}A_\sigma\right) \\ &\approx \int {\rm d}^4x\, a^3 \dot{C}_0 \epsilon^{ijk}(\partial_i A_j)A_k \end{aligned} \tag{4.14}$$

where the last equality is obtained by integrating by parts and restricting to second order. In conclusion, the contribution to the second-order action coming from the WZ terms contains only *vector* perturbations and reads

$$S^{\rm WZ}_{(2){\rm vector}} = -\frac{T_3(2\pi\alpha')^2}{2}\int {\rm d}t\, {\rm d}^3x\, a^3\dot{C}_0\, \epsilon^{ijk}(\partial_i A_j)A_k\,. \tag{4.15}$$

JCAP04(2009)021

5 Linear scalar perturbations

As discussed above, the new terms in the second order *scalar* action come only from the DBI determinant and depend on A_0 through $(\partial\Lambda)^2$. Thus, if we now vary the action with respect to A_0, we simply obtain the constraint $\partial^2\Lambda = 0$ or

$$\Lambda = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad A_0 = \frac{1}{\lambda} b_{IJ}\dot{\phi}^I Q^J . \tag{5.1}$$

(Note that A_0 vanishes in the case of a single field but is non-zero in general.) Thus the contribution of the scalar second-order action eq. (4.11) vanishes.

As a consequence, the energy and momentum constraints are exactly the same as those of [18], and the linear expressions for δN and ψ are

$$\delta N = \frac{1}{2Hc_s}\dot{\phi}_I Q^I , \tag{5.2}$$

$$\psi = -\frac{a^2}{2H}\partial^{-2}\left[\frac{1}{c_s^3}\dot{\phi}_I\left(\dot{Q}^I + \Gamma^I_{JK}\dot{\phi}^J Q^K\right) + V_{,I}Q^I + \frac{(1-c_s)(1+c_s-2c_s^2)}{2f^2c_s^3}f_{,I}Q^I + \left(3H^2 - \frac{\dot{\sigma}^2}{2c_s^3}\right)\frac{\dot{\phi}_I Q^I}{Hc_s}\right] , \tag{5.3}$$

(as well as $\bar{N}_i = 0$). Hence on substituting eq. (5.1) as well as eqs. (5.2)–(5.3) back in the scalar second-order action, all new terms arising from the bulk forms vanish, and one obtains exactly the same second-order action as in our previous works [18, 19].

Let us summarize those results, which will be useful in section 8. First define the unit vector (with respect to the metric G_{IJ}) tangent to the background trajectory in field space

$$e^I \equiv \frac{\dot{\phi}^I}{\dot{\sigma}} \tag{5.4}$$

where $\dot{\sigma}$ was defined in eq. (3.4), and

$$\tilde{G}_{IJ} = \frac{1}{c_s^2}e_I e_J + (G_{IJ} - e_I e_J) . \tag{5.5}$$

The second-order action for the scalar perturbations Q^I then takes the form [18]

$$S_{(2)\text{scalar}} = \frac{1}{2}\int \mathrm{d}t\,\mathrm{d}^3x\,a^3\left[\frac{1}{c_s}\left(\tilde{G}_{IJ}\mathcal{D}_t Q^I \mathcal{D}_t Q^J - c_s^2\tilde{G}_{IJ}h^{ij}\partial_i Q^I \partial_j Q^J\right) - \tilde{\mathcal{M}}_{IJ}Q^I Q^J + \frac{f_{,J}\dot{\sigma}^2}{c_s^3}\dot{\phi}_I Q^J \mathcal{D}_t Q^I\right] , \tag{5.6}$$

where we have introduced the time covariant derivative $\mathcal{D}_t Q^I \equiv \dot{Q}^I + \Gamma^I_{JK}\dot{\phi}^J Q^K$ (and $\mathcal{R}_{IKLJ}$ will denote the Riemann tensor associated to G_{IJ}). The mass matrix which appears above is

$$\tilde{\mathcal{M}}_{IJ} = \mathcal{D}_I\mathcal{D}_J V - \frac{(1-c_s)^2}{2c_s}\frac{\mathcal{D}_I\mathcal{D}_J f}{f^2} - \frac{(1-c_s)^3(1+3c_s)}{4c_s^3}\frac{f_{,I}f_{,J}}{f^3} + 2\dot{H}\mathcal{R}_{IKLJ}e^K e^L + \frac{(1-c_s^2)^2}{2c_s^4 f^2 H}f_{,(I}\dot{\phi}_{J)} + \frac{\dot{H}}{2H^2c_s^4}\left(1-c_s^2\right)\dot{\phi}_I\dot{\phi}_J - \frac{1}{a^3}\mathcal{D}_t\left[\frac{a^3}{2Hc_s^4}\left(1+c_s^2\right)\dot{\phi}_I\dot{\phi}_J\right] . \tag{5.7}$$

JCAP04(2009)021

The fact that the time and spatial gradient terms in eq. (5.6) are multiplied by the same factor $\tilde{G}_{IJ}$ implies that *all* scalar perturbations propagate at the same speed, namely the speed of sound c_s.

We can gain a better intuition for the dynamics of perturbations described by the action (5.6) by restricting our attention to a two-field system, $I = 1, 2$. Then one can unambiguously decompose perturbations into (instantaneous) adiabatic and entropic modes by projecting respectively, parallel and perpendicular to the background trajectory in field space. In other words, we introduce the basis $\{e_\sigma, e_s\}$ where $e^I_\sigma = e^I$, and e^I_s is the entropy unit vector orthogonal to e^I_σ:

$$e^I_\sigma \equiv e^I, \qquad G_{IJ} e^I_s e^J_s = 1, \qquad G_{IJ} e^I_s e^J_\sigma = 0. \tag{5.8}$$

It is then convenient, after going to conformal time $\tau = \int \mathrm{d}t/a(t)$, to work in terms of the canonically normalized fields given by

$$v_\sigma = \frac{a}{c_s^{3/2}}\, e_{\sigma I} Q^I\,, \qquad v_s = \frac{a}{\sqrt{c_s}}\, e_{sI} Q^I\,. \tag{5.9}$$

In particular, in terms of these the scalar action eq. (5.6) simplifies remarkably [17, 18] to

$$\begin{aligned} S_{(2)\mathrm{scalar}} = \frac{1}{2}\int \mathrm{d}\tau\, \mathrm{d}^3x \Big[& v_\sigma'^2 + v_s'^2 - 2\xi v_\sigma' v_s - c_s^2 \left[(\partial v_\sigma)^2 + (\partial v_s)^2\right] + \frac{z''}{z} v_\sigma^2 \\ & + \left(\frac{z_s''}{z_s} - a^2\mu_s^2\right) v_s^2 + 2\,\frac{z'}{z}\xi v_\sigma v_s \Big] \end{aligned} \tag{5.10}$$

where a prime denotes a derivative with respect to conformal time, leading to the equations of motion (in Fourier space):

$$v_\sigma'' - \xi v_s' + \left(c_s^2 k^2 - \frac{z''}{z}\right) v_\sigma - \frac{(z\xi)'}{z} v_s = 0\,, \tag{5.11}$$

$$v_s'' + \xi v_\sigma' + \left(c_s^2 k^2 - \frac{z_s''}{z_s} + a^2\mu_s^2\right) v_s - \frac{z'}{z}\xi v_\sigma = 0\,. \tag{5.12}$$

Here we have introduced the two background-dependent functions

$$z = \frac{a\dot{\sigma}}{H c_s^{3/2}}, \qquad z_s = \frac{a}{\sqrt{c_s}}\,; \tag{5.13}$$

the coupling between v_σ and v_s depends on

$$\xi = -a\sqrt{\frac{f}{1-c_s^2}}\left[\frac{(1-c_s)^2}{f^2} f_{,s} + (1+c_s^2) V_{,s}\right] \tag{5.14}$$

(where $V_{,s} \equiv e^I_s V_{,I}\,, V_{;ss} \equiv e^I_s e^J_s \mathcal{D}_I \mathcal{D}_J V$ and similarly in the following), and finally the effective mass appearing above is given by

$$\begin{aligned} \mu_s^2 \equiv\; & c_s V_{;ss} - \frac{f}{1-c_s^2} V_{,s}^2 - \frac{(1-c_s)^3}{4(1+c_s)f^3} f_{,s}^2 - \frac{(2+c_s)(1-c_s)}{(1+c_s)f} f_{,s} V_{,s} \\ & - \frac{(1-c_s)^2}{2f^2} f_{;ss} + \frac{1}{2}\dot{\sigma}^2 \mathcal{R}_G\,. \end{aligned} \tag{5.15}$$

JCAP04(2009)021

($\mathcal{R}_G$ is the scalar Riemann curvature in field space.)

Following the standard procedure (see e.g. [33, 34]), eqs. (5.11) and (5.12) can be used as the starting point to quantize the perturbations and derive the scalar and tensor spectra generated during two-field DBI inflation. Note that the amplification of the quantum fluctuations occurs when the scales cross out the *sound horizon*, i.e. when $kc_s = aH$, as in k-inflation [15]. The scalar spectrum depends on the slow-varying parameters

$$\epsilon \equiv -\frac{\dot{H}}{H^2}, \qquad \eta = \frac{\dot{\epsilon}}{H\epsilon}, \qquad s = \frac{\dot{c}_s}{Hc_s}, \tag{5.16}$$

which are assumed to be small. The scalar amplitude, expressed in terms of the comoving curvature perturbation $\mathcal{R} = v_\sigma/z$ is given by

$$\mathcal{P}_\mathcal{R} = \frac{\mathcal{P}_{\mathcal{R}_*}}{\cos^2\Theta} = \left(\frac{H^2}{8\pi^2\epsilon\, c_s}\right)_* \frac{1}{\cos^2\Theta}, \tag{5.17}$$

where the index $*$ means that the corresponding quantity is evaluated at sound horizon crossing, and the parameter Θ quantifies the amplification of the curvature perturbation *after* horizon crossing as a consequence of the transfer of entropy perturbations into curvature perturbations. This feeding of the curvature perturbation by the entropy modes is a characteristic feature of multi-field inflation, either with standard kinetic terms or with non standard kinetic terms (see [35] and [36–40] for other recent illustrations in the context of string inflation). For $\Theta = 0$ there is no transfer and eq. (5.17) reduces to the standard result of single field DBI inflation. From eq. (5.17) the spectral index is given by [18]

$$n_\mathcal{R} - 1 \equiv \frac{\mathrm{d}\ln\mathcal{P}_\mathcal{R}}{\mathrm{d}\ln k} = -2\epsilon_* - \eta_* - s_* - \alpha_*\sin(2\Theta) - 2\beta_*\sin^2\Theta \tag{5.18}$$

with

$$\alpha = \frac{\xi}{aH}, \qquad \beta \simeq \frac{s}{2} - \frac{\eta}{2} - \frac{1}{3H^2}\left(\mu_s^2 + \frac{\Xi^2}{c_s^2}\right), \qquad \Xi \equiv \frac{c_s}{a}\xi, \tag{5.19}$$

and where we have kept only the leading order terms in the expression for β. Finally, the power spectrum for tensor modes in multifield DBI inflation is unmodified relative to standard multifield inflation, and hence the tensor to scalar ratio is given by

$$r \equiv \frac{\mathcal{P}_\mathcal{T}}{\mathcal{P}_\mathcal{R}} = 16\,\epsilon\, c_s \cos^2\Theta. \tag{5.20}$$

We will return to the above quantities in section 8, where we discuss various theoretical and observational constraints.

6 Linear vector perturbations

In this section we consider the vector perturbations A_i which, at linear order, are decoupled from scalar perturbations.

The second order action for vector perturbations has two parts: that coming from the DBI determinant given in eq. (4.12) as well as the contribution from the WZ term given in eq. (4.15). In the same way as for the scalar perturbations in the previous section, we work in conformal time τ and introduce the canonically normalized fields

$$v_i = (2\pi\alpha')\sqrt{T_3}\left(\frac{e^{-\Phi/2}}{\sqrt{c_s}}\right) A_i\,. \tag{6.1}$$

JCAP04(2009)021

After an integration by parts, the second-order action for vector perturbations becomes

$$S_{(2)\text{vector}} = \frac{1}{2}\int \mathrm{d}\tau\, \mathrm{d}^3x \left[v_i'^2 - c_s^2(\partial v_i)^2 + \frac{\chi''}{\chi} v_i^2 - \frac{1}{\chi^2} C_0' \epsilon^{ijk} v_i \partial_j v_k \right] \tag{6.2}$$

where

$$\chi \equiv \frac{e^{-\Phi/2}}{\sqrt{c_s}}\,. \tag{6.3}$$

(Action (6.2) for vector perturbations if the analogue of action (5.10) for scalar perturbations.) When $C_0' = 0$, each Fourier mode satisfies the equation of motion

$$v_i'' + \left(k^2 c_s^2 - \frac{\chi''}{\chi} \right) v_i = 0\,. \tag{6.4}$$

One can see that the vector perturbations again propagate at the sound speed c_s. eq. (6.4) is very similar to those for the scalar perturbations eqs. (5.11) and (5.12) — however, while scalar perturbations are amplified, there is no amplification of the vector modes. The reason is that the term in χ''/χ can simply be absorbed by a suitable redefinition of the time derivative, as was already noticed in [41]. A more intuitive way to understand this result is to rewrite the homogeneous induced metric given in eq. (4.8) in a form which is manifestly conformal to the Minkowski metric

$$\gamma_{\mu\nu}\mathrm{d}x^\mu \mathrm{d}x^\nu = \frac{e^{\Phi/2}}{\sqrt{f T_3}} a^2 \left(-\mathrm{d}\eta^2 + \mathrm{d}\vec{x}^2 \right)\,, \tag{6.5}$$

and which naturally defines a new time variable η by $c_s \mathrm{d}t = a \mathrm{d}\eta$. In terms of η and the canonically normalized field

$$\psi_i = \sqrt{c_s} v_i = 2\pi\alpha' \sqrt{T_3} e^{-\frac{1}{2}\Phi} A_i \tag{6.6}$$

the action indeed simplifies to

$$S_{(2)\,\text{vector}} = \frac{1}{2}\int \mathrm{d}\eta\, \mathrm{d}^3x \left(\frac{\mathrm{d}\psi_i}{\mathrm{d}\eta}\frac{\mathrm{d}\psi_i}{\mathrm{d}\eta} + \psi_i \Delta \psi_i + e^{\Phi/2} \frac{\mathrm{d}^2 e^{-\Phi/2}}{\mathrm{d}\eta^2} \psi_i \psi_i - \frac{\mathrm{d}C_0}{\mathrm{d}\eta} e^{\Phi} \epsilon^{ijk} \psi_i \partial_j \psi_k \right). \tag{6.7}$$

As usual we now expand the vector field in terms of annihilation and creation operators, $\hat{a}_{p\boldsymbol{k}}$ and $\hat{a}^\dagger_{p\boldsymbol{k}}$

$$\psi_i(\eta, x^i) = \int \frac{\mathrm{d}^3k}{(2\pi)^{3/2}} \sum_{p=1}^{2} \epsilon_{ip}(\boldsymbol{k}) \left[\psi_p(\eta) \hat{a}_{p\boldsymbol{k}} e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}} + \psi_p^*(\eta) \hat{a}^\dagger_{p\boldsymbol{k}} e^{-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}} \right], \tag{6.8}$$

where the transverse polarization vectors $\epsilon_{ip}(\boldsymbol{k})$ defined by

$$\sum_{p=1}^{2} \epsilon_p^i(\boldsymbol{k}) \epsilon_{jp}(\boldsymbol{k}) = \delta_j^i - \delta_{jl} \frac{k^i k^l}{k^2} \tag{6.9}$$

are introduced for a consistent quantization in the Coulomb gauge. The last term in eq. (6.7) introduces a mixing between the two linear polarisation degrees of freedom of the photon

JCAP04(2009)021

ψ_p. This interaction can be diagonalized by considering instead the two circular polarisation degrees of freedom

$$\psi_{(\pm)} = \psi_1 \pm i\psi_2 \tag{6.10}$$

so that the corresponding equations of motion are

$$\frac{\mathrm{d}^2\psi_{(\pm)}}{\mathrm{d}\eta^2} + \left(k^2 - e^{\frac{1}{2}\Phi}\frac{\mathrm{d}^2 e^{-\frac{1}{2}\Phi}}{\mathrm{d}\eta^2} \mp k\frac{\mathrm{d}C_0}{\mathrm{d}\eta}e^{\Phi}\right)\psi_{(\pm)} = 0\,. \tag{6.11}$$

Thus, when the dilaton and axion are η-independent, or equivalently homogeneous in the compact dimensions, there is no amplification of the vector field. The underlying reason is that the action, written in terms of the induced metric, is still conformally invariant (see eq. (4.7)) in the same way that standard electromagnetic theory is conformally invariant [42]. From eq. (6.11), on the other hand, a time-varying dilaton and/or axion causes the vector field to be amplified.

Indeed, other than the replacement of η by conformal time τ, eq. (6.11) is identical to that obtained in standard electromagnetism coupled to a dilaton and an axion [43, 44]. In that case, eq. (6.11) has been used to compute the amplitude of quantum fluctuations generated during inflation, with the aim of addressing the question of the generation of primordial magnetic fields (see e.g. refs. [45–47] for reviews). In the context of DBI inflation, the gauge field A_μ is localized on the D-brane responsible for inflation, and is not obviously related to our standard electromagnetic field: hence the applicability of eq. (6.11) to magnetogenesis is not immediate. In particular the brane responsible for inflation is not usually the standard model brane, and understanding how perturbations of the gauge field in one throat might couple to perturbations of electromagnetic fields on the standard model brane in a (possibly) different throat, is a challenging open question.

7 Non-Gaussianities

In this section, we analyse the effects of the NS-NS and R-R bulk fields on non-Gaussianities. We thus calculate the third-order action for the scalar-type perturbations. In order to do so, it is sufficient to calculate N, N_i and A_0 to first order: A_0 is given in eq. (5.1) and δN and ψ are given respectively in eqs. (5.2) and (5.3) (and $\bar{N}_i = 0$).

First recall that since $\Lambda = 0$, the scalar part of $\mathcal{F}$ vanishes to linear order (see eq. (4.9)). Furthermore since $\mathcal{F}$ enters the DBI action eq. (2.18) at least quadratically, the third-order DBI action for the purely scalar perturbations Q^I is exactly the same as in [18, 19]. Let us now turn to the WZ action. The potential term eq. (2.24) and its non-linearities were already considered in our previous work, hence we focus on the remaining part, $S^{[2]}_{\mathrm{WZ}}$ given in eq. (2.22) and which can be rewritten as

$$\begin{aligned} S^{[2]}_{\mathrm{WZ}} = -T_3 \Bigg[&\int_{\mathrm{brane}} \hat{C}_2 \wedge \left(\hat{B}_2 + 2\pi\alpha' F_2\right) \\ &+ \frac{1}{2}\int_{\mathrm{brane}} C_0 \left(\hat{B}_2 + 2\pi\alpha' F_2\right) \wedge \left(\hat{B}_2 + 2\pi\alpha' F_2\right)\Bigg]\,. \end{aligned} \tag{7.1}$$

Since the scalar part of $\mathcal{F}$ is at least second order in perturbations, the same is true for $\hat{B}_2 + 2\pi\alpha' F_2$. Therefore, the second line in eq. (7.1) does not contribute to the third-order

JCAP04(2009)021

scalar action. As for the first term, its contribution is

$$S_{(3)\,\mathrm{scalar}} \supset -\frac{1}{2T_3}\int \mathrm{d}^4x\, a^3\, C_{IJ}B_{KL}\dot{\phi}_I\epsilon^{ijk}\partial_i Q^J\partial_j Q^K\partial_k Q^L$$
$$= -\frac{1}{2T_3}\int \mathrm{d}^4x\, \partial_i\left(a^3 C_{IJ}B_{KL}\dot{\phi}_I\epsilon^{ijk}Q^J\partial_j Q^K\partial_k Q^L\right)\,, \tag{7.2}$$

and hence is a total spatial derivative. Thus we obtain the remarkable result that *the action, at second and third order in scalar perturbations, is not at all modified by the bulk forms.* In the two-field case, the scalar third-order action in the small sound speed limit is given by [18, 19]

$$S^{(\mathrm{main})}_{(3)\,scalar} = \int \mathrm{d}t\,\mathrm{d}^3x\,\left\{\frac{a^3}{2c_s^5\dot{\sigma}}\left[(\dot{Q}_\sigma)^3 + c_s^2\dot{Q}_\sigma(\dot{Q}_s)^2\right]\right.$$
$$\left. -\frac{a}{2c_s^3\dot{\sigma}}\left[\dot{Q}_\sigma(\nabla Q_\sigma)^2 - c_s^2\dot{Q}_\sigma(\nabla Q_s)^2 + 2c_s^2\dot{Q}_s\nabla Q_\sigma\nabla Q_s)\right]\right\} \tag{7.3}$$

where

$$Q_\sigma \equiv e_{\sigma I}Q^I\,, \qquad Q_s \equiv e_{sI}Q^I \tag{7.4}$$

are the instantaneous adiabatic and entropic perturbations respectively.

From eq. (7.3) one can calculate the bispectrum of the curvature perturbation [18]. It has the same shape — equilateral — as in single field DBI inflation, but the corresponding non-Gaussianity parameter f^{eq}_{NL} is reduced by the multiple-field effects:

$$f^{eq}_{\mathrm{NL}} = -\frac{35}{108}\frac{1}{c_s^2}\cos^2\Theta \simeq -\frac{\cos^2\Theta}{3c_s^2} \qquad (c_s \ll 1) \tag{7.5}$$

where the transfer parameter Θ was introduced in eq. (5.17). Of course, at third-order in the action, there are non-trivial interactions between the scalars Q^I and the vector modes A_i, which lead, via loop effects, to corrections to the spectrum and bispectrum, as was explored recently in a different context [48]. Such a study is beyond beyond the scope of the present paper and we leave it for future work.

A local-type contribution to primordial non-Gaussianities can also be expected, due to the nonlinear evolution of perturbations on superhorizon scales. It could be estimated by using the non-linear formalism developed in [49] and recently extended to a wide class of multifield inflationary models with non-standard kinetic terms in [50].

Besides its amplitude and shape, the scale dependence of non-Gaussianities is also an interesting probe of the early universe physics and its effects on cosmological structures, in particular, have been studied recently in e.g. [51]. We therefore define

$$n^{eq}_{\mathrm{NG}} = \frac{\mathrm{d}\,\ln\, f^{eq}_{\mathrm{NL}}}{\mathrm{d}\ln k}\,, \tag{7.6}$$

which is insensitive to the model-dependent non-Gaussianities of local type. From eq. (7.5), it follows that to leading order

$$n^{eq}_{\mathrm{NG}} = -2s_* + \alpha_*\sin(2\Theta) + 2\beta_*\sin^2\Theta \tag{7.7}$$

which reduces to the well known single field result for $\Theta = 0$. We now turn to the observational constraints on multi-field DBI inflation.

JCAP04(2009)021

8 Gravitational wave constraints on DBI inflation

The constraints on the tensor to scalar ratio r in the case of *single-field* DBI inflation are very severe, essentially meaning that the simplest single-field UV DBI inflation models are ruled out. Indeed, two bounds on r have been obtained [24, 25]. The first is a *lower bound*, valid when $c_s \ll 1$, and given by $r \gtrsim 0.1(1 - n_{\mathcal{R}})$. For $n_{\mathcal{R}}$ given by the best fit value obtained by WMAP5 [52] this becomes $r \gtrsim 10^{-3}$. The second bound is an *upper bound*, typically $r \lesssim 10^{-7}$, applicable in standard type IIB compactifications. Clearly these are not easily compatible! More elaborate (though still effectively single-field) models have been considered in order to evade these bounds, involving wrapped branes [53–57] or multiple branes [58, 59] rather than a single D3-brane. Here, however, we stick with a single D3-brane, but consider the multi-field aspects: we show that the constraints mentioned above are not incompatible in this more general context.

We now discuss the origin of the upper bound, originally due to Lyth [23], in the context of multi-field DBI inflation. The starting point is the deceleration parameter ϵ defined in eq. (5.16)

$$\epsilon = \frac{\dot{\sigma}^2}{2c_s H^2 M_P^2} \tag{8.1}$$

where we have reinstated the Planck mass M_P (previously put to unity) and where $\dot{\sigma}^2 = G_{IJ}\dot{\phi}^I\dot{\phi}^J$, as defined in eq. (3.4). Note that in single-field DBI $\dot{\sigma}^2$ reduces to $\dot{\phi}^2$ where ϕ is the inflaton. Using eq. (5.20), the tensor to scalar ratio can be written as

$$r = 8\frac{\dot{\sigma}^2}{H^2 M_P^2}\cos^2\Theta = \frac{8}{M_P^2}\left(\frac{d\sigma}{dN}\right)^2\cos^2\Theta, \tag{8.2}$$

where N is the number of e-folds and $\mathrm{d}\sigma$ is the infinitesimal distance along the background trajectory in field space, $\mathrm{d}\sigma = \dot{\sigma}\mathrm{d}t$. Let us define

$$N_{\rm eff} \equiv \int_0^{N_{end}} \mathrm{d}N \left(\frac{r}{r_{\rm CMB}}\right)^{1/2}\frac{1}{\cos\Theta} = \frac{4}{r_{\rm CMB}^{1/2}}\int_0^{N_{end}} \mathrm{d}N\,\sqrt{\epsilon c_s} \tag{8.3}$$

where $N_{\rm end}$ in the number of e-folds from the time the present Hubble scale exits the horizon to the end of inflation, and $r_{\rm CMB}$ corresponds to the observable tensor to scalar ratio. Our definition (8.3) differs from that given in [24] only by the inclusion of $\cos\Theta$. Combining eqs. (8.2) and (8.3), $r_{\rm CMB}$ is thus related to the distance along the background trajectory $\Delta\sigma = \int_0^{N_{end}} \mathrm{d}\sigma$ by the expression

$$r_{\rm CMB} = \frac{8}{N_{\rm eff}^2}\left(\frac{\Delta\sigma}{M_P}\right)^2. \tag{8.4}$$

In single-field DBI, $\Delta\sigma = \Delta\phi$, and since the field variation is limited by the size of the throat, one obtains the upper bound cited above [25]. With respect to single field DBI inflation, multi-field effects act in two opposite directions. The entropy-adiabatic transfer tends to increase $N_{\rm eff}^2$ (assuming the same evolution $r(N)$), which leads to a smaller $r_{\rm CMB}$. However, in warped flux compactifications with a conical throat, the field variation can now be larger than in the single-field case (corresponding to a purely radial motion) since the size of the throat limits only the radial displacement of the brane, not the angular displacement.

JCAP04(2009)021

In fact the exact size of the upper bound on r is not the crucial component of this discussion. The most dramatic change comes from the second constraint (formerly a lower bound), to which we now turn. For that purpose, note that using the definitions given in eq. (5.16), η can be reexpressed in terms of the two other parameters ϵ and s, as well as the time derivative of the warp factor f. Indeed, the time derivative of ϵ in eq. (8.1) gives

$$\eta = \frac{2\ddot{\sigma}}{H\dot{\sigma}} - s + 2\epsilon = 2\epsilon - \frac{1+c_s^2}{1-c_s^2}s - \frac{\dot{f}}{Hf}, \tag{8.5}$$

where we have used the relation $\dot{\sigma}^2 = (1-c_s^2)/f$ and its derivative for the second equality. After substitution in (5.18), and using $r = 16\epsilon\cos^3\Theta/\sqrt{3|f_{\rm NL}|}$, one obtains

$$1 - n_{\mathcal{R}} \simeq \frac{\sqrt{3|f_{\rm NL}|}r}{4\cos^3\Theta} - \frac{\dot{f}}{Hf} + \alpha_* \sin(2\Theta) + 2\beta_* \sin^2\Theta \tag{8.6}$$

where we have neglected a term proportional to $c_s^2 s_*$, since s_* is small and we work in the relativistic regime ($c_s^2 \ll 1$). Note that the last two terms in (8.6) are related to the observables $n_{\rm NG}^{eq}$ and s_* through eq. (7.7).

In the UV single field case, in which $\dot{f} > 0$ and $\Theta = 0$, the last two terms in eq. (8.6) vanish, and this leads to the lower bound

$$r > \frac{4}{\sqrt{3|f_{\rm NL}|}}(1 - n_{\mathcal{R}}) \qquad \text{(single field)} \tag{8.7}$$

From the upper bound on $|f_{\rm NL}|$ from WMAP5

$$-151 < f_{\rm NL}^{\rm equil} < 253 \qquad \text{at } 95\% \text{ C.L.}, \tag{8.8}$$

one obtains $r \gtrsim 0.1\,(1 - n_{\mathcal{R}}) \gtrsim 10^{-3}$.

In the multi-field case, still assuming a UV scenario with $\dot{f} > 0$, one immediately sees that the detection of a deviation from scale-invariance is no longer incompatible with a very low prediction for the amount of gravitational waves. Indeed, when there is a non-negligible transfer between entropy and adiabatic modes ($\Theta \neq 0$), the last two terms of eq. (8.6) can now give a significant contribution to $(1 - n_{\mathcal{R}})$, even when r is too small to be detected. This shows that the very stringent constraint eq. (8.7) no longer applies in a multi-field setup.

9 Conclusions

In the present work, we have analysed the generation of primordial perturbations in the context of multi-field DBI inflation, by taking into account the various bulk form fields, which influence the dynamics of a D3-brane moving in a six-dimensional compact space.

For linear perturbations of the scalar type, we have shown that, in the presence of a bulk form B_2, the fluctuations of the scalar fields (i.e. fluctuations of the brane position in the compact space) induce fluctuations of the U(1) gauge field confined on the brane. This precise relation between the two entails an exact compensation in the second-order scalar action between the terms coming from the perturbations of F_2 and the terms coupling the scalar field perturbations to the bulk fields. As a consequence, the second-order action expressed in terms of the true scalar degrees of freedom is exactly the same as that obtained

JCAP04(2009)021

by ignoring the bulk form fields and the U(1) gauge field on the brane. The same cancellation occurs in the third-order scalar action.

A new feature is the presence of two vector degrees of freedom arising from the U(1) gauge field confined on the brane. If the dilaton and axion are trivial, i.e. homogeneous along the compact dimensions, the dynamics of the (linear) vector modes is governed by an action which is quite similar to that of standard electromagnetism, with the exception that gauge field is coupled to the induced background metric rather than the usual FLRW metric. This property, well-known in other contexts and which we have applied to cosmology here, explains in a transparent way why the gauge field quantum fluctuations are not amplified, as has been pointed out recently. Amplification is possible with a non-trivial dilaton or axion, as in similar mechanisms proposed to generate primordial magnetic fields in the very early Universe. However, since the gauge field under consideration is a priori distinct from any standard model gauge field, its relevance to magnetogenesis remains to be established.

Finally, we have extended the constraints on gravitational waves for *multi-field* DBI-inflation. This analysis is especially important as it has been shown that typical UV *single-field* DBI inflation is ruled out by incompatible constraints on the tensor to scalar ratio: on the one hand, the amount of gravitational waves generated in most models derived from string theory is extremely small; on the other hand, the deviation of the scalar spectrum from exact scale invariance, which is now favoured by CMB observations, implies a non-negligible amount of gravitational waves, at least much higher than the typical theoretical predictions.

For multi-field DBI inflation, the upper bound for the predicted amount of gravitational waves can change, but no dramatically so in general. However, the second constraint on gravitational waves is no longer valid in multi-field inflation since the observed spectral index depends not only on r but also on the transfer between entropy and adiabatic modes. Therefore, a tiny amount of gravitational waves is perfectly compatible with a deviation from scale invariance if an entropy-adiabatic transfer took place while the cosmological perturbations observed today were generated during inflation.

JCAP04(2009)021

Acknowledgments

We would like to thank Emilian Dudas, Elias Kiritsis and Francesco Nitti, and particularly Costas Bachas, for useful discussions.

References

[1] L. McAllister and E. Silverstein, *String Cosmology: a Review*, *Gen. Rel. Grav.* **40** (2008) 565 [arXiv:0710.2951] [SPIRES].

[2] C.P. Burgess, *Lectures on Cosmic Inflation and its Potential Stringy Realizations*, PoS(P2GC)008 [*Class. Quant. Grav.* **24** (2007) S795] [arXiv:0708.2865] [SPIRES].

[3] R. Kallosh, *On Inflation in String Theory*, *Lect. Notes Phys.* **738** (2008) 119 [hep-th/0702059] [SPIRES].

[4] J.M. Cline, *String cosmology*, hep-th/0612129 [SPIRES].

[5] S.H. Henry Tye, *Brane inflation: string theory viewed from the cosmos*, *Lect. Notes Phys.* **737** (2008) 949 [hep-th/0610221] [SPIRES].

[6] D. Baumann and L. McAllister, *Advances in Inflation in String Theory*, arXiv:0901.0265 [SPIRES].

[7] N. Barnaby, Z. Huang, L. Kofman and D. Pogosyan, *Cosmological Fluctuations from Infra-Red Cascading During Inflation*, arXiv:0902.0615 [SPIRES].

[8] D. Green, B. Horn, L. Senatore and E. Silverstein, *Trapped Inflation*, arXiv:0902.1006 [SPIRES].

[9] C. Armendariz-Picon, T. Damour and V.F. Mukhanov, *k-Inflation*, *Phys. Lett.* **B 458** (1999) 209 [hep-th/9904075] [SPIRES].

[10] G.W. Gibbons, *Cosmological evolution of the rolling tachyon*, *Phys. Lett.* **B 537** (2002) 1 [hep-th/0204008] [SPIRES].

[11] E. Silverstein and D. Tong, *Scalar Speed Limits and Cosmology: acceleration from D-cceleration*, *Phys. Rev.* **D 70** (2004) 103505 [hep-th/0310221] [SPIRES].

[12] M. Alishahiha, E. Silverstein and D. Tong, *DBI in the sky*, *Phys. Rev.* **D 70** (2004) 123505 [hep-th/0404084] [SPIRES].

[13] X. Chen, *Multi-throat brane inflation*, *Phys. Rev.* **D 71** (2005) 063506 [hep-th/0408084] [SPIRES].

[14] X. Chen, *Inflation from warped space*, *JHEP* **08** (2005) 045 [hep-th/0501184] [SPIRES].

[15] J. Garriga and V.F. Mukhanov, *Perturbations in k-inflation*, *Phys. Lett.* **B 458** (1999) 219 [hep-th/9904176] [SPIRES].

[16] X. Chen, M.-x. Huang, S. Kachru and G. Shiu, *Observational signatures and non-Gaussianities of general single field inflation*, *JCAP* **01** (2007) 002 [hep-th/0605045] [SPIRES].

[17] D. Langlois and S. Renaux-Petel, *Perturbations in generalized multi-field inflation*, *JCAP* **04** (2008) 017 [arXiv:0801.1085] [SPIRES].

[18] D. Langlois, S. Renaux-Petel, D.A. Steer and T. Tanaka, *Primordial perturbations and non-Gaussianities in DBI and general multi-field inflation*, *Phys. Rev.* **D 78** (2008) 063523 [arXiv:0806.0336] [SPIRES].

[19] D. Langlois, S. Renaux-Petel, D.A. Steer and T. Tanaka, *Primordial fluctuations and non-Gaussianities in multi- field DBI inflation*, *Phys. Rev. Lett.* **101** (2008) 061301 [arXiv:0804.3139] [SPIRES].

[20] F. Arroja, S. Mizuno and K. Koyama, *Non-Gaussianity from the bispectrum in general multiple field inflation*, *JCAP* **08** (2008) 015 [arXiv:0806.0619] [SPIRES].

[21] I.R. Klebanov and M.J. Strassler, *Supergravity and a confining gauge theory: duality cascades and χSB-resolution of naked singularities*, *JHEP* **08** (2000) 052 [hep-th/0007191] [SPIRES].

[22] C.P. Herzog, I.R. Klebanov and P. Ouyang, *Remarks on the warped deformed conifold*, hep-th/0108101 [SPIRES].

[23] D.H. Lyth, *What would we learn by detecting a gravitational wave signal in the cosmic microwave background anisotropy?*, *Phys. Rev. Lett.* **78** (1997) 1861 [hep-ph/9606387] [SPIRES].

[24] D. Baumann and L. McAllister, *A Microscopic Limit on Gravitational Waves from D-brane Inflation*, *Phys. Rev.* **D 75** (2007) 123508 [hep-th/0610285] [SPIRES].

[25] J.E. Lidsey and I. Huston, *Gravitational wave constraints on Dirac- Born-Infeld inflation*, *JCAP* **07** (2007) 002 [arXiv:0705.0240] [SPIRES].

[26] S.B. Giddings, S. Kachru and J. Polchinski, *Hierarchies from fluxes in string compactifications*, *Phys. Rev.* **D 66** (2002) 106006 [hep-th/0105097] [SPIRES].

[27] R.G. Leigh, *Dirac- Born-Infeld Action from Dirichlet σ-model*, *Mod. Phys. Lett.* **A 4** (1989) 2767 [SPIRES].

JCAP04(2009)021

[28] C.P. Bachas, *Lectures on D-branes*, hep-th/9806199 [SPIRES].

[29] J. Polchinski, *String theory. Vol. 1: An introduction to the bosonic string*, Cambridge University Press, Cambridge U.K. (1998) [SPIRES]; *String theory. Vol. 2: Superstring theory and beyond*, Cambridge University Press, Cambridge U.K. (1998) [SPIRES].

[30] E. Babichev, P. Brax, C. Caprini, J. Martin and D. Steer, *Dirac Born Infeld (DBI) Cosmic Strings*, *JHEP* **03** (2009) 091 [arXiv:0809.2013] [SPIRES].

[31] M. Born and L. Infeld, *Foundations of the new field theory*, *Proc. Roy. Soc. Lond.* **A 144** (1934) 425 [SPIRES].

[32] N. Seiberg and E. Witten, *String theory and noncommutative geometry*, *JHEP* **09** (1999) 032 [hep-th/9908142] [SPIRES].

[33] V.F. Mukhanov, H.A. Feldman and R.H. Brandenberger, *Theory of cosmological perturbations. Part 1. Classical perturbations. Part 2. Quantum theory of perturbations. Part 3. Extensions*, *Phys. Rept.* **215** (1992) 203 [SPIRES].

[34] D. Langlois, *Inflation, quantum fluctuations and cosmological perturbations*, hep-th/0405053 [SPIRES].

[35] A.A. Starobinsky and J. Yokoyama, *Density fluctuations in Brans-Dicke inflation*, gr-qc/9502002 [SPIRES].

[36] Z. Lalak, D. Langlois, S. Pokorski and K. Turzynski, *Curvature and isocurvature perturbations in two-field inflation*, *JCAP* **07** (2007) 014 [arXiv:0704.0212] [SPIRES].

[37] A.C. Vincent and J.M. Cline, *Curvature Spectra and NonGaussianities in the Roulette Inflation Model*, *JHEP* **10** (2008) 093 [arXiv:0809.2982] [SPIRES].

[38] A. Ashoorioon, A. Krause and K. Turzynski, *Energy Transfer in Multi Field Inflation and Cosmological Perturbations*, *JCAP* **02** (2009) 014 [arXiv:0810.4660] [SPIRES].

[39] H.-Y. Chen, J.-O. Gong and G. Shiu, *Systematics of multi-field effects at the end of warped brane inflation*, *JHEP* **09** (2008) 011 [arXiv:0807.1927] [SPIRES].

[40] S.H.H. Tye, J. Xu and Y. Zhang, *Multi-field Inflation with a Random Potential*, arXiv:0812.1944 [SPIRES].

[41] K. Bamba, N. Ohta and S. Tsujikawa, *Generic estimates for magnetic fields generated during inflation including Dirac- Born-Infeld theories*, *Phys. Rev.* **D 78** (2008) 043524 [arXiv:0805.3862] [SPIRES].

[42] L. Parker, *Particle creation in expanding universes*, *Phys. Rev. Lett.* **21** (1968) 562 [SPIRES].

[43] B. Ratra, *Cosmological 'seed' magnetic field from inflation*, *Astrophys. J.* **391** (1992) L1 [SPIRES].

[44] W.D. Garretson, G.B. Field and S.M. Carroll, *Primordial magnetic fields from pseudoGoldstone bosons*, *Phys. Rev.* **D 46** (1992) 5346 [hep-ph/9209238] [SPIRES].

[45] P.P. Kronberg, *Extragalactic magnetic fields*, *Rept. Prog. Phys.* **57** (1994) 325 [SPIRES].

[46] D. Grasso and H.R. Rubinstein, *Magnetic fields in the early universe*, *Phys. Rept.* **348** (2001) 163 [astro-ph/0009061] [SPIRES].

[47] L.M. Widrow, *Origin of Galactic and Extragalactic Magnetic Fields*, *Rev. Mod. Phys.* **74** (2002) 775 [astro-ph/0207240] [SPIRES].

[48] D. Seery, *Magnetogenesis and the primordial non-Gaussianity*, arXiv:0810.1617 [SPIRES].

[49] D. Langlois and F. Vernizzi, *Nonlinear perturbations of cosmological scalar fields*, *JCAP* **02** (2007) 017 [astro-ph/0610064] [SPIRES].

[50] S. Renaux-Petel and G. Tasinato, *Nonlinear perturbations of cosmological scalar fields with non-standard kinetic terms*, *JCAP* **01** (2009) 012 [arXiv:0810.2405] [SPIRES].

JCAP04(2009)021

[51] M. LoVerde, A. Miller, S. Shandera and L. Verde, *Effects of Scale-Dependent Non-Gaussianity on Cosmological Structures*, *JCAP* **04** (2008) 014 [arXiv:0711.4126] [SPIRES].

[52] WMAP collaboration, E. Komatsu et al., *Five-Year Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP) Observations: Cosmological Interpretation*, *Astrophys. J. Suppl.* **180** (2009) 330 [arXiv:0803.0547] [SPIRES].

[53] M. Becker, L. Leblond and S.E. Shandera, *Inflation from Wrapped Branes*, *Phys. Rev.* **D 76** (2007) 123516 [arXiv:0709.1170] [SPIRES].

[54] T. Kobayashi, S. Mukohyama and S. Kinoshita, *Constraints on Wrapped DBI Inflation in a Warped Throat*, *JCAP* **01** (2008) 028 [arXiv:0708.4285] [SPIRES].

[55] E. Silverstein and A. Westphal, *Monodromy in the CMB: gravity Waves and String Inflation*, *Phys. Rev.* **D 78** (2008) 106003 [arXiv:0803.3085] [SPIRES].

[56] L. McAllister, E. Silverstein and A. Westphal, *Gravity Waves and Linear Inflation from Axion Monodromy*, arXiv:0808.0706 [SPIRES].

[57] A. Avgoustidis and I. Zavala, *Warped Wilson Line DBI Inflation*, *JCAP* **01** (2009) 045 [arXiv:0810.5001] [SPIRES].

[58] A. Krause, *Large Gravitational Waves and Lyth Bound in Multi Brane Inflation*, *JCAP* **07** (2008) 001 [arXiv:0708.4414] [SPIRES].

[59] I. Huston, J.E. Lidsey, S. Thomas and J. Ward, *Gravitational Wave Constraints on Multi-Brane Inflation*, *JCAP* **05** (2008) 016 [arXiv:0802.0398] [SPIRES].

JCAP04(2009)021

8.3 Non-gaussianités locales et équilatérales combinées dans l'inflation DBI multichamp (article)

8.3.1 Motivations et résultats

Les articles [237, 238, 236] reproduits dans les sections précédentes à propos de l'inflation DBI multichamp s'intéressent principalement aux non-gaussianités équilatérales, d'origine quantique et générées à la traversée de l'horizon (ainsi que les autres articles sur le sujet mentionnés à la sous-section suivante). Plus généralement cependant, les modèles multichamp ouvrent la possibilité de produire d'importantes non-gaussianités d'un autre type, des non-gaussianités locales, provenant de l'évolution classique non-linéaire des perturbations quand les échelles cosmologiques sont super-Hubble (*c.f.* la sous section 5.3.3). Le formalisme développé dans ces articles reste également très général de telle façon qu'aucun modèle particulier n'y est proposé pour réaliser le transfert entropique. J'ai considéré ces deux questions dans l'article [344], utilisant un mécanisme décrit par Lyth et Riotto [280] pour convertir les perturbations entropiques en perturbations adiabatiques à la fin de l'inflation branaire.

Plus précisément, j'ai considéré la situation typique d'une phase inflationnaire soutenue par le mouvement radial d'une D3-brane dans une gorge conique mais en prenant en compte l'effet des fluctuations de la brane dans les directions angulaires sur le déclenchement de l'instabilité tachyonique. Celle-ci a lieu quand la distance séparant la D3-brane mobile de l'anti D3-brane située au fond de la gorge devient égale à la longueur des cordes. Or, comme la distance brane-antibrane est sixdimensionnelle, elle acquiert une dépendance en les fluctuations des champs paramétrant la position angulaire de la brane. La valeur de l'inflaton à laquelle l'instabilité tachyonique débute dépend ainsi – non-linéairement – de ces fluctuations angulaires, de telle façon que le nombre de e-folds d'expansion de l'inflation varie d'une région super-Hubble de l'espace à une autre. Suivant le formalisme δN, les perturbations angulaires initialement entropiques sont ainsi converties en perturbation de courbure. Cette idée de "moduler" la fin de l'inflation par des champs scalaires additionnels n'est pas nouvelle [132, 215, 430, 60] et avait déjà été appliquée à l'inflation branaire de roulement lent [280, 92] mais pas au régime relativiste qui nous intéresse. Plus précisément, Leblond et Shandera [248] ont considéré cette possibilité mais en étudiant uniquement le spectre de puissance qui en résulte, et sans prendre en compte l'effet d'amplification des fluctuations entropiques dans le régime relativiste, montré dans notre travail [237].

Du fait de la relation non-linéaire entre la perturbation de courbure et les perturbations angulaires entropiques, le type de scénario considéré dans notre article [344] génère d'importantes non-gaussianités locales en plus de celles équilatérales attendues dans un modèle présentant des termes cinétiques non standard. Bien que la possibilité logique que le bispectre exhibe une combinaison linéaire de ces deux formes de non-gaussianités était connue, il s'agit de la première fois que des calculs précis étaient menés dans un scénario inflationnaire les générant à un niveau observationnel important. Notons qu'une situation simple permet d'envisager un bispectre avec les mêmes caractéristiques : celle d'un inflaton avec des termes cinétiques non standard, générant des non-gaussianités équilatérales, juxtaposé à des champs auxiliaires canoniques légers, générant des non-gaussianités locales. Notre scénario est plus complexe dans le sens où tous les champs scalaires présentent des termes cinétiques non standard. La différence entre les deux se manifeste alors dans le

trispectre. J'ai montré en effet que, du fait de la présence de champs scalaires légers, autre que l'inflaton, *et* présentant des termes cinétiques non canoniques, le trispectre primordial acquiert une composante particulière dont l'amplitude, dans l'inflation DBI, est donnée par le produit $f_{NL}^{\rm loc} f_{NL}^{\rm eq}$. Insistons sur le fait que cette relation est valable pour tout modèle d'inflation DBI multichamp, quels que soit la trajectoire de la brane, le nombre de champs scalaires effectivement légers où le mécanisme par lequel les perturbations entropiques sont converties en perturbation de courbure. Cette relation de cohérence, connue dans aucun autre scénario, est structurelle à l'inflation branaire dans le régime relativiste et constitue donc une signature observationnelle caractéristique de ces modèles, et ce d'autant plus que la dépendance géométrique de cette nouvelle forme de trispectre est très particulière.

Les effets purement classiques de l'évolution non linéaire des perturbations hors de l'horizon impliquent également que le trispectre présente d'importantes non-gaussianités locales. J'ai déterminé dans le modèle envisagé dans la référence [344] les paramètres correspondants τ_{NL} et g_{NL} (*c.f.* la sous-section 5.3.3) dont les amplitudes s'avèrent suffisamment importantes pour être détectables par le satellite Planck. Du fait des termes cinétiques non standard, le trispectre présente enfin une composante purement quantique, calculée dans les références [308, 156], similaire aux non-gaussianités équilatérales dans le cas du bispectre. La différence avec celui-ci cependant est que la forme du trispectre quantique dans l'inflation DBI multichamp est en général différente de celle dans l'inflation DBI un champ.

8.3.2 Article

Nous reproduisons à présent l'article [344] que j'ai publié en 2009 dans le *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics (JCAP)* et intitulé *"Combined local and equilateral non-Gaussianities from multifield DBI inflation"*.

Journal of Cosmology and Astroparticle Physics
An IOP and SISSA journal

Combined local and equilateral non-Gaussianities from multifield DBI inflation

Sébastien Renaux-Petel

APC (UMR 7164, CNRS, Université Paris 7),
10 rue Alice Domon et Léonie Duquet, 75205 Paris Cedex 13, France

E-mail: renaux@apc.univ-paris7.fr

Received July 30, 2009
Accepted September 18, 2009
Published October 16, 2009

Abstract. We study multifield aspects of Dirac-Born-Infeld (DBI) inflation. More specifically, we consider an inflationary phase driven by the radial motion of a D-brane in a conical throat and determine how the D-brane fluctuations in the angular directions can be converted into curvature perturbations when the tachyonic instability arises at the end of inflation. The simultaneous presence of multiple fields and non-standard kinetic terms gives both local and equilateral shapes for non-Gaussianities in the bispectrum. We also study the trispectrum, pointing out that it acquires a particular momentum dependent component whose amplitude is given by $f_{\rm NL}^{\rm loc} f_{\rm NL}^{\rm eq}$. We show that this relation is valid in every multifield DBI model, in particular for any brane trajectory, and thus constitutes an interesting observational signature of such scenarios.

Keywords: inflation, string theory and cosmology, non-gaussianity

ArXiv ePrint: 0907.2476

JCAP10(2009)012

© 2009 IOP Publishing Ltd and SISSA doi:10.1088/1475-7516/2009/10/012

Contents

1 Introduction **1**

2 Generating the curvature perturbation at the end of brane inflation **3**
- 2.1 The set-up and the amplification of quantum fluctuations 3
- 2.2 The conversion process 6
- 2.3 δN formulae 8

3 Power spectrum and primordial non-Gaussianities from the bispectrum **10**
- 3.1 Statistical properties of the field perturbations at horizon crossing 10
- 3.2 Power spectrum, scalar spectral index and tensor to scalar ratio 11
- 3.3 Primordial bispectrum 12
  - 3.3.1 General definitions 12
  - 3.3.2 Equilateral and local bispectra 13
  - 3.3.3 Running non-Gaussianities 14
- 3.4 Implication of the results 14

4 Primordial non-Gaussianities from the trispectrum **16**
- 4.1 General definitions 16
- 4.2 Local and intrinsically quantum trispectra in our model 18
- 4.3 An observational signature of multifield DBI inflation 19
- 4.4 Shapes of trispectra 21

5 Conclusions **22**

A δN formulae beyond leading order **26**

B Higher order loop contributions **27**

JCAP10(2009)012

1 Introduction

Current measurements of the cosmic microwave background (CMB) anisotropies, such as those obtained by the WMAP satellite, already provide us a with a wealth of valuable information about the very early universe. Furthermore, with the successful launch of the Planck satellite and the increasing precision of large scale structure surveys, one can hope to get yet more precise information in the near future. In this context non-Gaussianity [1] is particularly exciting since it has the ability to discriminate between models which are otherwise degenerate at the linear level: for instance, a detection of so-called local non-Gaussianity would rule out all single field scenarios of inflation in a model independent way [2]. Amongst such single field models, those with standard kinetic terms, in which the inflaton slowly rolls down its potential, come with an unobservably low level of non-Gaussianity and hence are still consistent with present-day observations [3]. Theoretically though, their embedding in high-energy physics theories is hampered by the eta-problem, namely that Planck-suppressed

corrections often lead to potentials that are too steep to support slow-roll inflation. In the context of string theory, this problem was demonstrated to be particularly acute in slow-roll inflationary models based on the dynamics of D-branes moving in higher dimensional spaces [4, 5]. Nonetheless, this set-up precisely motivates an interesting way to bypass the eta-problem that has attracted a lot of attention: since the inflaton field in brane inflation is governed by a Dirac-Born-Infeld (DBI) action characterized by non-canonical kinetic terms, there exists an upper bound on the inflaton velocity that allows one to achieve an inflationary phase with otherwise too steep potentials [6]. Besides alleviating the eta-problem, the non standard kinetic terms also enhance the self-interactions of the inflaton, resulting in significant non-Gaussianities of equilateral type [7]. Indeed, the simplest single-field DBI models are already under strain from observations [8, 9].

However, as is central to the discussion of this paper, DBI inflation is naturally a multifield scenario, since the position of the brane in each compact extra dimension gives rise to a scalar field from the effective four-dimensional point of view [10–13]. In multiple field models, the scalar perturbations can be decomposed into (instantaneous) adiabatic and entropy modes by projecting, respectively, parallel and perpendicular to the background trajectory in field space [14]. If the entropy fields are light enough to be quantum mechanically excited during inflation, they develop super-Hubble fluctuations that can be transferred to the adiabatic mode on large scales. This effect, as well as the nonlinearities imprinted on the fields at the epoch of horizon crossing, was taken into account in [15] where it was shown that the shape of *equilateral* non-Gaussianities is the same as in the single-field case while their amplitude is reduced by the entropy to curvature transfer, which therefore eases the confrontation with the data. This paper, as well as subsequent ones on multifield DBI inflation [16–22], focused mainly on equilateral non-Gaussianities. More generally, multiple-field inflationary models are known to produce possibly large non-Gaussianities of another shape, namely *local* non-Gaussianities, that arise due to the nonlinear classical evolution of perturbations on superhorizon scales. The formalism developed in these papers also remained very general and no particular model was presented for the entropic transfer on large scales. We address both these questions here, using a mechanism outlined by Lyth and Riotto [23] to convert entropic into adiabatic perturbations at the end of brane inflation.

In this scenario, inflation is still driven by a single inflaton scalar field, namely the D3-brane solely moves along the standard radial direction of the throat in the context of warped conical compactifications. When the mobile D3-brane and an anti D3-brane sitting at the tip of the throat come within a string length, an open string mode stretched between them becomes tachyonic, triggering their annihilation and the end of inflation [24]. As the brane-antibrane distance is *six-dimensional*, it acquires some dependence upon the fluctuations of the light fields parametrizing the angular position of the brane. Hence the value of the inflaton at which the instability signals is modulated and the duration of inflation varies from one super-Hubble region to another. In this way initially entropic perturbations are converted into the curvature perturbation. The relevance of this mechanism in the slow-roll 'Delicate Universe' scenario [4] has been recently investigated [25]. Here however we would like to combine it with the DBI inflationary regime. This was looked at by Leblond and Shandera [26] regarding the power spectrum. In the present paper, we extend their analysis by taking into account the enhancement of the angular fluctuations by the low speed of sound [15], as well as by investigating the non-Gaussian properties of the curvature perturbation. It should be noted that while no explicit model of DBI inflation in a string theory framework has been constructed yet that both satisfy observational constraints and

JCAP10(2009)012

are theoretically self-consistent[1] — mainly because of the existence of a geometrical limit for the size of the throat in Planckian units [27, 28][2] — it was so far assumed that the fluctuations of the primary inflaton create the curvature perturbation. One can therefore hope to embed consistently the DBI inflationary scenario in string theory with other mechanisms to generate the density perturbations, such as the one considered in this paper.

In our model, the curvature perturbation is nonlinearly related to the entropy perturbations, therefore the conversion process gives rise to local non-Gaussianities besides the standard equilateral ones generated at horizon crossing. To the best of our knowledge it is the first time that definite predictions are made for an inflationary scenario where both significant local and equilateral non-Gaussianities can arise, characterized in the bispectrum respectively by the parameters $f_{\rm NL}^{\rm loc}$ and $f_{\rm NL}^{\rm eq}$. While the logical possibility that a linear combination of different shapes of the bispectrum can arise is an acknowledged fact, it should be stressed that what we consider is not merely a juxtaposition of an inflaton with non standard kinetic terms generating $f_{\rm NL}^{\rm eq}$ and another light scalar generating $f_{\rm NL}^{\rm loc}$. In multifield DBI inflation, light scalar fields other than the inflaton *and* with derivative interactions naturally contribute to both types of non-Gaussianities. We show that this nontrivial combination leaves a distinct imprint on the primordial *trispectrum*, which acquires a particular momentum dependent component whose amplitude is given by the product $f_{\rm NL}^{\rm loc} f_{\rm NL}^{\rm eq}$. This relation is structural and is valid independently of the details of the inflationary scenario, i.e. for any brane trajectory and any process by which entropic perturbations feed the adiabatic ones. Hence it constitutes an interesting observational signature of multifield DBI inflation.

The layout of this paper is the following. In section 2, we describe our set-up and recall results concerning the amplification of quantum fluctuations in multifield DBI inflation. We explain the mechanism by which entropic perturbations are converted into the curvature perturbation at the end of brane inflation. Using the δN formalism, we also derive the relevant formulae for quantifying this effect. In section 3, we calculate the power spectrum of the primordial curvature perturbation. We show, in particular, that the entropic transfer is more efficient in the DBI than in the slow-roll regime. We also calculate the primordial bispectrum which acquires a linear combination of both the local and equilateral shapes of non-Gaussianities. We then combine our results for the spectrum and bispectrum to derive constraints on the model. In section 4 we turn to the study of the primordial trispectrum. We calculate the local trispectrum parameters $\tau_{\rm NL}$ and $g_{\rm NL}$ and discuss the purely quantum contribution coming from the field trispectra. Then we point out the presence of a particular component of the trispectrum whose amplitude is given by the product $f_{\rm NL}^{\rm loc} f_{\rm NL}^{\rm eq}$. We finish by plotting the corresponding shape of the trispectrum in different limits, and this turns out to have characteristic features. We summarize our main results in the last section.

2 Generating the curvature perturbation at the end of brane inflation

2.1 The set-up and the amplification of quantum fluctuations

Our setting is that of a flux compactification of type IIB string theory to four dimensions [29], resulting in a warped geometry in which the six-dimensional Calabi-Yau manifold contains one or more throats. The ten-dimensional metric inside a throat has the generic form

$$ds^2 = h^2(y^K)\, g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu + h^{-2}(y^K)\, G_{IJ}(y^K)\, dy^I dy^J \,, \tag{2.1}$$

[1] We are considering the so-called ultra-violet model of DBI inflation, in which the mobile D3-brane falls towards the tip of the throat, but consistent infrared models [95, 96] can be constructed, as explained in [97].

[2] This bound was first discussed in [98] in the context of eternal D-brane inflation.

JCAP10(2009)012

where $g_{\mu\nu}$ is the metric of the four-dimensional, non-compact, spacetime and we have factored out the so-called warp-factor $h(y^I)$ from the metric G_{IJ} in the six compact extra dimensions. In the following, we assume that the geometry presents a special radial direction, in agreement with known solutions of the supergravity equations [30], so that the warp factor is a function of a radial coordinate ρ only, decreasing along the throat down to its tip at $\rho = 0$.[3] In this framework, we consider the following internal metric

$$G_{IJ}(y^K)\, dy^I dy^J = d\rho^2 + b^2(\rho)\, g^{(5)}_{mn} d\psi^m d\psi^n \,, \tag{2.2}$$

where we refer to $b(\rho)$ as the radius of the throat and ψ^m ($m = 5,6,7,8,9$) denote its angular coordinates. Since we aim to present a general mechanism, we do not specify a precise form for $h(\rho)$ and $b(\rho)$ and only require that they approach constant values $h_{\rm tip}$ and $b_{\rm tip}$ near the tip, which is the situation encountered for instance in the Klebanov-Strassler throat [30].

We take then a probe D3-brane, of tension

$$T_3 = \frac{m_s^4}{(2\pi)^3 g_s} \,, \tag{2.3}$$

where m_s is the string mass and g_s the string coupling, filling the four-dimensional spacetime, and point like in the six extra dimensions. The D3-brane has coordinates $y^I_{(b)}$ and falls down to the tip of the throat where a static $\overline{D3}$ is sitting. Following [15], in terms of the rescaled scalar fields

$$\phi^I = \sqrt{T_3}\, y^I_{(b)} \to \phi = \sqrt{T_3}\, \rho_{(b)} \,, \theta^m = \sqrt{T_3}\, \psi^m_{(b)} \,, \tag{2.4}$$

and rescaled warp factor

$$f = \left(T_3 h^4\right)^{-1} \,, \tag{2.5}$$

the D3-brane low-energy dynamics is captured by the Lagrangian

$$P = -f(\phi)^{-1} \left(\sqrt{\det(\delta^\mu_\nu + f\, G_{IJ} \partial^\mu \phi^I \partial_\nu \phi^J)} - 1 \right) - V(\phi^I) \,, \tag{2.6}$$

where $V(\phi^I)$ is the field interaction potential. Note that in general, there are also contributions from the presence of various p-forms in the bulk as well as the gauge field confined on the brane. In [18], these fields were shown to have no observable effects on scalar cosmological perturbations at least to second-order so we have omitted them here for simplicity.

The explicit calculation of the potential V in (2.6) is extremely difficult and requires a detailed knowledge of the compactification scheme (see e.g [31] and references therein). In general though, we know that bulk as well as moduli stabilizing effects break the isometries of the throat, stabilizing some of the angular coordinates of the branes. However, there typically remain approximate residual isometries of the potential, as shown explicitly in [25] for the most-advanced brane inflation model [5]. For simplicity, we consider only one such isometry direction ψ, entering the five-dimensional metric $g^{(5)}_{mn}$ (2.2) through

$$g^{(5)}_{mn} d\psi^m d\psi^n = d\psi^2 + \cdots \tag{2.7}$$

and we assume that the four other brane angular degrees of freedom are frozen in their minima of their effective potential at the position of the antibrane along these directions. Therefore

[3] We use the symbol ρ to evade any ambiguities with the commonly used variable r in the Klebanov-Strassler throat [30] that has a non-zero minimum value, although the two coincide far from the tip in the KS throat.

JCAP10(2009)012

we take the potential $V = V(\phi)$ to depend only on the radial position of the brane, which itself moves along the radial direction only — $\dot{\phi} \neq 0\,, \dot{\theta}^m = 0$. As opposed to single-field inflation, the perturbations along the isometric, i.e. flat direction ψ, can be quantum mechanically excited during inflation. In that case, the angular $D3 - \overline{D3}$ separation $\theta \equiv \sqrt{T_3}\Delta\psi$ varies from one Hubble patch to the others. Although this does not modify the dynamics *during* inflation, this will turn out to be crucial *at the end* of inflation, as we will see below.

We now recall the relevant results of [16] regarding the amplification of quantum fluctuations in multifield brane inflation, in particular the amplitude of the inflaton and of the angular perturbations at horizon crossing. For that purpose, it is convenient, after going to conformal time $\tau = \int \mathrm{d}t/a(t)$, where $a(t)$ is the cosmological scale factor, to work in terms of the canonically normalized fields given by

$$v_\sigma = \frac{a}{c_s^{3/2}}\, Q_\phi\,, \qquad v_s = \frac{a}{\sqrt{c_s}}\, b(\phi)\, Q_\theta\,, \tag{2.8}$$

where Q^I denotes the perturbations of the field ϕ^I in the flat gauge and

$$c_s \equiv \sqrt{1 - f(\phi)\dot{\phi}^2} \tag{2.9}$$

is the propagation speed of scalar perturbations (see eq. (2.10) below), or speed of sound. Clearly, from eq. (2.9), there is an upper bound on the inflaton velocity $|\dot{\phi}| \leq \frac{1}{\sqrt{f(\phi)}}$. When $c_s^2 \approx 1$, one can expand the square-root in the Lagrangian (2.6) to quadratic order in the fields. Then the action becomes canonical and one recovers the slow-roll regime. However, when the brane almost saturates its speed limit — $c_s^2 \ll 1$ — the non-standard structure of the action (2.6) must be fully taken into account: this is the relativistic, or DBI regime we are particularly interested in.

In Fourier space the equations of motion for v_σ and v_s at linear order take the simple form [16, 32]

$$v_\sigma'' + \left(c_s^2 k^2 - \frac{z''}{z}\right) v_\sigma = 0\,, \qquad v_s'' + \left(c_s^2 k^2 - \frac{z_s''}{z_s} + a^2\mu_s^2\right) v_s = 0\,, \tag{2.10}$$

where we have introduced the two background-dependent functions $z(\tau) = a\sqrt{2\epsilon}/c_s\,, z_s(\tau) = a/\sqrt{c_s}$, with $\epsilon \equiv -\frac{\dot{H}}{H^2}$ the inflationary deceleration parameter. The effective entropic mass squared μ_s^2 is given by

$$\mu_s^2 \equiv c_s \frac{b'(\phi)}{b(\phi)} V'(\phi) - \frac{(1-c_s)^2}{2f^2}\frac{b'(\phi)}{b(\phi)} f'(\phi) - \dot{\phi}^2 \frac{b''(\phi)}{b(\phi)}\,, \tag{2.11}$$

where $b(\phi)$ is the radius of the throat evaluated at the brane position. In the following we assume that the time evolution of ϵ and c_s is very slow with respect to that of the scale factor,[4] as quantified by the slow-varying parameters

$$\eta \equiv \frac{\dot{\epsilon}}{H\epsilon} \ll 1\,, \tag{2.12}$$

$$s \equiv \frac{\dot{c}_s}{H c_s} \ll 1\,, \tag{2.13}$$

[4]See [99] for models where the speed of sound is rapidly varying.

JCAP10(2009)012

so that $z''/z \simeq z_s''/z_s \simeq 2/\tau^2$. The amplification of the vacuum fluctuations at horizon crossing is possible only for very light degrees of freedom. Although this is automatically verified for the adiabatic perturbation v_σ because of our assumption $z''/z \simeq 2/\tau^2$, this is not necessary true for v_s; if μ_s^2 is larger than H^2, this amplification is suppressed and there is no production of entropy modes. Note that the effective entropic mass squared (2.11) is non zero despite the angular direction being exactly isometric. In particular, because the potential and radius of the throat typically increase and f typically decreases with ϕ, the first two terms in (2.11) are positive. Below we assume that $|\mu_s^2|/H^2 \ll 1$ so that the entropy modes are effectively amplified.

Following the standard procedure (see e.g. [33] or [34]), one then selects the positive frequency solutions of eq. (2.10), which correspond to the Minkowski-like vacuum on very small scales:

$$v_{\sigma\, k} \simeq v_{s\, k} \simeq \frac{1}{\sqrt{2kc_s}} e^{-ikc_s\tau} \left(1 - \frac{i}{kc_s\tau}\right) . \tag{2.14}$$

As a consequence, the power spectra for v_σ and v_s after sound horizon crossing have the same amplitude. However, in terms of the initial field perturbations, one finds, using (2.8),

$$\mathcal{P}_{Q_{\phi}*} \simeq \left(\frac{H_*}{2\pi}\right)^2 , \quad \mathcal{P}_{b_* Q_{\theta *}} \simeq \left(\frac{H_*}{2\pi c_{s*}}\right)^2 \tag{2.15}$$

(the subscript $*$ indicates that the corresponding quantity is evaluated at sound horizon crossing $kc_s = aH$). Therefore, for small c_{s*}, the entropic modes are *amplified* with respect to the adiabatic modes. As we will discuss in subsection 2.3, the standard formulae of the δN formalism are expressed in terms of fields whose perturbations have the canonical amplitude $H_*/2\pi$ at horizon crossing. We therefore define the 'canonical' entropy field as

$$\Xi \equiv b_* c_{s*} \theta \, . \tag{2.16}$$

2.2 The conversion process

We now address the question of how initially entropic perturbations can be converted into the adiabatic modes. We assume that inflation does not end not by the breakdown of the slow-roll conditions but rather persists all along down the throat. Then, when the D3-brane comes within a string length of the anti D3-brane, a tachyonic instability arises which ends inflation. Using eqs. (2.1), (2.2) and (2.7), this happens when

$$\frac{1}{h_{\rm tip}^2} \left((\Delta\rho)^2 + b_{\rm tip}^2 (\Delta\psi)^2\right) = l_s^2 \, , \tag{2.17}$$

where $\Delta\rho$ and $\Delta\psi$ are the radial and angular $D3 - \overline{D3}$ separation and $l_s = m_s^{-1}$ is the string length. In terms of the rescaled fields, the tachyon surface, represented in figures (1) and (2), is given by[5]

$$\phi^2 + b_{\rm tip}^2 \theta^2 = T_3 \, l_s^2 \, h_{\rm tip}^2 \, . \tag{2.18}$$

The main point is that the end value of the inflaton acquires a spatial dependence through the fluctuations of the light angular field θ (see figure (2)). Consequently, the duration of inflation

[5]Notice that for the KS throat, its metric is often described with another radial variable, τ [30], such that $\rho \sim \sqrt{g_s M} h_{\rm tip} l_s \tau$ near the tip, where $M \gg 1$ is a flux integer. With this variable, the tachyon appears — forgetting about the angular direction — for $\tau \sim 1/\sqrt{g_s M}$, where the warped string length $h_{\rm tip} l_s$ does not appear. This field however is not canonically normalized and, had we used this variable, the warped string length $h_{\rm tip} l_s$ would reappear in the amplitude of the corresponding perturbation.

JCAP10(2009)012

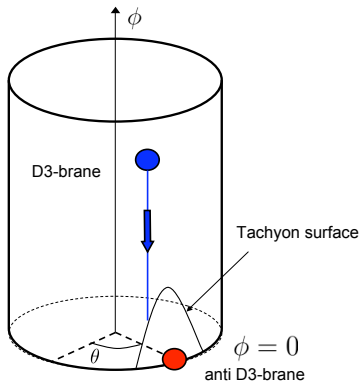

Figure 1. A simplified picture of the geometry at the tip of the throat, with one angular direction θ only. The radial inflationary trajectory is represented by the blue line.

varies from one super-Hubble region to another and this can be interpreted as a curvature perturbation, as we will quantify in the next subsection. To simplify the notation, we define

$$\phi_c \equiv \sqrt{T_3} l_s h_{\rm tip} = \frac{m_s h_{\rm tip}}{(2\pi)^{3/2} g_s^{1/2}} \tag{2.19}$$

and the angle $-\pi/2 < \alpha < \pi/2$ such that the background value of the inflaton field when it reaches the tachyon surface $\overline{\phi}_e$ is given by

$$\overline{\phi}_e = \cos(\alpha)\, \phi_c \,. \tag{2.20}$$

(here and in the following, the subscript e indicates the end of infation). For example, the $D3 - \overline{D3}$ angular separation vanishes when $\alpha = 0$.

Let us now make some remarks regarding the validity of our scenario: clearly the $D3$-brane will reach the tachyon surface during its radial fall-down only if the background angular brane separation $\overline{\Delta\psi}$ verifies

$$\overline{\Delta\psi} \leq \frac{l_s h_{\rm tip}}{b_{\rm tip}} \,. \tag{2.21}$$

For the supergravity approximation to be valid, the radius at the tip $b_{\rm tip}$ must be large in local string units $h_{\rm tip} l_s$ (it is $\sim \sqrt{g_s M}$ in the KS throat with $M \gg 1$ a flux integer). Therefore, condition eq. (2.21) is a non-trivial requirement, which we assumed to be fulfilled. Note however that if this is not satisfied, inflation could end through the angular motion of the brane at the tip [35–37]. The angular fluctuations would then still produce a spatially-dependent time-delay to the end of inflation, and one could expect similar effects to the ones discussed below to arise. Finally, we have also assumed for simplicity that the trajectory is completely radial until the end of inflation: more generally the trajectory can be nontrivial in the angular directions, for instance if the Coulombic attraction between the branes becomes important towards the end of inflation. In that case, the entropic perturbations would feed the curvature perturbation through the bending of the inflationary trajectory [14, 38]. This

JCAP10(2009)012

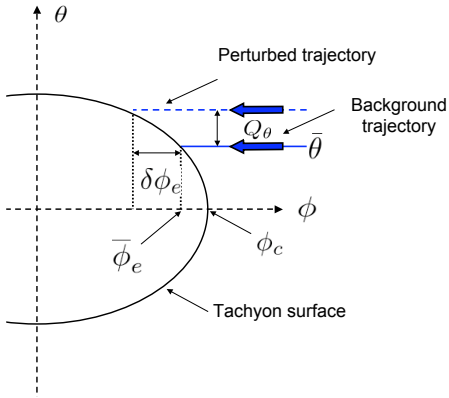

Figure 2. The tachyon surface, at which inflation ends, in the $\phi - \theta$ plane. The end value of the inflaton is shifted from $\overline{\phi}_e$ to $\overline{\phi}_e + \delta\phi_e$ due to the angular fluctuation Q_θ, hence the duration of inflation varies from one super-Hubble region to another.

mechanism to convert entropic into adiabatic perturbations is different from the one used in this paper but both can be present, as in multi-brid inflation [39–42].[6]

2.3 δN formulae

In order to quantify the curvature perturbation generated by the entropic fluctuations, it is convenient to use the δN formalism [43–47], in which a key role is played by the local integrated expansion, or local number of e-folds, between some initial and final hypersurfaces

$$N(\mathbf{x}) = \int_i^f H(t, \mathbf{x}) dt \,. \tag{2.22}$$

In this formalism, the curvature perturbation on uniform energy density hypersurfaces, which we denote ζ, is identified as the perturbation in the local number of e-folds of expansion from an initially flat hypersurface to a final uniform energy density hypersurface

$$\zeta = \delta N \equiv N(\mathbf{x}) - \bar{N} \,, \tag{2.23}$$

where $\bar{N}$ is the number of e-folds in the homogeneous background spacetime. In the long-wavelength limit, according to the separate universe picture [48], the integrated expansion can be calculated from solutions to the *unperturbed* Friedmann equation, with initial conditions specified by the *perturbed* scalar fields $\zeta = N(\varphi_*^A) - \bar{N}$, where $\varphi_*^A = \overline{\varphi_*^A} + Q_*^A$ is the sum of the homogeneous values plus fluctuations of the scalar fields on the initial spatially-flat slice, which we take to be soon after horizon crossing during inflation. Taylor-expanding this relation in terms of the field fluctuations leads to the formal expression

$$\zeta = N_A Q^A + \frac{1}{2} N_{AB} Q^A Q^B + \frac{1}{6} N_{ABC} Q^A Q^B Q^C + \cdots \tag{2.24}$$

[6]The effect of the bending of the trajectory on non-Gaussianities can be analyzed with the results of [81, 100], based on the earlier work [101], in particular when it is difficult to apply the δN formalism.

JCAP10(2009)012

Once $N(\varphi_*^A)$ is known, one can work out the coefficients N_A, N_{AB}, N_{ABC} in (2.24) and determine the curvature perturbation.

In our model, since the background dynamics is solely determined by the radial scalar field ϕ, the local number of e-folds, evaluated right after the end of inflation, simply reads

$$N(\phi_*(\mathbf{x}), \Xi_*(\mathbf{x})) = \int_{\phi_*}^{\phi_e(\Xi_*)} \left(\frac{H}{\dot{\phi}}\right) d\phi\,, \tag{2.25}$$

where the canonical entropy field Ξ was defined in (2.16) and, using eqs. (2.18) and (2.19), the end value of the inflaton reads

$$\phi_e(\Xi_*) = \sqrt{\phi_c^2 - \left(\frac{\beta}{c_{s*}}\Xi_*\right)^2}\,, \tag{2.26}$$

with

$$\beta \equiv \frac{b_{\rm tip}}{b_*} \tag{2.27}$$

being the ratio between the radius at the tip of the throat and at sound horizon crossing. Here we assumed that no significant expansion is generated after the field reaches the tachyon surface, that is, the sudden end approximation [49]. If not negligible, the extra curvature perturbation generated can be taken into account similarly to [39], though even at this stage, ζ may not have settled down to its final value. For example, the further evolution of the tachyon can give other contributions to ζ [50, 51]. This interesting aspect is outside the scope of this paper but it should be borne in mind that it is present in general.

From eq. (2.25), one obtains

$$\zeta = \zeta_* + \zeta_e \tag{2.28}$$

where

$$\zeta_* = -\int_{\bar{\phi}_*}^{\bar{\phi}_*+Q_{\phi*}} \left(\frac{H}{\dot{\phi}}\right) d\phi = -\left(\frac{H}{\dot{\phi}}\right)\Big|_* Q_{\phi*} - \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\phi}\left(\frac{H}{\dot{\phi}}\right)\Big|_* Q_{\phi*}^2 - \frac{1}{3!}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\phi^2}\left(\frac{H}{\dot{\phi}}\right)\Big|_* Q_{\phi*}^3 + \cdots \tag{2.29}$$

and

$$\zeta_e = \int_{\bar{\phi}_e(\bar{\Xi})}^{\phi_e(\bar{\Xi}+Q_{\Xi*})} \left(\frac{H}{\dot{\phi}}\right) d\phi = \left(\frac{H}{\dot{\phi}}\right)\Big|_e \delta\phi_e + \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\phi}\left(\frac{H}{\dot{\phi}}\right)\Big|_e \delta\phi_e^2 + \frac{1}{3!}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\phi^2}\left(\frac{H}{\dot{\phi}}\right)\Big|_e \delta\phi_e^3 + \cdots \tag{2.30}$$

are the contributions to the curvature perturbation from respectively, the epoch of horizon crossing and the end of inflation. Loosely speaking, ζ_e is associated to the time delay generated by the fluctuation $\delta\phi_e$ in figure (2), where we use the notation

$$\delta\phi_e = \phi_e' Q_{\Xi_*} + \frac{1}{2}\phi_e^{(2)}(Q_{\Xi_*})^2 + \frac{1}{3!}\phi_e^{(3)}(Q_{\Xi_*})^3 + \cdots \tag{2.31}$$

and the derivatives of $\phi_e(\Xi_*)$ (2.26), given in appendix 1, are evaluated on the background. Note that in order to trust the perturbative expansion, the angular fluctuations must be small compared to the background separation, namely $\beta H_*/c_{s*} \ll \phi_c$.

Adding (2.29) and (2.30) gives an expression of ζ of the form (2.24), where $A, B = \sigma, s$ with $Q_\sigma \equiv -Q_{\phi_*}$ and $Q_s \equiv Q_{\Xi_*}$, which are normalized to share the canonical amplitude $H_*/2\pi$. To leading order in the slow-varying parameters η and s (2.12)–(2.13) and their

JCAP10(2009)012

time derivatives, only the first terms remain in the expansions (2.29) and (2.30) so that the non-zero coefficients in (2.24) are then

$$N_\sigma = -\left.\frac{1}{\sqrt{2\epsilon c_s}}\frac{1}{M_{\rm pl}}\right|_* \qquad N_s = -\left.\frac{\phi_e'}{\sqrt{2\epsilon c_s}}\frac{1}{M_{\rm pl}}\right|_e \tag{2.32}$$

$$N_{ss} = -\left.\frac{\phi_e^{(2)}}{\sqrt{2\epsilon c_s}M_{\rm pl}}\right|_e \qquad N_{sss} = -\left.\frac{\phi_e^{(3)}}{\sqrt{2\epsilon c_s}M_{\rm pl}}\right|_e \tag{2.33}$$

where we have used $H/\dot{\phi} = -(2\epsilon c_s)^{-1/2}/M_{\rm pl}$ [16]. For completeness, we include in appendix 1 the full expansion of ζ, not restricting to leading order in the slow-varying parameters. Notice also that they cannot be neglected in the computation of the scalar spectral index n_s and running non-Gaussian parameter $n_{\rm NG}$ as they give then the leading order result (see below).

3 Power spectrum and primordial non-Gaussianities from the bispectrum

According to eq. (2.24), the statistical properties of the curvature perturbation ζ are inherited from those of the field fluctuations Q^A at horizon crossing. For clarity, we first recall the results, determined in [16], for the field two-point and three-point functions in two-field DBI inflation, before calculating the power spectrum and bispectrum of ζ in the following subsections. The investigation of the trispectrum will be the subject of section 4. We use the notations of [52].

3.1 Statistical properties of the field perturbations at horizon crossing

In Fourier space the power spectrum of the scalar field perturbations is defined by

$$\langle Q^A_{\mathbf{k}} Q^B_{\mathbf{k}'}\rangle = C^{AB}(k)(2\pi)^3\delta^3(\mathbf{k}+\mathbf{k}')\,. \tag{3.1}$$

To leading order in the field perturbations

$$C^{AB}(k) = \frac{H_*^2}{2k^3}\delta^{AB}\,, \tag{3.2}$$

where δ^{AB} is the Kronecker delta-function. Notice that the cross-correlation between adiabatic and entropy modes is zero for the straight line background trajectory considered here as the coupling between them exactly vanishes in that case (see eq. (2.10) as well as [16] for details).

The bispectrum of the field perturbations is defined by

$$\langle Q^A_{\mathbf{k}_1}\, Q^B_{\mathbf{k}_2}\, Q^C_{\mathbf{k}_3}\rangle \equiv B^{ABC}(k_1,k_2,k_3)(2\pi)^3\delta^3(\mathbf{k_1}+\mathbf{k_2}+\mathbf{k_3})\,. \tag{3.3}$$

In slow-roll inflation, where the self interactions of the fields are suppressed by the flatness of the potential, the bispectrum of the fields is small, both for single [53] and multifield inflation [54]. On the contrary, self-interactions are enhanced in models with non-standard kinetic terms [55], and in DBI inflation in the low sound speed limit in particular, with the result [16]

$$B^{ABC}(k_1,k_2,k_3) = \frac{H_*^4}{4\sqrt{2\epsilon_* c_{s*}}c_{s*}^2 M_{\rm pl}} b^{ABC}(k_1,k_2,k_3)\,. \tag{3.4}$$

JCAP10(2009)012

The fully adiabatic momentum dependent factor $b^{ABC}(k_1, k_2, k_3)$ is given by

$$b^{\sigma\sigma\sigma}(k_1, k_2, k_3) = \frac{1}{\prod_i k_i^3 K^3} \left[6k_1^2 k_2^2 k_3^2 - k_3^2(\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{k}_2)(2k_1k_2 - k_3K + 2K^2) + \text{perm.}\right] \quad (3.5)$$

where $K = k_1+k_2+k_3$ and the 'perm.' indicate two other terms with the same structure as the last term but permutations of indices 1, 2 and 3. Note also that it depends only on the norm of the three wave-vectors as for instance, $\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{k}_2 = \frac{1}{2}(k_3^2 - k_1^2 - k_2^2)$ due to momentum conservation. This is the standard result from single field DBI inflation [56]. In the relativistic limit, there exists only one other non-zero three-point correlation function at leading order, namely

$$\begin{aligned} b^{\sigma ss}(k_1, k_2, k_3) = & \frac{1}{\prod_i k_i^3 K^3} \left[2k_1^2 k_2^2 k_3^2 + k_1^2(\mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{k}_3)(2k_2k_3 - k_1K + 2K^2)\right. \\ & \left. - k_3^2(\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{k}_2)(2k_1k_2 - k_3K + 2K^2) - k_2^2(\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{k}_3)(2k_1k_3 - k_2K + 2K^2)\right] \end{aligned} \quad (3.6)$$

3.2 Power spectrum, scalar spectral index and tensor to scalar ratio

The power spectrum of the curvature perturbation is defined as

$$\langle \zeta_{\mathbf{k}} \zeta_{\mathbf{k}'} \rangle = P_\zeta(k)(2\pi)^3 \delta^3(\mathbf{k} + \mathbf{k}') \,. \quad (3.7)$$

The corresponding variance per logarithmic interval in k-space is given, to leading order in the field perturbations, by

$$\mathcal{P}_\zeta(k) \equiv \frac{k^3}{2\pi^2} P_\zeta(k) = \left(\frac{H_*}{2\pi}\right)^2 \left(N_\sigma^2 + N_s^2\right) \,, \quad (3.8)$$

where we have used eqs. (2.24) and (3.2). As in [16, 57], it is convenient to introduce the transfer function $T_{\sigma s}$, such that $N_s = T_{\sigma s} N_\sigma$. The curvature power-spectrum then takes the form

$$\mathcal{P}_\zeta = \frac{1}{8\pi^2 \epsilon_* c_{s*}} \frac{H_*^2}{M_{\text{pl}}^2} \left(1 + T_{\sigma s}^2\right) \,, \quad (3.9)$$

where $T_{\sigma s}^2$ quantifies the contribution of the entropy modes to the final curvature perturbation. This vanishes in single-field DBI inflation while in our case, from eq. (2.32),

$$T_{\sigma s}^2 = \frac{\epsilon_*}{\epsilon_e c_{se} c_{s*}} \tan^2(\alpha)\, \beta^2 \,. \quad (3.10)$$

Let us comment on the ranges of the various parameters entering eq. (3.10). First, since the radius of the throat decreases from the UV to the IR end, $\beta \equiv b_{\text{tip}}/b_*$ is bounded by one and this bound is saturated when the last 60 efolds of inflation take place at the tip of the throat, where $b(\phi)$ becomes a constant [58]. Second, the entropic transfer depends on the angular $D3 - \overline{D3}$ separation through the angle α (2.20). When $\tan(\alpha) = 0$, the angular fluctuations give no time-delay to the end of inflation at linear order, as is clear from figure (2), and hence the transfer function vanishes. In that case, the first effect appears through higher order loop corrections (see appendix 2). In the following, we have in mind that $\tan(\alpha) = O(1)$ although we keep formulae general. Finally, the result (3.10) indicates that in slow-roll inflation, where the speed of sound is one, the entropic contribution to the curvature power spectrum can be significant, compared to the inflaton one, only if the deceleration parameter ϵ is smaller at the end of inflation than at horizon crossing. In DBI inflation, however, the transfer function is

JCAP10(2009)012

amplified by the inverse of the product of the sound speed at horizon crossing and at the end of inflation, hence it is more efficient. Note that the enhancement of entropic perturbations by the inverse of the sound speed (2.15) was crucial in deriving this result.

It is straightforward to calculate the scalar spectral index and tensor to scalar ratio from the power spectrum. We find

$$n_s - 1 \equiv \frac{\mathrm{d}\ln\mathcal{P}_\zeta}{\mathrm{d}\ln k} = -2\epsilon_* - \eta_* - s_* + \frac{T_{\sigma s}^2}{1+T_{\sigma s}^2}\left(\eta_* - s_* - 2\frac{\dot{b}_*}{H_* b_*}\right), \tag{3.11}$$

and [16]

$$r = 16\epsilon_* c_{s*}\frac{1}{1+T_{\sigma s}^2} \approx 16\frac{1}{\tan^2(\alpha)}\frac{1}{\beta^2}\epsilon_e c_{se} c_{s*}^2, \qquad T_{\sigma s}^2 \gg 1 \tag{3.12}$$

where the last equality holds in the limit of a large entropic transfer. Hence it is clear that, when the curvature perturbation is of entropic origin, the links between the observables and the microscopic parameters of the model are completely different from the single field case.

3.3 Primordial bispectrum

3.3.1 General definitions

The bispectrum of the curvature perturbation is defined as

$$\langle \zeta_{\mathbf{k}_1}\, \zeta_{\mathbf{k}_2}\, \zeta_{\mathbf{k}_3}\rangle \equiv B_\zeta(k_1,k_2,k_3)(2\pi)^3\delta^3(\mathbf{k_1}+\mathbf{k_2}+\mathbf{k_3}), \tag{3.13}$$

where, from eqs. (2.24), (3.1) and (3.3) and to leading order [59]

$$\begin{aligned} B_\zeta(k_1,k_2,k_3) = {} & N_A N_B N_C B^{ABC}(k_1,k_2,k_3) \\ & + N_A N_{BC} N_D \left[C^{AC}(k_1)C^{BD}(k_2) + C^{AC}(k_2)C^{BD}(k_3) + C^{AC}(k_3)C^{BD}(k_1)\right]. \end{aligned} \tag{3.14}$$

Observational quantities are usually expressed in terms of the dimensionless non-linearity parameter $f_{\rm NL}$ — generally momentum-dependent — defined by

$$B_\zeta(k_1,k_2,k_3) = \frac{6}{5} f_{\rm NL}\left[P_\zeta(k_1)P_\zeta(k_2) + \text{perm.}\right]. \tag{3.15}$$

Hence there are two contributions to $f_{\rm NL}$: the first, coming from the first term in eq. (3.14), is related to the three-point functions of the fields at horizon crossing, and we will denote it as $f_{\rm NL}^{(3)}$:

$$f_{\rm NL}^{(3)} = \frac{5}{6}\frac{N_A N_B N_C B^{ABC}(k_1,k_2,k_3)}{(P_\zeta(k_1)P_\zeta(k_2) + \text{perm.})}. \tag{3.16}$$

The second, coming from the second group of terms in eq. (3.14), comes from the leading order nonlinear relation between the curvature perturbation and the field perturbations, and we will denote it as $f_{\rm NL}^{\rm loc}$ [47]:

$$f_{\rm NL}^{\rm loc} = \frac{5}{6}\frac{N_A N_B N^{AB}}{(N_C N^C)^2}, \tag{3.17}$$

the total $f_{\rm NL}$ being the sum of the two $f_{\rm NL} = f_{\rm NL}^{(3)} + f_{\rm NL}^{\rm loc}$.

JCAP10(2009)012

3.3.2 Equilateral and local bispectra

Let us first discuss $f_{\rm NL}^{(3)}$: if inflation is of slow-roll type when the observables modes cross the horizon — $c_{s*}^2 \approx 1$ — then $f_{\rm NL}^{(3)}$ is negligibly small. We therefore concentrate on the relativistic regime $c_{s*}^2 \ll 1$, in which case (3.4), (3.5), (3.6) and (3.8) give [15]

$$f_{\rm NL}^{(3)} = -\frac{5}{6c_{s*}^2(1+T_{\sigma s}^2)}\left(b^{\sigma\sigma\sigma}(k_1,k_2,k_3)\frac{\prod_i k_i^3}{\sum_i k_i^3}\right) . \tag{3.18}$$

Here we used the symmetry property $b^{\sigma ss}(k_1,k_2,k_3) + b^{s\sigma s}(k_1,k_2,k_3) + b^{ss\sigma}(k_1,k_2,k_3) = b^{\sigma\sigma\sigma}(k_1,k_2,k_3)$, which implies that the shape dependence of $f_{\rm NL}^{(3)}$ is the same as in single-field DBI, as can be understood in a geometrical way [21]. In the equilateral limit $k_1 = k_2 = k_3$,

$$f_{\rm NL}^{\rm eq} = -\frac{35}{108}\frac{1}{c_{s*}^2}\frac{1}{1+T_{\sigma s}^2} , \tag{3.19}$$

where $T_{\sigma s}^2$ is given in (3.10) in our model. Hence the entropic to curvature transfer in multifield DBI inflation diminishes the amount of equilateral non-Gaussianities with respect to the single field case. This comes from the fact that the transfer not only enhances the bispectrum of ζ but it also enhances its power spectrum by the same amount. Since $f_{\rm NL}^{\rm eq}$ is roughly the ratio of the three-point function with respect to the square of the power spectrum, $f_{\rm NL}^{\rm eq}$ is effectively reduced.

We now turn to the local shape of the bispectrum: from the definition (3.17), we obtain[7]

$$f_{\rm NL}^{\rm loc} = \frac{5}{6}\frac{N_s^2 N_{ss}}{(N_\sigma^2+N_s^2)^2} . \tag{3.20}$$

When there is a large entropic transfer — $N_s^2 \gg N_\sigma^2$ — (the case where the entropic transfer is small is discussed in appendix 2) eq. (3.20) reduces to the single field *entropic* result

$$f_{\rm NL}^{\rm loc} = \frac{5}{6}\frac{N_{ss}}{N_s^2} = -\frac{5}{3}\sqrt{\frac{\epsilon_e c_{se}}{2}}\frac{\phi_e^{(2)} M_{\rm pl}}{\phi_e'^2} , \qquad T_{\sigma s}^2 \gg 1 , \tag{3.21}$$

where we have used eqs. (2.32)–(2.33) in the last equality. Up to the factor $\sqrt{c_{se}}$ which diminishes the effect, this expression is identical to the slow-roll result [23] in the same limit. We have however a concrete model at hand, for which one obtains

$$f_{\rm NL}^{\rm loc} = \frac{5}{3}\frac{1}{\sin^2(\alpha)\cos(\alpha)}\sqrt{\frac{\epsilon_e c_{se}}{2}}\frac{M_{\rm pl}}{\phi_c} , \qquad T_{\sigma s}^2 \gg 1 . \tag{3.22}$$

This shows that $f_{\rm NL}^{\rm loc}$ is always positive, in agreement with the discussion in [60], and can be significant, given that the inflaton field ϕ is highly sub-Planckian in brane inflation [27] and therefore that $\frac{M_{\rm pl}}{\phi_c} \gg 1$. As we will see in subsection 3.4, it can even saturate the existing observational bound and put constraints on the model.

Let us stress that the bispectrum in our scenario displays a combination of two different shapes.[8] First, the classical nonlinear relation between the curvature perturbation and

[7] Note that strictly speaking there exists also a purely adiabatic contribution to $f_{\rm NL}^{\rm loc}$, proportional to $N_{\sigma\sigma}$ (A.3). This equals $\frac{5(\eta_*+s_*)}{12(1+T_{\sigma s}^2)^2}$, so it is suppressed by both slow-varying parameters and by the entropic transfer and is hence unobservably small. Similar, purely adiabatic, contributions are present in the non-linearity parameters of the trispectrum and we will neglect them as well.

[8] Note that this could be realized in the different context of multiple branes inflation [102, 103].

JCAP10(2009)012

the light entropic scalar field gives rise to local non-Gaussianities, that peak for squeezed triangles ($k_3 \ll k_2 \approx k_1$), and this is quantified by the parameter $f_{\rm NL}^{\rm loc}$. This type of non-Gaussianities constantly arises when the curvature perturbation is generated at the end of inflation through light fields other than the inflaton [49, 61–69]. Second, derivative interactions produce quantum correlations at the epoch of horizon crossing between modes of comparable wavelengths. The associated non-Gaussian signal peaks for equilateral triangles in momentum space ($k_1 \sim k_2 \sim k_3$) and this is quantified by the parameter $f_{\rm NL}^{\rm eq}$. Note that as the local and equilateral signals have fairly orthogonal distributions in momentum space [70], observational bounds on each of them can be used when they are both present, each one being almost blind to the other.[9]

3.3.3 Running non-Gaussianities

Besides its amplitude and shape, the scale dependence of the primordial bispectrum is another probe of the early universe physics, and recently it has been shown that combining CMB and large scale structure observations give interesting constraints on the running of non-Gaussianities [71, 72]. In our scenario, while $f_{\rm NL}^{\rm loc}$ (3.22) is scale-independent, it is clear that $f_{\rm NL}^{\rm eq}$ (3.19) is scale-dependent. This can be quantified by the running non-Gaussian parameter, defined as

$$n_{\rm NG} \equiv \frac{\partial \ln |f_{\rm NL}^{\rm eq}(k)|}{\partial \ln k} = -2s_* - \frac{T_{\sigma s}^2}{1+T_{\sigma s}^2}\left(\eta_* - s_* - 2\frac{\dot{b}_*}{H_* b_*}\right) , \tag{3.23}$$

where we have used eqs. (3.10) and (3.19) in the second equality.

As the speed of sound generally decreases with time in models in which the brane goes from the UV to the IR end of the throat, $s \equiv \dot{c}_s/Hc_s < 0$ so that $n_{\rm NG}$ is positive if the entropy modes do not feed the curvature perturbation. On the contrary, using the relation $\eta = 2\epsilon - s - \frac{\dot{f}}{Hf}$ valid in the DBI regime (see [18] for details), one obtains, for a large transfer,

$$n_{\rm NG} = -2\epsilon_* + 2\frac{\dot{b}_*}{H_* b_*} + \frac{\dot{f}_*}{H_* f_*} , \qquad T_{\sigma s}^2 \gg 1 . \tag{3.24}$$

Hence, if observable modes cross the horizon at the tip of the throat where b and f become constant, the running non-Gaussian index rather becomes negative.

3.4 Implication of the results

In the recent paper [73], it was noticed that in some models, brane inflation ends by tachyonic instability in the relativistic DBI regime, even if inflation is of slow-roll type when the observable modes cross the horizon. In this subsection, we concentrate on this limit, namely $c_{se}^2 \ll 1$, and additionally assume that the curvature perturbation is mostly of entropic origin $T_{\sigma s}^2 \gg 1$. Note that the deceleration parameter ϵ has been used until now only as a small parameter, quantifying how much the inflationary expansion is close to de-Sitter. However, in the DBI regime, it can be related to the brane tension and the warp factor. Indeed, since

$$\epsilon \equiv -\frac{\dot{H}}{H^2} = \frac{\dot{\phi}^2}{2c_s H^2 M_{\rm pl}^2} , \tag{3.25}$$

[9] We thank Eiichiro Komatsu for pointing this to us. Note also the recent paper [104] which demonstrates that the analysis of the shapes of non-Gaussianities requires careful handling.

JCAP10(2009)012

when $c_s^2 = 1 - f\dot{\phi}^2 \ll 1$, this gives, with eq. (2.5),

$$\epsilon c_s = \frac{T_3 h^4}{2H^2 M_{\rm pl}^2} \,. \tag{3.26}$$

Therefore, from (3.10) and (3.26), our hypotheses imply the condition

$$\frac{2H_e^2 M_{\rm pl}^2}{T_3 h_{\rm tip}^4} \frac{\epsilon_*}{c_{s*}} \tan^2(\alpha)\, \beta^2 \gg 1 \tag{3.27}$$

on the parameters of the model. With these assumptions, we now combine the results of the previous subsections and discuss the constraints imposed by non-Gaussianities from the bispectrum.

From $f_{\rm NL}^{\rm loc}$ given in (3.22), together with the definitions of ϕ_c in eq. (2.19) and T_3 in eq. (2.3), we obtain

$$f_{\rm NL}^{\rm loc} = \frac{5}{6} \frac{1}{\sin^2(\alpha)\cos(\alpha)} \frac{h_{\rm tip} m_s}{H_e} \,. \tag{3.28}$$

To avoid stringy corrections, one requires that at least $\frac{h_{\rm tip} m_s}{H_e} \gtrsim 1$ [74], which therefore acts in the direction of making observable local non-Gaussianities.[10] This can be made more stringent by noting that the power spectrum (3.9) can be reexpressed, in the limit of a large entropic transfer, as

$$\mathcal{P}_\zeta = 2\pi g_s \, \tan^2(\alpha) \left(\frac{\beta}{c_{s*}}\right)^2 \frac{(H_* H_e)^2}{(m_s h_{\rm tip})^4} \,. \tag{3.29}$$

Then, eqs. (3.28) and (3.29) together lead to

$$f_{\rm NL}^{\rm loc} = \frac{5}{6} 2^{3/2} \frac{(2\pi g_s)^{1/4}}{\sin^{3/2}(2\alpha)} \frac{1}{\mathcal{P}_\zeta{}^{1/4}} \left(\frac{\beta}{c_{s*}}\right)^{1/2} \left(\frac{H_*}{H_e}\right)^{1/2} \,. \tag{3.30}$$

For instance, taking $g_s = 0.1$ and $\alpha = \pi/4$ — which minimizes the result — together with the observed normalization of the power spectrum $\mathcal{P}_\zeta = 2.41\,.10^{-9}$ [3] gives

$$f_{\rm NL}^{\rm loc} \simeq 300 \left(\frac{\beta}{c_{s*}}\right)^{1/2} \left(\frac{H_*}{H_e}\right)^{1/2} \,. \tag{3.31}$$

Let us recall that the only hypotheses that we used to derive (3.31) are that the curvature perturbation is of entropic origin and that the end of infation takes place in the relativistic regime. It is in particular valid for any value of c_{s*} between zero and one. Furthermore, since the Hubble scale decreases during inflation, namely $H_*/H_e > 1$, then we find the lower bound

$$f_{\rm NL}^{\rm loc} \geq 300\, \beta^{1/2} \,. \tag{3.32}$$

Therefore, the WMAP5 observational constraint $-9 < f_{\rm NL}^{\rm loc} < 111$ (95% CL) [3] implies the upper bound $\beta \equiv b_{\rm tip}/b_* \lesssim 0.1$ in order to avoid too large non-Gaussianities of local type.

[10] A more severe bound can even be derived if one requires that the four-dimensional energy-density ρ_e be less than the local string energy density $(h_{\rm tip} m_s)^4$. With the Friedmann equation $3M_{\rm pl}^2 H_e^2 = \rho_e$, this gives indeed $h_{\rm tip} m_s / H_e \gtrsim \left(\frac{M_{\rm pl}}{H_e}\right)^{1/2} \gtrsim 140$ where the last inequality follows from the non detection of tensor modes. As this is only an order of magnitude bound, we do not consider that it rules out the model.

JCAP10(2009)012

We now turn to equilateral non-Gaussianities, which are diluted by the entropic transfer (3.19)

$$f_{\rm NL}^{\rm eq} \simeq -0.3 \frac{1}{c_{s*}^2 T_{\sigma s}^2} = -0.3 \frac{1}{\tan^2(\alpha)} \frac{\epsilon_e c_{se}}{\epsilon_* c_{s*}} \frac{1}{\beta^2} \,. \tag{3.33}$$

With eq. (3.26), this gives

$$f_{\rm NL}^{\rm eq} \simeq -0.3 \frac{1}{\tan^2(\alpha)} \left(\frac{H_*}{H_e}\right)^2 \frac{1}{\beta^2} \left(\frac{h_{\rm tip}}{h_*}\right)^4 . \tag{3.34}$$

One needs a precise model to actually determine the amplitude of $f_{\rm NL}^{\rm eq}$. Let us simply comment that if one tunes $\beta \equiv \frac{b_{\rm tip}}{b_*}$ to a small value to low down $f_{\rm NL}^{\rm loc}$ (3.31) in the observational range, this enhances $f_{\rm NL}^{\rm eq}$. However, in that case, observable modes cross the horizon far from the tip of the throat, and one expects a huge hierarchy $\left(\frac{h_{\rm tip}}{h_*}\right)^4 \ll 1$, which tends to put $f_{\rm NL}^{\rm eq}$ within the current observational bounds $-151 < f_{\rm NL}^{\rm eq} < 253$ (95% CL) [3].

4 Primordial non-Gaussianities from the trispectrum

As the next generation of experiments will be able to probe refined details of the statistics of density fluctuations [75–77], the study of the primordial trispectrum is becoming increasingly important. In DBI inflation, another motivation comes from the fact that $f_{\rm NL}^{(3)}$ acquires the same momentum dependence in single- and multiple-field models. Therefore, we cannot observationally differentiate between them with the bispectrum alone. As the degeneracy between models tends to be broken as we go to higher-order correlation functions, the investigation of the trispectrum in multifield DBI inflation is thus very natural.

4.1 General definitions

The primordial trispectrum is defined as the connected part of the four-point correlation function of the curvature perturbation in Fourier space

$$\langle \zeta_{\mathbf{k}_1} \zeta_{\mathbf{k}_2} \zeta_{\mathbf{k}_3} \zeta_{\mathbf{k}_4} \rangle_c \equiv T_\zeta(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3, \mathbf{k}_4) (2\pi)^3 \delta^3(\mathbf{k_1} + \mathbf{k_2} + \mathbf{k_3} + \mathbf{k_4}) \,. \tag{4.1}$$

We need twelve real numbers to specify a set of four three-dimensional momenta. However, momentum conservation, $\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3 + \mathbf{k}_4 = 0$, eliminates three of them and invariance under rotational symmetry eliminate three others. We are thus left with six independent parameters that specify inequivalent configurations of the tetrahedron formed by the four $\mathbf{k}$ vectors: we will use the set $\{k_1, k_2, k_3, k_4, k_{12}, k_{23}\}$ where $k_{12} = |\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2|$ and $k_{23} = |\mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3|$. The others $k_{ij} = |\mathbf{k}_i + \mathbf{k}_j|$ can then be reexpressed in terms of them as follows:

$$\begin{aligned} k_{13} &= k_{24} = \sqrt{k_1^2 + k_2^2 + k_3^3 + k_4^2 - k_{12}^2 - k_{23}^2} \,, \\ k_{14} &= k_{23} \,, \qquad k_{34} = k_{12} \,. \end{aligned} \tag{4.2}$$

Note that there are geometrical limitations on the parameter space, for instance in the form of triangle inequalities (see [78] for details).

JCAP10(2009)012

From the general δN expansion (2.24), the primordial trispectrum can be evaluated and one finds [52]

$$\begin{aligned} T_\zeta(\mathbf{k}_1,\mathbf{k}_2,\mathbf{k}_3,\mathbf{k}_4) = & \; N_A N_B N_C N_D T^{ABCD}(\mathbf{k}_1,\mathbf{k}_2,\mathbf{k}_3,\mathbf{k}_4) \\ & + N_{AB} N_C N_D N_E \left[C^{AC}(k_1) B^{BDE}(k_{12},k_3,k_4) + 11 \text{ perms}\right] \\ & + N_{AB} N_{CD} N_E N_F \left[C^{BD}(k_{13}) C^{AE}(k_3) C^{CF}(k_4) + 11 \text{ perms}\right] \\ & + N_{ABC} N_D N_E N_F \left[C^{AD}(k_2) C^{BE}(k_3) C^{CF}(k_4) + 3 \text{ perms}\right] \end{aligned} \tag{4.3}$$

(where we have omitted special configurations of the wavevectors, for instance when any $\mathbf{k}$ vector or the sum of any two $\mathbf{k}$ vectors is zero). Here the T^{ABCD} are the connected four-point correlation functions of the field perturbations at the epoch of horizon crossing, defined by

$$\langle Q^A_{\mathbf{k}_1} Q^B_{\mathbf{k}_2} Q^C_{\mathbf{k}_3} Q^D_{\mathbf{k}_4} \rangle_c \equiv T^{ABCD}(\mathbf{k}_1,\mathbf{k}_2,\mathbf{k}_3,\mathbf{k}_4)(2\pi)^3 \delta^3(\sum_{\mathbf{i}} \mathbf{k_i}) \,.$$

Introducing

$$\tau_{\rm NL} \equiv \frac{N_{AB} N^{AC} N^B N_C}{(N_D N^D)^3} \tag{4.4}$$

and

$$g_{\rm NL} \equiv \frac{25}{54} \frac{N_{ABC} N^A N^B N^C}{(N_D N^D)^3} \tag{4.5}$$

simplifies the expression of (4.3) to

$$\begin{aligned} T_\zeta(\mathbf{k}_1,\mathbf{k}_2,\mathbf{k}_3,\mathbf{k}_4) = & \; N_A N_B N_C N_D T^{ABCD}(\mathbf{k}_1,\mathbf{k}_2,\mathbf{k}_3,\mathbf{k}_4) \\ & + N_{AB} N_C N_D N_E \left[C^{AC}(k_1) B^{BDE}(k_{12},k_3,k_4) + 11 \text{ perms}\right] \\ & + \tau_{\rm NL} \left[P_\zeta(k_{13}) P_\zeta(k_3) P_\zeta(k_4) + 11 \text{ perms}\right] \\ & + \frac{54}{25} g_{\rm NL} \left[P_\zeta(k_2) P_\zeta(k_3) P_\zeta(k_4) + 3 \text{ perms}\right] \,. \end{aligned} \tag{4.6}$$

In order to compare the various momentum dependences entering (4.6), we use the form factor $\mathcal{T}$ defined by [78]

$$T_\zeta(\mathbf{k}_1,\mathbf{k}_2,\mathbf{k}_3,\mathbf{k}_4) = (2\pi)^6 \, \mathcal{P}_\zeta^3 \left(\prod_{i=1}^4 \frac{1}{k_i^3} \right) \, \mathcal{T}(k_1,k_2,k_3,k_4,k_{12},k_{14}) \,, \tag{4.7}$$

whilst the amplitude of the trispectrum signal is quantified by the estimator $t_{\rm NL}$ for each shape component

$$\frac{1}{k^3} \mathcal{T}(k_1,k_2,k_3,k_4,k_{12},k_{14})_{\rm component} \xrightarrow[\text{limit}]{\rm RT} t_{\rm NL} \,. \tag{4.8}$$

Here the regular tetrahedron (RT) limit means $k_1 = k_2 = k_3 = k_4 = k_{12} = k_{14} \equiv k$ [22, 78].

In the DBI regime of brane inflation, the quantum non-Gaussianities of the fields are large — as set by their bispectrum B^{ABC} and connected part of their trispectrum T^{ABCD} — and the first two lines in eq. (4.6) a priori gives sizeable contributions to the primordial trispectrum. Moreover, the last two lines in eq. (4.6) could be significant as we will see later. Their respective amplitude are determined by the two parameters $\tau_{\rm NL}$ and $g_{\rm NL}$, which are similar to $f_{\rm NL}^{\rm loc}$ for the bispectrum in that they describe the nonlinearities generated classically

JCAP10(2009)012

outside the horizon. In that sense we will occasionally refer to them as the local trispectrum parameters. They contribute to the form factor as

$$\mathcal{T} \supset \frac{36}{25}\tau_{\rm NL} T_{loc1} + g_{\rm NL} T_{loc2}\,, \tag{4.9}$$

where the two local shapes are

$$T_{loc1} = \frac{9}{50}\left(\frac{k_1^3 k_2^3}{k_{13}^3} + 11 \text{ perms}\right)\,, \tag{4.10}$$

$$T_{loc2} = \frac{27}{100}\sum_{i=1}^{4} k_i^3\,, \tag{4.11}$$

and the size of the trispectrum for each is

$$t_{\rm NL}^{loc1} = 1.18\,\tau_{\rm NL}\,, \quad t_{\rm NL}^{loc2} = 1.08\,g_{\rm NL}\,. \tag{4.12}$$

We study the local and intrinsically quantum contributions to the trispectrum in the next subsection while the discussion of the second term in the right hand side of eq. (4.6) is deferred to subsection 4.3.

4.2 Local and intrinsically quantum trispectra in our model

We begin by considering the standard local parameters $\tau_{\rm NL}$ and $g_{\rm NL}$. From their definitions eqs. (4.4) and (4.5), they are given by

$$\tau_{\rm NL} = \frac{N_s^2 N_{ss}^2}{(N_\sigma^2 + N_s^2)^3}\,, \qquad g_{\rm NL} = \frac{25}{54}\frac{N_s^3 N_{sss}}{(N_\sigma^2 + N_s^2)^3}\,. \tag{4.13}$$

Notice that using eqs. (A.7)–(A.9) and (2.32)–(2.33), the entropic derivatives satisfy

$$N_s N_{sss} = 3\sin^2(\alpha) N_{ss}^2\,. \tag{4.14}$$

We therefore obtain

$$g_{\rm NL} = \frac{25}{18}\sin^2(\alpha)\tau_{\rm NL}\,. \tag{4.15}$$

As $\tau_{\rm NL}$ and $g_{\rm NL}$ are in principle observationally distinguishable [79], this gives us the possibility to deduce the angle α from the observations. Given that $g_{\rm NL} < \frac{25}{18}\tau_{\rm NL}$, it should be stressed also that one can not obtain a large $g_{\rm NL}$ without having a large $\tau_{\rm NL}$, contrary to the cases of the curvaton [80], ekpyrotic models [81] or non slow-roll multifield inflation [82]. Specializing to the limit in which the curvature perturbation is mostly of entropic origin, one obtains from eq. (4.13) the single-field *entropic* result

$$\tau_{\rm NL} = \frac{N_{ss}^2}{N_s^4} = \left(\frac{6}{5} f_{\rm NL}^{\rm loc}\right)^2\,, \qquad T_{\sigma s}^2 \gg 1 \tag{4.16}$$

where $f_{\rm NL}^{\rm loc}$ is given in this limit by (3.22) (and the relation (4.15) still holds).

The intrinsic trispectra of the fields also leave their imprint on the primordial trispectrum, through the linear relation between the curvature perturbation and the field perturbations at horizon crossing (see the first term in eq. (4.6)). The calculation of the field

JCAP10(2009)012

trispectra in multifield models with non-standard kinetic terms, and in multifield DBI inflation in particular, begun only very recently [19, 21, 22]. For example, the authors of [21, 22] considered the trispectra from the intrinsic fourth-order contact interaction. However, it was pointed out that there are other important contributions coming from interactions at a distance [19, 78, 83, 84]. As the full calculation of the field bispectra in multifield DBI inflation has not yet been completed, below we simply comment on the partial results coming from the contact interaction. The important result is that the degeneracy between single and multiple-field models is broken at this level, i.e. with our notations one obtains

$$\begin{aligned} T_\zeta(\mathbf{k}_1,\mathbf{k}_2,\mathbf{k}_3,\mathbf{k}_4) \supset\, & N_\sigma^4\Big(T^{\sigma\sigma\sigma\sigma}(\mathbf{k}_1,\mathbf{k}_2,\mathbf{k}_3,\mathbf{k}_4) + T_{\sigma s}^2\Big(T^{\sigma\sigma ss}(\mathbf{k}_1,\mathbf{k}_2,\mathbf{k}_3,\mathbf{k}_4) + 5 \text{ perms}\Big) \\ & + T_{\sigma s}^4\, T^{ssss}(\mathbf{k}_1,\mathbf{k}_2,\mathbf{k}_3,\mathbf{k}_4)\Big) \\ = \, & N_\sigma^4(1+T_{\sigma s}^2)\Big(T^{\sigma\sigma\sigma\sigma}(\mathbf{k}_1,\mathbf{k}_2,\mathbf{k}_3,\mathbf{k}_4) + T_{\sigma s}^2 T^{ssss}(\mathbf{k}_1,\mathbf{k}_2,\mathbf{k}_3,\mathbf{k}_4)\Big) \end{aligned} \tag{4.17}$$

where the last line follows from a particular relation between the mixed term $T^{\sigma\sigma ss}$ and the adiabatic and entropic trispectra, which have the same order of magnitude $\sim N_\sigma^2 H_*^6/c_{s*}^4$ but different momentum dependence. Therefore the trispectrum can a priori discriminate between single- and multifield DBI inflation. In particular, one can hope that looking at the trispectrum signal in different limits of the tetrahedron's parameter space might enable a measurement of $T_{\sigma s}$. As for the overall amplitude of these terms though, with $\mathcal{P}_\zeta = \left(\frac{H_*}{2\pi}\right)^2 N_\sigma^2(1+T_{\sigma s}^2)$ (3.8), this schematically gives a contribution to $t_{\rm NL}$ of the form

$$t_{\rm NL} \sim \frac{1}{\mathcal{P}_\zeta^3}\frac{N_\sigma^2 H_*^6}{c_{s*}^4} N_\sigma^4(1+T_{\sigma s}^2)(1+a\,T_{\sigma s}^2) \sim \frac{1}{c_{s*}^4}(1+T_{\sigma s}^2)\frac{1+a\,T_{\sigma s}^2}{(1+T_{\sigma s}^2)^3} \tag{4.18}$$

where a is a $O(1)$ numerical coefficient. Similarly to the case of the bispectrum, notice that the field trispectra having the same amplitude implies that the transfer function $T_{\sigma s}$ solely determines the multiple-field modification to the single-field result $t_{\rm NL} \sim \frac{1}{c_{s*}^4}$ [85]. Therefore, even if one does not succeed extracting $T_{\sigma s}^2$ from measurements of the trispectrum alone — for example because $T_{\sigma s}^2 \gg 1$ and the entropic signal (the last term in (4.17)) dominates over the adiabatic one — one can in principle combine measurements of the trispectrum and of the bispectrum (3.19) $f_{\rm NL}^{\rm eq} \approx -0.3\frac{1}{c_{s*}^2(1+T_{\sigma s}^2)}$ to determine both c_{s*} and $T_{\sigma s}$. This illustrates how the study of higher-order correlation functions can be used to extract information one can not obtain with the power spectrum alone.

4.3 An observational signature of multifield DBI inflation

Going back to the general expression eq. (4.6), one sees that the intrinsic bispectrum of the fields also contribute to the primordial trispectrum of the curvature perturbation, i.e.

$$T_\zeta(\mathbf{k}_1,\mathbf{k}_2,\mathbf{k}_3,\mathbf{k}_4) \supset N_{AB}N_C N_D N_E\left[C^{AC}(k_1)B^{BDE}(k_{12},k_3,k_4) + 11 \text{ perms}\right]. \tag{4.19}$$

Remarkably, this term is solely determined by quantities that already appeared in lower-order correlation functions. In particular, while N_{AB} determine the amplitude of $f_{\rm NL}^{\rm loc}$ (3.17), the intrinsic bispectra of the fields B^{ABC} set the magnitude of $f_{\rm NL}^{(3)}$ (3.16). Therefore, this contribution can be non negligible only if significant classical nonlinearities and quantum non-Gaussianities are present in the same model, which explains why it has been neglected

JCAP10(2009)012

before and why we refer to it as $T_\zeta^{\rm loc,\,eq}$ in the following. Note that since the shape of the field three-point functions does not take a universal form, one cannot extract a number that characterizes the amplitude of $T_\zeta^{\rm loc,\,eq}$ independently of a model, contrary to $\tau_{\rm NL}$ (4.4), which also depends only on lower-order terms.

In our scenario, $T_\zeta^{\rm loc,\,eq}$ reads

$$\begin{aligned} T_\zeta^{\rm loc,\,eq} = \big[& N_{\sigma\sigma} N_\sigma^3 C^{\sigma\sigma}(k_1) B^{\sigma\sigma\sigma}(k_{12},k_3,k_4) + N_{\sigma\sigma} N_\sigma N_s^2 C^{\sigma\sigma}(k_1) B^{\sigma ss}(k_{12},k_3,k_4) \\ & + N_{ss} N_\sigma N_s^2 C^{ss}(k_1) \left(B^{ss\sigma}(k_{12},k_3,k_4) + B^{s\sigma s}(k_{12},k_3,k_4) \right) + 11 \text{ perms} \big] \,. \end{aligned} \tag{4.20}$$

Notice that the first two terms, being proportional to $N_{\sigma\sigma}$, are negligible to leading order in the slow-varying parameters and we are left with the second line alone at this order. We have included the first line only to stress that the trispectrum breaks the degeneracy between the two shapes $b^{\sigma\sigma\sigma}$ and $b^{\sigma ss}$ entering the bispectrum, defined respectively in eqs. (3.5) and (3.6). Recall indeed that we used the symmetry property

$$b^{\sigma ss}(k_1,k_2,k_3) + b^{s\sigma s}(k_1,k_2,k_3) + b^{ss\sigma}(k_1,k_2,k_3) = b^{\sigma\sigma\sigma}(k_1,k_2,k_3) \tag{4.21}$$

to show that the multifield effects do not modify the shape of $f_{\rm NL}^{(3)}$ compared to the single-field case. Here, one sees that because $N_{\sigma\sigma} \neq N_{ss}$ in general, one can not use this identity and the primordial trispectrum truly depends on the shape $b^{\sigma ss}$, not on its symmetrized version $b^{\sigma\sigma\sigma}$.

Let us now concentrate on the leading-order term, namely the second line in eq. (4.20), and write its contribution to the form factor as

$$\mathcal{T} \supset s_{\rm NL}\, T_{loc,\,eq} \,, \tag{4.22}$$

where

$$T_{loc,\,eq} \equiv \frac{81}{175} \left(k_2 k_3 k_4\right)^3 \left[b^{ss\sigma}(k_{12},k_3,k_4) + b^{s\sigma s}(k_{12},k_3,k_4) \right] + 11 \text{ perms} \,. \tag{4.23}$$

Here, $s_{\rm NL}$ is a dimensionless non-linearity parameter that set the amplitude of $T_{loc,\,eq}$, similarly to $\tau_{\rm NL}$ and $g_{\rm NL}$ for T_{loc1} and T_{loc2} respectively (see eq. (4.9)), and the numerical factor in the definition of $T_{loc,\,eq}$ is for convenience only. The overal amplitude of this contribution to the trispectrum is

$$t_{\rm NL}^{loc,\,eq} = 0.09\, s_{\rm NL} \,. \tag{4.24}$$

By noting that (3.4) can be rewritten in the form

$$B^{ABC}(k_1,k_2,k_3) = -\frac{N_\sigma H_*^4}{4 c_{s*}^2} b^{ABC}(k_1,k_2,k_3) \,, \tag{4.25}$$

from (4.20), one formally obtains

$$s_{\rm NL} = -\frac{175}{648} \frac{N_{ss}}{N_\sigma^2} \frac{1}{c_{s*}^2} \frac{T_{\sigma s}^2}{(1+T_{\sigma s}^2)^3} \,, \tag{4.26}$$

which is exactly the product of $f_{\rm NL}^{\rm loc}$ (3.20) and $f_{\rm NL}^{\rm eq}$ (3.19)

$$s_{\rm NL} = f_{\rm NL}^{\rm loc}\, f_{\rm NL}^{\rm eq} \,. \tag{4.27}$$

It is worth emphasizing that, in order to derive the result (4.27), we solely used the δN formalism together with the general results for the field bispectra [16]. Hence it is clear that

JCAP10(2009)012

it is valid for every DBI model, not restricting to a radial trajectory nor to a specific scenario for the entropy to curvature transfer. In particular, we considered the two-field case for simplicity of presentation but the proof generalizes straightforwardly to a higher number of light fields. The consistency relation (4.27) is thus structural to multifield DBI inflation. It represents a distinct observational imprint on the trispectrum of the presence of light scalar fields, other than the inflaton, and with non standard kinetic terms, hence the appearance of both the local and equilateral non-linearity parameters.

4.4 Shapes of trispectra

To test the consistency relation (4.27), one must observationally disentangle the contribution proportional to $s_{\rm NL}$ from other components of the trispectrum. The study of its six-dimensional parameter space is challenging and in the following, we follow the discussion in [78] and simply plot the form factor $T_{loc,\,eq}$ in various limits to reduce the number of variables, and compare it to T_{loc1} and T_{loc2}. The shape functions are left white when the momenta do not form a tetrahedron. We consider the following cases (see [78] for details):

1. Equilateral limit: $k_1 = k_2 = k_3 = k_4$. In figure 3, we plot $T_{loc,\,eq}$, T_{loc1} and T_{loc2} as functions of k_{12}/k_1 and k_{14}/k_1. One observes that $T_{loc,\,eq}$ and T_{loc1} blow up at all boundaries, corresponding to k_{12}/k_1, k_{14}/k_1 and $k_{13}/k_1 \to 0$. However, the signal in $T_{loc,\,eq}$ is much more important, as is clear from the extremely large cutoff for the z-axis in this figure. On the contrary, T_{loc2} is constant in this region of parameter space.

2. Specialized planar limit: we take $k_1 = k_3 = k_{14}$, and the tetrahedron to be a planar quadrangle with [78]

$$k_{12} = \left[k_1^2 + \frac{k_2 k_4}{2k_1^2}\left(k_2 k_4 + \sqrt{(4k_1^2 - k_2^2)(4k_1^2 - k_4^2)}\right)\right]^{1/2} . \tag{4.28}$$

   We plot the shape functions as functions of k_2/k_1 and k_4/k_1 in figure 4. At the $k_2 \to k_4$ limit, we have $k_{13} \to 0$, so that $T_{loc,\,eq}$ and T_{loc1} blow up. Again, the signal in $T_{loc,\,eq}$ is much more important and we had to use an extremely large cutoff for the z-axis for the sake of presentation. The most distinctive difference comes from the $k_2 \to 0$ and $k_4 \to 0$ boundaries, where T_{loc1} and T_{loc2} take finite (non-zero) values whereas $T_{loc,\,eq}$ blows up. Moreover, its sign alternates non-trivially over the parameter space. Interestingly, this feature was not present in any other shape studied in [78].

3. Near the double-squeezed limit: we consider the case where $k_3 = k_4 = k_{12}$ and the tetrahedron is a planar quadrangle with [78]

$$k_2 = \frac{\sqrt{k_1^2\left(-k_{12}^2 + k_3^2 + k_4^2\right) - k_{s1}^2 k_{s2}^2 + k_{12}^2 k_{14}^2 + k_{12}^2 k_4^2 + k_{14}^2 k_4^2 - k_{14}^2 k_3^2 - k_4^4 + k_3^2 k_4^2}}{\sqrt{2}k_4} , \tag{4.29}$$

   where k_{s1} and k_{s2} are defined as

$$\begin{aligned} k_{s1}^2 &\equiv 2\sqrt{(k_1 k_4 + \mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{k}_4)(k_1 k_4 - \mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{k}_4)} , \\ k_{s2}^2 &\equiv 2\sqrt{(k_3 k_4 + \mathbf{k}_3 \cdot \mathbf{k}_4)(k_3 k_4 - \mathbf{k}_3 \cdot \mathbf{k}_4)} . \end{aligned} \tag{4.30}$$

JCAP10(2009)012

We plot $T_{loc,\,eq}$, T_{loc1} and T_{loc2} as functions of k_4/k_1 and k_{14}/k_1 in figure 5. Similarly to the specialized planar limit, notice that the sign of $T_{loc,\,eq}$ varies non trivially over the domain. Several differences between the shapes are visible. 1) In the squeezed limit, at $(k_4/k_1 = 1, k_{14}/k_1 = 1)$ where $k_2 \to 0$, and in the double-squeezed limit, $k_3 = k_4 \to 0$, $T_{loc,\,eq}$ blows up while the local shapes are finite. 2) In the folded limit $(k_4/k_1 = 1, k_{14}/k_1 = 0)$, both $T_{loc,\,eq}$ and T_{loc1} blow up and T_{loc2} takes a finite value. 3) In the other folded limit, $(k_4/k_1 = 1, k_{14}/k_1 = 2)$, all shapes remain finite. Close to it, note that the bump in T_{loc1} actually remains finite while $T_{loc,\,eq}$ truly blows up.

To summarize, although we did not make an exhaustive study of the shape factor $T_{loc,\,eq}$, we have seen that it presents characteristic features. In particular, in the last two envisaged situations where the tetrahedron reduces to a planar quadrangle, its sign non-trivially varies over the parameter space, in contrast with all shapes studied in [78] for instance. This is all the more interesting as this planar limit corresponds to the situation effectively probed by small (angular) scale CMB experiments. This gives hope to be able to test the consistency relation (4.27).

5 Conclusions

In this paper, we have analyzed a scenario to convert entropic into curvature perturbations in the context of multifield brane inflation, and multifield DBI inflation in particular. Considering a standard single-field driven inflationary phase ending by tachyonic instability, we have shown how the perturbations of light fields, parametrizing the angular position of the brane in the throat, can generate curvature perturbation by spatially modulating the duration of inflation. The entropic transfer generated by this mechanism is more efficient in the DBI than in the slow-roll regime, being enhanced by the inverse of the sound speed at horizon crossing and at the end of inflation.

We have investigated the non-Gaussianities created in such models. Single-field DBI inflation is known to produce a substantial amount of non-Gaussianities of equilateral type and previous works on multifield DBI inflation showed that the entropic perturbations reduce the amplitude $f_{\rm NL}^{\rm eq}$ of these non-Gaussianities. However, as soon as light scalar fields other than the inflaton are present, non-Gaussianities of another shape, namely local non-Gaussianities, can be present. In our model, they arise because of the nonlinear relation between the curvature perturbation and the angular ones. This local contribution $f_{\rm NL}^{\rm loc}$ to the non-linearity parameter $f_{\rm NL}$ can be large and even saturate the observational bounds for some specific scenarios.

We have also calculated $\tau_{\rm NL}$ and $g_{\rm NL}$, which are trispectrum parameters similar to $f_{\rm NL}^{\rm loc}$ for the bispectrum, in that they describe the nonlinearities generated classically outside the horizon. We have shown that $g_{\rm NL}$ is related to $\tau_{\rm NL}$ by a simple parameter describing the angular position of the mobile brane, implying $g_{\rm NL} < \frac{25}{18}\tau_{\rm NL}$. When the curvature perturbation is mostly of entropic origin, $\tau_{\rm NL} = \left(\frac{6}{5} f_{\rm NL}^{\rm loc}\right)^2$, easily reaching the expected Planck sensitivity $|\tau_{\rm NL}| \sim 560$ [75] as soon as $f_{\rm NL}^{\rm loc} \gtrsim 25$. The trispectrum also contains a part that is directly related to the trispectra of the field perturbations. One can in principle extract the entropic transfer function from its complicated momentum dependence, as well as determine the sound speed when the observable modes cross the horizon by combining it with measurements of $f_{\rm NL}^{\rm eq}$.

Finally, due to the presence of light scalar fields, other than the inflaton, and with non standard kinetic terms, the primordial trispectrum acquires a particular momentum

JCAP10(2009)012

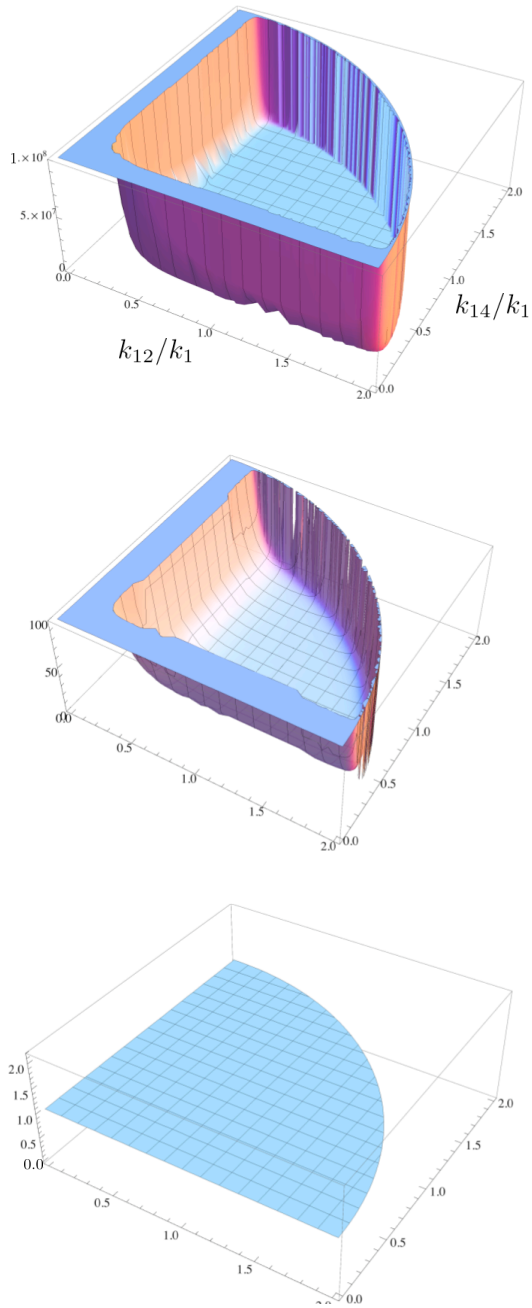

Figure 3. In this group of figures, we consider the equilateral limit $k_1 = k_2 = k_3 = k_4$, and plot $T_{loc,\,eq}$, T_{loc1} and T_{loc2}, respectively, as functions of k_{12}/k_1 and k_{14}/k_1. Note that $T_{loc,\,eq}$ and T_{loc1} blow up when $k_{12} \ll k_1$ and $k_{14} \ll k_1$, as well as in the other boundary, corresponding to $k_{13} \ll k_1$.

JCAP10(2009)012

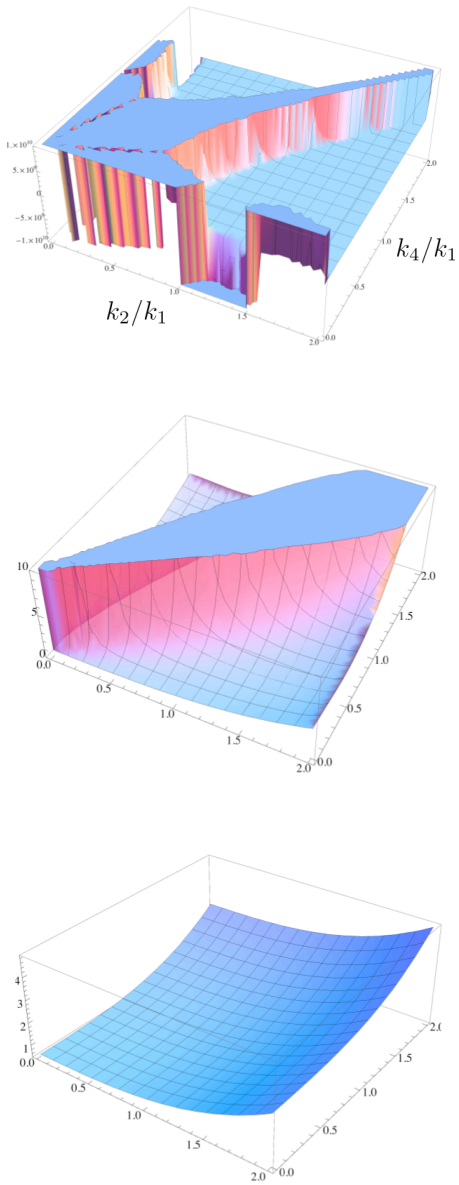

Figure 4. In this group of figures, we consider the specialized planar limit with $k_1 = k_3 = k_{14}$, and plot $T_{loc,\,eq}$, T_{loc1} and T_{loc2}, respectively, as functions of k_2/k_1 and k_4/k_1. Along the diagonal $k_2 \to k_4$, $T_{loc,\,eq}$ and T_{loc1} blow up because in this limit, $k_{13} \to 0$. At the $k_2 \to 0$ and $k_4 \to 0$ boundaries, $T_{loc,\,eq}$ blow up while the local shapes remain finite. Notice that the sign of $T_{loc,\,eq}$ varies non trivially over the parameter space.

JCAP10(2009)012

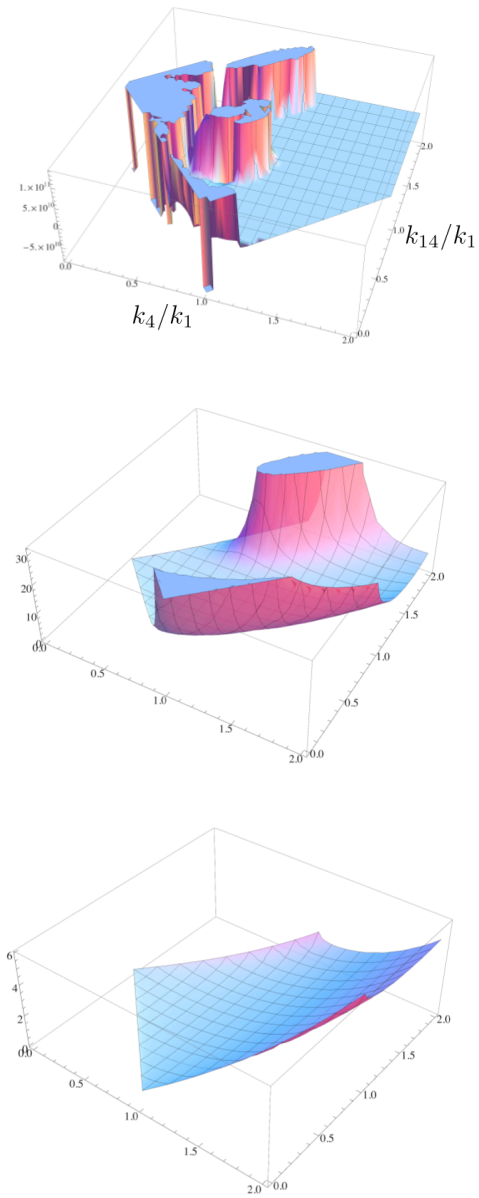

Figure 5. In this group of figures, we look at the shapes near the double squeezed limit: we consider the case where $k_3 = k_4 = k_{12}$ and the tetrahedron is a planar quadrangle. We plot $T_{loc,\,eq}$, T_{loc1} and T_{loc2}, respectively, as functions of k_4/k_1 and k_{14}/k_1. Notice that the sign of $T_{loc,\,eq}$ varies non trivially over the domain. In the squeezed limit, at $(k_4/k_1 = 1, k_{14}/k_1 = 1)$ where $k_2 \to 0$, and in the double-squeezed limit, $k_3 = k_4 \to 0$, $T_{loc,\,eq}$ blows up while the local shapes are finite (see the main text for additional comments).

JCAP10(2009)012

dependent component whose amplitude (4.27) is given by the product $f_{\rm NL}^{\rm loc}\, f_{\rm NL}^{\rm eq}$. Moreover, this consistency relation is valid in every multifield DBI model, whatever the brane's trajectory or the mechanism to convert entropic perturbations into the curvature perturbation. It thus represents an interesting observational signature of multifield DBI inflation. We have represented the corresponding form factor in different limits and it turned out to display important differences with the shapes associated to $\tau_{\rm NL}$ and $g_{\rm NL}$, such as its sign varying over the tetrahedron's parameter space. Overall, should future experiments come to detect both local and equilateral non-Gaussianities in the primordial bispectrum, the trispectrum may well help to to confirm or exclude this kind of scenarios.

Note added. On the day this work was submitted, the paper [86] appeared in the arXiv, which completes the calculation of the trispectrum coming from the four-point functions of the field perturbations in multifield DBI inflation.

Acknowledgments

We would like to thank Eiichiro Komatsu, David Langlois, Liam McAllister, Fransesco Nitti, Sarah Shandera and Daniele Steer for valuable discussions related to the topic of this paper, and particularly David Langlois and Daniele Steer for their careful reading of the manuscript.

A δN formulae beyond leading order

Using the expressions of ζ_* (2.29) and ζ_e (2.30) together with the definitions of η (2.12) and s (2.13), one obtains the coefficients of the δN expansion without restricting to leading order in these slowly-varying parameters and their time derivatives:

$$N_\sigma = -\left.\frac{1}{\sqrt{2\epsilon c_s}}\frac{1}{M_{\rm pl}}\right|_* \tag{A.1}$$

$$N_s = -\left.\frac{\phi_e'}{\sqrt{2\epsilon c_s}}\frac{1}{M_{\rm pl}}\right|_e \tag{A.2}$$

$$N_{\sigma\sigma} = \left.\frac{\eta+s}{4\epsilon c_s}\frac{1}{M_{\rm pl}^2}\right|_* \tag{A.3}$$

$$N_{ss} = -\left.\left(\frac{\phi_e^{(2)}}{\sqrt{2\epsilon c_s}M_{\rm pl}} + \frac{\eta+s}{4\epsilon c_s}\frac{\phi_e'^2}{M_{\rm pl}^2}\right)\right|_e \tag{A.4}$$

$$N_{\sigma\sigma\sigma} = \left.\frac{1}{2^{5/2}(\epsilon c_s)^{3/2}M_{\rm pl}^3}\left(\frac{\dot\eta}{H}+\frac{\dot s}{H}-(\eta+s)^2\right)\right|_* \tag{A.5}$$

$$N_{sss} = -\left.\left(\frac{\phi_e^{(3)}}{\sqrt{2\epsilon c_s}M_{\rm pl}} + 3\frac{(\eta+s)}{4\epsilon c_s}\frac{\phi_e'\phi_e^{(2)}}{M_{\rm pl}^2} + \frac{\phi_e'^3}{2^{5/2}(\epsilon c_s)^{3/2}M_{\rm pl}^3}\left(\frac{\dot\eta}{H}+\frac{\dot s}{H}-(\eta+s)^2\right)\right)\right|_e \tag{A.6}$$

The derivatives of $\phi_e(\Xi_*)$ (2.26) are evaluated at the background value $\bar\Xi = b_* c_{s*}\bar\theta$ and their explicit expressions read

$$\phi_e' = -\tan(\alpha)\frac{\beta}{c_{s*}}\,, \tag{A.7}$$

JCAP10(2009)012

$$\phi_e^{(2)} = -\frac{1}{\cos^3(\alpha)}\left(\frac{\beta}{c_{s*}}\right)^2 \frac{1}{\phi_c}\,, \tag{A.8}$$

$$\phi_e^{(3)} = -\frac{3\tan(\alpha)}{\cos^4(\alpha)}\left(\frac{\beta}{c_{s*}}\right)^3 \frac{1}{\phi_c^2}\,. \tag{A.9}$$

B Higher order loop contributions

Given we encountered large entropic derivatives in the δN formalism, one must ensure that we are in a simple perturbative regime in which one can safely neglect higher order loop corrections (see [87, 88] for discussions on the viability of a perturbative expansion and [89] for a diagrammatic approach to loop effects). The integral over the loop momenta give rise to logarithmic infrared divergences $\ln(kL)$ where L is the large scale cut off. In the following we assume that one can take $\ln(kL) \sim 1$ as done in [90–92]. Concentrating on the δN expansion (2.24) to second order for simplicity, and neglecting for the moment the non-Gaussianities of the fields at horizon crossing, the dominant loop corrections to the power spectrum, bispectrum and trispectrum are [91, 92]

$$\frac{P_\zeta^{1loop}}{P_\zeta^{\rm tree}} = \frac{N_{AB}N_{AB}}{(N_C N_C)^2}\mathcal{P}_\zeta, \tag{B.1}$$

$$f_{\rm NL}^{1\,\rm loop} = \frac{5}{6}\frac{N_{AB}N_{BC}N_{AC}}{(N_D N_D)^3}\mathcal{P}_\zeta, \tag{B.2}$$

$$\tau_{\rm NL}^{1\,\rm loop} = \frac{N_{AB}N_{BC}N_{CD}N_{AD}}{(N_E N_E)^4}\mathcal{P}_\zeta. \tag{B.3}$$

Below we discuss the two limiting cases of a large and small entropic transfer.

- *Large entropic transfer.*

  For a large entropic transfer, one obtains

$$\frac{P_\zeta^{1loop}}{P_\zeta^{\rm tree}} = \left(\frac{N_{ss}}{N_s^2}\right)^2 \mathcal{P}_\zeta = \left(\frac{6}{5}f_{\rm NL}^{\rm loc}\right)^2 \mathcal{P}_\zeta, \tag{B.4}$$

$$f_{\rm NL}^{1\,\rm loop} = \frac{5}{6}\left(\frac{N_{ss}}{N_s^2}\right)^3 \mathcal{P}_\zeta = \frac{36}{25}\left(f_{\rm NL}^{\rm loc}\right)^3 \mathcal{P}_\zeta, \tag{B.5}$$

$$\tau_{\rm NL}^{1\,\rm loop} = \left(\frac{N_{ss}}{N_s^2}\right)^4 \mathcal{P}_\zeta = \left(\frac{6}{5}f_{\rm NL}^{\rm loc}\right)^4 \mathcal{P}_\zeta. \tag{B.6}$$

  Therefore, given that $\mathcal{P}_\zeta \sim 10^{-10}$ and that observations already show that the level of non-Gaussianities is relatively small, $f_{\rm NL}^{\rm loc} = O(100)$, this demonstrates that loop corrections can be neglected, and clearly the argument is valid for every scenario in which one Gaussian field only is responsible for the curvature perturbation [93].

  In general, the field non-Gaussianities lead to additional loop contributions, for instance to $f_{\rm NL}$. This was shown to be completely negligible for slow-roll models [94] but in DBI inflation where intrinsic non-Gaussianities are large, one has to determine if this remains true. In particular, there is a contribution to the primordial trispectrum B_ζ (3.13) from terms of the form

$$N_A N_{BC} N_{DE} \langle Q^A(\mathbf{k}_1)(Q^B \star Q^C)(\mathbf{k}_2)(Q^D \star Q^E)(\mathbf{k}_3)\rangle\,, \tag{B.7}$$

JCAP10(2009)012

where the symbol $\star$ denotes a convolution product. The most dangerous terms in (B.7) involve the entropic derivatives and, as to leading order there is no purely entropic three point function, one is led to consider

$$N_\sigma N_{ss}^2 \langle Q_\sigma(\mathbf{k}_1)(Q_s \star Q_s)(\mathbf{k}_2)(Q_s \star Q_s)(\mathbf{k}_3)\rangle \,. \tag{B.8}$$

From the definition of $f_{\rm NL}$ (3.15) as well as the result (3.4) for the three point functions of the fields, its contribution is of order

$$f_{\rm NL}^{1\ \rm loop} \supset \left(N_\sigma N_{ss}^2 H_*^2 \frac{H_*^4}{\sqrt{\epsilon_* c_{s*}} c_{s*}^2 M_{\rm pl}} \right) \Big/ \left(H_*^4 N_\sigma^4 \left(1 + T_{\sigma s}^2\right)^2 \right) . \tag{B.9}$$

For a large entropic transfer, one therefore obtains

$$f_{\rm NL}^{1\ \rm loop} \supset f_{\rm NL}^{\rm eq} (f_{\rm NL}^{\rm loc})^2 \mathcal{P}_\zeta \,, \tag{B.10}$$

where we have used (3.19) and (3.20). Again, the observational bounds $f_{\rm NL}^{\rm eq}, f_{\rm NL}^{\rm loc} = O(100)$ as well as the normalization $\mathcal{P}_\zeta \sim 10^{-10}$ show that such a loop-correction is negligible and one can verify that the same conclusion applies to other higher order corrections.

- *Small entropic transfer*

  When the entropic transfer is inefficient — $T_{\sigma s}^2 \ll 1$ — the power spectrum (3.9) as well as the equilateral non-Gaussianities (3.19) remain the same as in the single-field case, so that the multifield aspects we are taking into account can not cure the model if it is under pressure at these levels. As for the local non-Gaussianity parameter, from (3.20) one obtains

$$f_{\rm NL}^{\rm loc} = \frac{5}{6} T_{\sigma s}^2 \frac{N_{ss}}{N_\sigma^2} \,, \qquad T_{\sigma s}^2 \ll 1 \,. \tag{B.11}$$

  Its suppression by the small entropic transfer gives few hope to have a significant $f_{\rm NL}^{\rm loc}$, rendering the situation effectively indistinguishable from the single-field case for these observables, unless we have an extremely large ratio N_{ss}/N_σ^2. For instance, $T_{\sigma s}^2 \sim 10^{-2}$ and $N_{ss}/N_\sigma^2 \sim 10^3$ give $f_{\rm NL}^{\rm loc} \sim 10$. However, if N_{ss}/N_σ^2 is made this large, eqs. (B.2) and (B.3) give

$$f_{\rm NL}^{1\ \rm loop} = \frac{5}{6} \left(\frac{N_{ss}}{N_\sigma^2} \right)^3 \mathcal{P}_\zeta \sim 1 \,, \tag{B.12}$$

$$\tau_{\rm NL}^{1\ \rm loop} = \left(\frac{N_{ss}}{N_\sigma^2} \right)^4 \mathcal{P}_\zeta \sim 10^3 \,, \tag{B.13}$$

  and loop effects become important, which requires a more refined study.

References

[1] E. Komatsu et al., *Non-Gaussianity as a probe of the physics of the primordial universe and the astrophysics of the low redshift universe*, arXiv:0902.4759 [SPIRES].

[2] P. Creminelli and M. Zaldarriaga, *Single field consistency relation for the 3-point function*, *JCAP* **10** (2004) 006 [astro-ph/0407059] [SPIRES].

JCAP10(2009)012

[3] WMAP collaboration, E. Komatsu et al., *Five-year Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP) observations: cosmological interpretation*, *Astrophys. J. Suppl.* **180** (2009) 330 [arXiv:0803.0547] [SPIRES].

[4] D. Baumann, A. Dymarsky, I.R. Klebanov and L. McAllister, *Towards an explicit model of D-brane inflation*, *JCAP* **01** (2008) 024 [arXiv:0706.0360] [SPIRES].

[5] D. Baumann, A. Dymarsky, I.R. Klebanov, L. McAllister and P.J. Steinhardt, *A delicate universe*, *Phys. Rev. Lett.* **99** (2007) 141601 [arXiv:0705.3837] [SPIRES].

[6] E. Silverstein and D. Tong, *Scalar speed limits and cosmology: acceleration from D-cceleration*, *Phys. Rev.* **D 70** (2004) 103505 [hep-th/0310221] [SPIRES].

[7] M. Alishahiha, E. Silverstein and D. Tong, *DBI in the sky*, *Phys. Rev.* **D 70** (2004) 123505 [hep-th/0404084] [SPIRES].

[8] R. Bean, S.E. Shandera, S.H. Henry Tye and J. Xu, *Comparing brane inflation to WMAP*, *JCAP* **05** (2007) 004 [hep-th/0702107] [SPIRES].

[9] H.V. Peiris, D. Baumann, B. Friedman and A. Cooray, *Phenomenology of D-brane inflation with general speed of sound*, *Phys. Rev.* **D 76** (2007) 103517 [arXiv:0706.1240] [SPIRES].

[10] A. Kehagias and E. Kiritsis, *Mirage cosmology*, *JHEP* **11** (1999) 022 [hep-th/9910174] [SPIRES].

[11] D.A. Steer and M.F. Parry, *Brane cosmology, varying speed of light and inflation in models with one or more extra dimensions*, *Int. J. Theor. Phys.* **41** (2002) 2255 [hep-th/0201121] [SPIRES].

[12] P. Brax and D.A. Steer, *Remark on bouncing and cyclic branes in more than one extra dimension*, *Phys. Rev.* **D 66** (2002) 061501 [SPIRES].

[13] D. Easson, R. Gregory, G. Tasinato and I. Zavala, *Cycling in the throat*, *JHEP* **04** (2007) 026 [hep-th/0701252] [SPIRES].

[14] C. Gordon, D. Wands, B.A. Bassett and R. Maartens, *Adiabatic and entropy perturbations from inflation*, *Phys. Rev.* **D 63** (2001) 023506 [astro-ph/0009131] [SPIRES].

[15] D. Langlois, S. Renaux-Petel, D.A. Steer and T. Tanaka, *Primordial fluctuations and non-Gaussianities in multi-field DBI inflation*, *Phys. Rev. Lett.* **101** (2008) 061301 [arXiv:0804.3139] [SPIRES].

[16] D. Langlois, S. Renaux-Petel, D.A. Steer and T. Tanaka, *Primordial perturbations and non-Gaussianities in DBI and general multi-field inflation*, *Phys. Rev.* **D 78** (2008) 063523 [arXiv:0806.0336] [SPIRES].

[17] F. Arroja, S. Mizuno and K. Koyama, *Non-Gaussianity from the bispectrum in general multiple field inflation*, *JCAP* **08** (2008) 015 [arXiv:0806.0619] [SPIRES].

[18] D. Langlois, S. Renaux-Petel and D.A. Steer, *Multi-field DBI inflation: introducing bulk forms and revisiting the gravitational wave constraints*, *JCAP* **04** (2009) 021 [arXiv:0902.2941] [SPIRES].

[19] X. Gao and B. Hu, *Primordial trispectrum from entropy perturbations in multifield DBI model*, *JCAP* **08** (2009) 012 [arXiv:0903.1920] [SPIRES].

[20] X. Gao and F. Xu, *Loop corrections to cosmological perturbations in multi-field inflationary models: I. Entropy loops*, *JCAP* **07** (2009) 042 [arXiv:0905.0405] [SPIRES].

[21] S. Mizuno, F. Arroja, K. Koyama and T. Tanaka, *Lorentz boost and non-Gaussianity in multi-field DBI-inflation*, *Phys. Rev.* **D 80** (2009) 023530 [arXiv:0905.4557] [SPIRES].

[22] X. Gao, M. Li and C. Lin, *Primordial non-Gaussianities from the trispectra in multiple field inflationary models*, arXiv:0906.1345 [SPIRES].

JCAP10(2009)012

[23] D.H. Lyth and A. Riotto, *Generating the curvature perturbation at the end of inflation in string theory*, *Phys. Rev. Lett.* **97** (2006) 121301 [astro-ph/0607326] [SPIRES].

[24] A. Sen, *Tachyon matter*, *JHEP* **07** (2002) 065 [hep-th/0203265] [SPIRES].

[25] H.-Y. Chen, J.-O. Gong and G. Shiu, *Systematics of multi-field effects at the end of warped brane inflation*, *JHEP* **09** (2008) 011 [arXiv:0807.1927] [SPIRES].

[26] L. Leblond and S. Shandera, *Cosmology of the tachyon in brane inflation*, *JCAP* **01** (2007) 009 [hep-th/0610321] [SPIRES].

[27] D. Baumann and L. McAllister, *A microscopic limit on gravitational waves from D-brane inflation*, *Phys. Rev.* **D 75** (2007) 123508 [hep-th/0610285] [SPIRES].

[28] J.E. Lidsey and I. Huston, *Gravitational wave constraints on Dirac-Born-Infeld inflation*, *JCAP* **07** (2007) 002 [arXiv:0705.0240] [SPIRES].

[29] S.B. Giddings, S. Kachru and J. Polchinski, *Hierarchies from fluxes in string compactifications*, *Phys. Rev.* **D 66** (2002) 106006 [hep-th/0105097] [SPIRES].

[30] I.R. Klebanov and M.J. Strassler, *Supergravity and a confining gauge theory: duality cascades and χSB-resolution of naked singularities*, *JHEP* **08** (2000) 052 [hep-th/0007191] [SPIRES].

[31] D. Baumann and L. McAllister, *Advances in inflation in string theory*, arXiv:0901.0265 [SPIRES].

[32] D. Langlois and S. Renaux-Petel, *Perturbations in generalized multi-field inflation*, *JCAP* **04** (2008) 017 [arXiv:0801.1085] [SPIRES].

[33] V.F. Mukhanov, H.A. Feldman and R.H. Brandenberger, *Theory of cosmological perturbations*, *Phys. Rept.* **215** (1992) 203.

[34] D. Langlois, *Inflation, quantum fluctuations and cosmological perturbations*, hep-th/0405053 [SPIRES].

[35] O. DeWolfe, S. Kachru and H.L. Verlinde, *The giant inflaton*, *JHEP* **05** (2004) 017 [hep-th/0403123] [SPIRES].

[36] O. DeWolfe, L. McAllister, G. Shiu and B. Underwood, *D3-brane vacua in stabilized compactifications*, *JHEP* **09** (2007) 121 [hep-th/0703088] [SPIRES].

[37] E. Pajer, *Inflation at the tip*, *JCAP* **04** (2008) 031 [arXiv:0802.2916] [SPIRES].

[38] F. Bernardeau and J.P. Uzan, *Non-Gaussianity in multi-field inflation*, *Phys. Rev.* **D 66** (2002) 103506 [hep-ph/0207295] [SPIRES].

[39] M. Sasaki, *Multi-brid inflation and non-Gaussianity*, *Prog. Theor. Phys.* **120** (2008) 159 [arXiv:0805.0974] [SPIRES].

[40] A. Naruko and M. Sasaki, *Large non-Gaussianity from multi-brid inflation*, *Prog. Theor. Phys.* **121** (2009) 193 [arXiv:0807.0180] [SPIRES].

[41] C.T. Byrnes, K.-Y. Choi and L.M.H. Hall, *Large non-Gaussianity from two-component hybrid inflation*, *JCAP* **02** (2009) 017 [arXiv:0812.0807] [SPIRES].

[42] Q.-G. Huang, *The trispectrum in the multi-brid inflation*, *JCAP* **05** (2009) 005 [arXiv:0903.1542] [SPIRES].

[43] A.A. Starobinsky, *Multicomponent de Sitter (inflationary) stages and the generation of perturbations*, *JETP Lett.* **42** (1985) 152 [*Pisma Zh. Eksp. Teor. Fiz.* **42** (1985) 124] [SPIRES].

[44] M. Sasaki and E.D. Stewart, *A general analytic formula for the spectral index of the density perturbations produced during inflation*, *Prog. Theor. Phys.* **95** (1996) 71 [astro-ph/9507001] [SPIRES].

[45] M. Sasaki and T. Tanaka, *Super-horizon scale dynamics of multi-scalar inflation*, *Prog. Theor. Phys.* **99** (1998) 763 [gr-qc/9801017] [SPIRES].

JCAP10(2009)012

[46] D.H. Lyth, K.A. Malik and M. Sasaki, *A general proof of the conservation of the curvature perturbation*, *JCAP* **05** (2005) 004 [astro-ph/0411220] [SPIRES].

[47] D.H. Lyth and Y. Rodriguez, *The inflationary prediction for primordial non-Gaussianity*, *Phys. Rev. Lett.* **95** (2005) 121302 [astro-ph/0504045] [SPIRES].

[48] D. Wands, K.A. Malik, D.H. Lyth and A.R. Liddle, *A new approach to the evolution of cosmological perturbations on large scales*, *Phys. Rev.* **D 62** (2000) 043527 [astro-ph/0003278] [SPIRES].

[49] D.H. Lyth, *Generating the curvature perturbation at the end of inflation*, *JCAP* **11** (2005) 006 [astro-ph/0510443] [SPIRES].

[50] N. Barnaby and J.M. Cline, *Non-Gaussianity from tachyonic preheating in hybrid inflation*, *Phys. Rev.* **D 75** (2007) 086004 [astro-ph/0611750] [SPIRES].

[51] K. Enqvist, A. Jokinen, A. Mazumdar, T. Multamaki and A. Vaihkonen, *Cosmological constraints on string scale and coupling arising from tachyonic instability*, *JHEP* **08** (2005) 084 [hep-th/0502185] [SPIRES].

[52] C.T. Byrnes, M. Sasaki and D. Wands, *The primordial trispectrum from inflation*, *Phys. Rev.* **D 74** (2006) 123519 [astro-ph/0611075] [SPIRES].

[53] J.M. Maldacena, *Non-Gaussian features of primordial fluctuations in single field inflationary models*, *JHEP* **05** (2003) 013 [astro-ph/0210603] [SPIRES].

[54] D. Seery and J.E. Lidsey, *Primordial non-Gaussianities from multiple-field inflation*, *JCAP* **09** (2005) 011 [astro-ph/0506056] [SPIRES].

[55] X. Chen, M.-X. Huang, S. Kachru and G. Shiu, *Observational signatures and non-Gaussianities of general single field inflation*, *JCAP* **01** (2007) 002 [hep-th/0605045] [SPIRES].

[56] X. Chen, *Running non-Gaussianities in DBI inflation*, *Phys. Rev.* **D 72** (2005) 123518 [astro-ph/0507053] [SPIRES].

[57] D. Wands, N. Bartolo, S. Matarrese and A. Riotto, *An observational test of two-field inflation*, *Phys. Rev.* **D 66** (2002) 043520 [astro-ph/0205253] [SPIRES].

[58] S. Kecskemeti, J. Maiden, G. Shiu and B. Underwood, *DBI inflation in the tip region of a warped throat*, *JHEP* **09** (2006) 076 [hep-th/0605189] [SPIRES].

[59] L.E. Allen, S. Gupta and D. Wands, *Non-Gaussian perturbations from multi-field inflation*, *JCAP* **01** (2006) 006 [astro-ph/0509719] [SPIRES].

[60] Q.-G. Huang, *A geometric description of the non-Gaussianity generated at the end of multi-field inflation*, *JCAP* **06** (2009) 035 [arXiv:0904.2649] [SPIRES].

[61] F. Bernardeau and J.-P. Uzan, *Inflationary models inducing non-Gaussian metric fluctuations*, *Phys. Rev.* **D 67** (2003) 121301 [astro-ph/0209330] [SPIRES].

[62] G. Dvali, A. Gruzinov and M. Zaldarriaga, *A new mechanism for generating density perturbations from inflation*, *Phys. Rev.* **D 69** (2004) 023505 [astro-ph/0303591] [SPIRES].

[63] L. Kofman, *Probing string theory with modulated cosmological fluctuations*, astro-ph/0303614 [SPIRES].

[64] M. Zaldarriaga, *Non-Gaussianities in models with a varying inflaton decay rate*, *Phys. Rev.* **D 69** (2004) 043508 [astro-ph/0306006] [SPIRES].

[65] F. Bernardeau, L. Kofman and J.-P. Uzan, *Modulated fluctuations from hybrid inflation*, *Phys. Rev.* **D 70** (2004) 083004 [astro-ph/0403315] [SPIRES].

[66] M.P. Salem, *On the generation of density perturbations at the end of inflation*, *Phys. Rev.* **D 72** (2005) 123516 [astro-ph/0511146] [SPIRES].

JCAP10(2009)012

[67] L. Alabidi and D. Lyth, *Curvature perturbation from symmetry breaking the end of inflation*, *JCAP* **08** (2006) 006 [astro-ph/0604569] [SPIRES].

[68] F. Bernardeau and T. Brunier, *Non-Gaussianities in extended D-term inflation*, *Phys. Rev.* **D 76** (2007) 043526 [arXiv:0705.2501] [SPIRES].

[69] B. Dutta, L. Leblond and J. Kumar, *Tachyon mediated non-Gaussianity*, *Phys. Rev.* **D 78** (2008) 083522 [arXiv:0805.1229] [SPIRES].

[70] D. Babich, P. Creminelli and M. Zaldarriaga, *The shape of non-Gaussianities*, *JCAP* **08** (2004) 009 [astro-ph/0405356] [SPIRES].

[71] M. LoVerde, A. Miller, S. Shandera and L. Verde, *Effects of scale-dependent non-Gaussianity on cosmological structures*, *JCAP* **04** (2008) 014 [arXiv:0711.4126] [SPIRES].

[72] E. Sefusatti, M. Liguori, A.P.S. Yadav, M.G. Jackson and E. Pajer, *Constraining running non-Gaussianity*, arXiv:0906.0232 [SPIRES].

[73] S. Bird, H.V. Peiris and D. Baumann, *Brane inflation and the overshoot problem*, *Phys. Rev.* **D 80** (2009) 023534 [arXiv:0905.2412] [SPIRES].

[74] A.R. Frey, A. Mazumdar and R.C. Myers, *Stringy effects during inflation and reheating*, *Phys. Rev.* **D 73** (2006) 026003 [hep-th/0508139] [SPIRES].

[75] N. Kogo and E. Komatsu, *Angular trispectrum of CMB temperature anisotropy from primordial non-Gaussianity with the full radiation transfer function*, *Phys. Rev.* **D 73** (2006) 083007 [astro-ph/0602099] [SPIRES].

[76] A. Cooray, C. Li and A. Melchiorri, *The trispectrum of* 21 *cm background anisotropies as a probe of primordial non-Gaussianity*, *Phys. Rev.* **D 77** (2008) 103506 [arXiv:0801.3463] [SPIRES].

[77] D. Jeong and E. Komatsu, *Primordial non-Gaussianity, scale-dependent bias and the bispectrum of galaxies*, *Astrophys. J.* **703** (2009) 1230 [arXiv:0904.0497] [SPIRES].

[78] X. Chen, B. Hu, M.-X. Huang, G. Shiu and Y. Wang, *Large primordial trispectra in general single field inflation*, *JCAP* **08** (2009) 008 [arXiv:0905.3494] [SPIRES].

[79] T. Okamoto and W. Hu, *The angular trispectra of CMB temperature and polarization*, *Phys. Rev.* **D 66** (2002) 063008 [astro-ph/0206155] [SPIRES].

[80] M. Sasaki, J. Valiviita and D. Wands, *Non-Gaussianity of the primordial perturbation in the curvaton model*, *Phys. Rev.* **D 74** (2006) 103003 [astro-ph/0607627] [SPIRES].

[81] J.-L. Lehners and S. Renaux-Petel, *Multifield cosmological perturbations at third order and the ekpyrotic trispectrum*, *Phys. Rev.* **D 80** (2009) 063503 [arXiv:0906.0530] [SPIRES].

[82] C.T. Byrnes and G. Tasinato, *Non-Gaussianity beyond slow roll in multi-field inflation*, *JCAP* **08** (2009) 016 [arXiv:0906.0767] [SPIRES].

[83] D. Seery, M.S. Sloth and F. Vernizzi, *Inflationary trispectrum from graviton exchange*, *JCAP* **03** (2009) 018 [arXiv:0811.3934] [SPIRES].

[84] F. Arroja, S. Mizuno, K. Koyama and T. Tanaka, *On the full trispectrum in single field DBI-inflation*, *Phys. Rev.* **D 80** (2009) 043527 [arXiv:0905.3641] [SPIRES].

[85] X. Chen, M.-X. Huang and G. Shiu, *The inflationary trispectrum for models with large non-Gaussianities*, *Phys. Rev.* **D 74** (2006) 121301 [hep-th/0610235] [SPIRES].

[86] S. Mizuno, F. Arroja and K. Koyama, *On the full trispectrum in multi-field DBI inflation*, arXiv:0907.2439 [SPIRES].

[87] C. Cheung, P. Creminelli, A.L. Fitzpatrick, J. Kaplan and L. Senatore, *The effective field theory of inflation*, *JHEP* **03** (2008) 014 [arXiv:0709.0293] [SPIRES].

JCAP10(2009)012

[88] L. Leblond and S. Shandera, *Simple bounds from the perturbative regime of inflation*, *JCAP* **08** (2008) 007 [arXiv:0802.2290] [SPIRES].

[89] C.T. Byrnes, K. Koyama, M. Sasaki and D. Wands, *Diagrammatic approach to non-Gaussianity from inflation*, *JCAP* **11** (2007) 027 [arXiv:0705.4096] [SPIRES].

[90] L. Boubekeur and D.H. Lyth, *Detecting a small perturbation through its non-Gaussianity*, *Phys. Rev.* **D 73** (2006) 021301 [astro-ph/0504046] [SPIRES].

[91] H.R.S. Cogollo, Y. Rodriguez and C.A. Valenzuela-Toledo, *On the issue of the ζ series convergence and loop corrections in the generation of observable primordial non-Gaussianity in slow-roll inflation. Part I: the bispectrum*, *JCAP* **08** (2008) 029 [arXiv:0806.1546] [SPIRES].

[92] Y. Rodriguez and C.A. Valenzuela-Toledo, *On the issue of the ζ series convergence and loop corrections in the generation of observable primordial non-Gaussianity in slow-roll inflation. Part II: the trispectrum*, arXiv:0811.4092 [SPIRES].

[93] D.H. Lyth, *The curvature perturbation in a box*, *JCAP* **12** (2007) 016 [arXiv:0707.0361] [SPIRES].

[94] I. Zaballa, Y. Rodriguez and D.H. Lyth, *Higher order contributions to the primordial non-Gaussianity*, *JCAP* **06** (2006) 013 [astro-ph/0603534] [SPIRES].

[95] X. Chen, *Multi-throat brane inflation*, *Phys. Rev.* **D 71** (2005) 063506 [hep-th/0408084] [SPIRES].

[96] X. Chen, *Inflation from warped space*, *JHEP* **08** (2005) 045 [hep-th/0501184] [SPIRES].

[97] R. Bean, X. Chen, H. Peiris and J. Xu, *Comparing infrared Dirac-Born-Infeld brane inflation to observations*, *Phys. Rev.* **D 77** (2008) 023527 [arXiv:0710.1812] [SPIRES].

[98] X. Chen, S. Sarangi, S.H. Henry Tye and J. Xu, *Is brane inflation eternal?*, *JCAP* **11** (2006) 015 [hep-th/0608082] [SPIRES].

[99] J. Khoury and F. Piazza, *Rapidly-varying speed of sound, scale invariance and non-Gaussian signatures*, *JCAP* **07** (2009) 026 [arXiv:0811.3633] [SPIRES].

[100] S. Renaux-Petel and G. Tasinato, *Nonlinear perturbations of cosmological scalar fields with non-standard kinetic terms*, *JCAP* **01** (2009) 012 [arXiv:0810.2405] [SPIRES].

[101] D. Langlois and F. Vernizzi, *Nonlinear perturbations of cosmological scalar fields*, *JCAP* **02** (2007) 017 [astro-ph/0610064] [SPIRES].

[102] Y.-F. Cai and W. Xue, *N-flation from multiple DBI type actions*, *Phys. Lett.* **B 680** (2009) 395 [arXiv:0809.4134] [SPIRES].

[103] Y.-F. Cai and H.-Y. Xia, *Inflation with multiple sound speeds: a model of multiple DBI type actions and non-Gaussianities*, *Phys. Lett.* **B 677** (2009) 226 [arXiv:0904.0062] [SPIRES].

[104] L. Senatore, K.M. Smith and M. Zaldarriaga, *Non-Gaussianities in single field inflation and their optimal limits from the WMAP 5-year data*, arXiv:0905.3746 [SPIRES].

JCAP10(2009)012

8.4 Autres travaux

Comme mentionné à la sous-section 8.1.1, l'étude des propriétés de l'inflation multichamp avec des termes cinétiques non canoniques, avec comme prototype l'inflation DBI multichamp, que nous avons initié dans les références [235, 237, 238], a suscité l'intérêt d'autres chercheurs. Suite à la publication de l'article court [237] indiquant que l'inflation DBI multichamp devait être décrit par un Lagrangien du type $P(X^{IJ}, \phi^K)$ (8.1), Arroya *et al.* publièrent presque en même temps que notre article long [237] le calcul des actions quadratique et cubique dans ce type de modèle [21]. Gao *et al.* étudièrent également les corrections à boucles (dans le langage de la théorie quantique des champs) au spectre de puissance de l'inflation DBI multichamp [157] ainsi que la corrélation à la traversée de l'horizon entre les perturbations adiabatique et isocourbes [154], négligée dans notre approche. Mizuno *et al.* montrèrent dans la référence [309] comment les termes dominants dans l'action DBI multichamp cubique dans les perturbations peuvent être obtenus en effectuant une transformation de Lorentz entre le référentiel au repos de la brane et celui où elle est mobile. Ils ont calculé avec la même méthode les termes dominants de l'action quartique et en on déduit une composante du trispectre quantique (correspondant au terme de contact (5.76)) puis le trispectre quantique complet dans la référence [308], avec la conclusion intéressante que celui-ci a une dépendance géométrique en général différente du cas à un champ [99, 22]. Parallèlement, Gao *et al.* étendirent ce calcul à une grande classe de modèles d'inflation multichamp avec des termes cinétiques non standard [155, 156].

Cinquième partie

À la recherche des non-gaussianités primordiales

Chapitre 9

À la recherche des non-gaussianités primordiales

Sommaire

9.1 Comment sonder les non-gaussianités primordiales ? 339
9.1.1 Le fond diffus cosmologique 340
9.1.2 Les grandes structures de l'univers 341
9.2 Le bispectre du fond diffus cosmologique : formalisme et détection 342
9.2.1 Un échauffement : du spectre primordial au spectre angulaire . . 343
9.2.2 Du bispectre primordial au bispectre angulaire 344
9.2.3 Estimateurs des $f_{NL}^{(i)}$ 345
9.2.4 Mise en pratique et séparabilité 348
9.3 Contraintes actuelles et perspectives 350

Après avoir étudié, dans les parties III et IV de ce mémoire, les propriétés non-gaussiennes des fluctuations cosmologiques primordiales, nous considérons dans ce chapitre les principaux moyens observationnels employés pour les contraindre.

9.1 Comment sonder les non-gaussianités primordiales ?

D'après le scénario cosmologique standard, les grandes structures de l'univers résultent de l'effondrement gravitationnel des fluctuations de densité observées dans les anisotropies du fond diffus cosmologique et présentes à l'époque de la nucléosynthèse. Les propriétés non-gaussiennes de ces perturbations primordiales laissent donc à priori leurs empreintes sur ces deux types d'objets, qui constituent les observables privilégiées de la cosmologie. La différence cruciale entre les deux, cependant, est que les anisotropies sont d'amplitude très faibles à l'époque du découplage tandis que la distribution de la matière à bas redshift est caractérisée par des petites régions de très grande densité séparées par de grands vides. Les grandes structures de l'univers constituent donc une sonde des non-gaussianités primordiales beaucoup moins directe que les anisotropies du CMB car, contrairement à ces

dernières, elles ne peuvent être étudiées dans le régime linéaire. Autrement dit, même des perturbations primordiales gaussiennes deviennent hautement non-gaussiennes à bas redshift. Les deux approches sont cependant intéressantes car complémentaires et sondant des échelles différentes.

Dans la suite de cette section, nous indiquons les méthodes principales utilisées pour étudier l'effet des non-gaussianités primordiales sur les anisotropies du CMB et les grandes structures avant de détailler à la section suivante celle la mieux comprise et la plus précise à l'heure actuelle : l'étude du bispectre angulaire des fluctuations de température du fond diffus cosmologique. Plus de détails sur tous ces aspects peuvent être trouvés dans les revues [220, 121], traitant respectivement des grandes structures et du CMB, ainsi que dans la référence [267], traitant des deux sujets mais se concentrant sur les mesures du bispectre des fluctuations de température du CMB et de la distribution de la matière et des galaxies aux grandes échelles.

9.1.1 Le fond diffus cosmologique

Nous nous concentrons dans la suite sur les anisotropies de température du CMB mais le cas du mode E de la polarisation, également généré par les fluctuations primordiales scalaires, est similaire.

L'approche historique pour tester la (non)-gaussianité des anisotropies du CMB est de pratiquer des tests "aveugles", consistant par exemple à mesurer la fonction de distribution à un point des fluctuations, pour conclure à l'(in)cohérence des données avec la gaussianité à tel ou tel niveau de confiance (voir par exemple les références [352, 425]). L'avantage de ces tests aveugles est qu'ils sont indépendants des différents modèles de non-gaussianités primordiales et qu'ils offrent la possibilité de repérer des effets systématiques ou inattendus. Leur désavantage est qu'il est difficile d'interpréter les résultats obtenus, comme par exemple de déterminer quels modèles physiques sont exclus par de telles considérations. Un exemple typique de test aveugle est constitué par les fonctionnelles de Minkowski [163, 304, 358, 359, 423], caractérisant les propriétés morphologiques d'un champ de fluctuations, dont les formes analytiques dans le cas du CMB ont été déterminées [185, 298] et appliquées au données de WMAP [183, 186].

L'approche plus récente consiste à tester des modèles spécifiques et motivés en contraignant leurs paramètres, comme $f_{NL}^{\rm loc}$ et $f_{NL}^{\rm eq}$ pour les non-gaussianités locales et équilatérales respectivement. L'avantage est que les contraintes obtenues sont alors d'ordre quantitative tandis que le désavantage est qu'on peut avec cette méthode passer à côté d'un signal non-gaussien présent mais différent de celui recherché. L'étude du bispectre angulaire du CMB se prête à des analyses de cet type (*c.f.* la section 9.2).

Les deux types d'approche sont évidemment complémentaires. Divers effets contaminent en effet le signal primordial non-gaussien : émissions diffuses d'avant-plans comme le rayonnement synchrotron, sources extragalactiques ponctuelles, anisotropies secondaires, bruit expérimental... Si ces contaminants ne sont pas, ou mal, connus, les estimateurs construits pour contraindre les non-gaussianités primordiales peuvent se trouver biaisés et l'on peut ainsi attribuer à la détection d'un signal non-gaussien une origine faussement primordiale. Comme différents tests statistiques réagissent à priori différemment aux divers contaminants, il est utile de multiplier les méthodes de détection. En plus de l'étude "standard" du bispectre angulaire présentée à la section 9.2, et basée sur la décomposition

des anisotropies de température dans la base des harmoniques sphériques, mentionnons en particulier la possibilité d'utiliser une décomposition en ondelettes sphériques en chapeau mexicain [1] (voir [296, 295] pour des revues). Les contraintes apportées par cette méthode sur le paramètre $f_{NL}^{\rm loc}$ [115, 116] sont similaires à celles de l'approche standard [222] et permettent en plus de retenir l'information sur la distribution spatiale du signal. D'autres types d'ondelettes sphériques présentant le même avantage, appelées *needlets* [292], ont également été étudiés [86, 349, 332, 333, 350]. On peut trouver une liste non-exhaustive d'autres méthodes statistiques utilisées pour contraindre les non-gaussianités primordiales, en particulier locales, avec le CMB, dans la référence [220].

9.1.2 Les grandes structures de l'univers

Une subtilité importante dans l'étude des grandes structures réside dans le fait que les traceurs lumineux comme les galaxies (mais également la forêt Lyman α ou la ligne à 21cm de l'hydrogène) fournissent une image distordue du champ de densité de la matière. Dans le modèle cosmologique standard en effet, les galaxies se forment à l'intérieur des régions surdenses [421] et ceci introduit un biais entre les distributions de la matière et des galaxies [198]. Introduisant les surdensités correspondantes

$$\delta_m(\mathbf{x}) = \frac{\rho_m(\mathbf{x}) - \bar{\rho}_m}{\bar{\rho}_m}\,, \qquad \delta_g(\mathbf{x}) = \frac{\rho_g(\mathbf{x}) - \bar{\rho}_g}{\bar{\rho}_g}\,, \tag{9.1}$$

où l'indice m (respectivement g) fait référence à la matière (respectivement aux galaxies), l'hypothèse communément employée jusqu'à peu est que ce biais est local, *i.e.* que la surdensité de galaxies est une fonction locale de la surdensité de matière

$$\delta_g(\mathbf{x}) = f\left[\delta_m(\mathbf{x})\right]\,. \tag{9.2}$$

Dans le régime où les fluctuations sont petites, un développement de Taylor de l'équation (9.2) donne alors une relation du type

$$\delta_g(\mathbf{x}) = b_1\delta_m(\mathbf{x}) + \frac{b_2}{2}\left(\delta_m^2(\mathbf{x}) - \langle\delta_m^2(\mathbf{x})\rangle\right) + \ldots\,, \tag{9.3}$$

décrivant la relation entre les deux types de contrastes en fonction de paramètres de biais *constants* b_1, b_2... Le spectre et le bispectre de la surdensité de galaxies s'écrivent alors, à l'ordre dominant :

$$P_g(k) = b_1^2 P_m(k)\,, \tag{9.4}$$

$$B_g(k_1,k_2,k_3) = b_1^3 B_m(k_1,k_2,k_3) + b_1^2 b_2\left[P_m(k_1)P_m(k_2) + 2\,\text{perms.}\right] \tag{9.5}$$

avec des notations évidentes. Comme expliqué dans l'introduction de cette section, les non-gaussianités primordiales ne fournissent qu'une composante supplémentaire au bispectre de la matière B_m, dominé par la contribution des effets non-linéaires de l'effondrement gravitationnel [150, 361] (voir la référence [58] pour une revue traitant de la théorie des perturbations cosmologiques dans ce cadre). Malgré cette situation complexe, dans laquelle le bispectre des galaxies, la quantité directement mesurable à partir des relevés photométriques, reçoit une contribution due à la non-linéarité du biais, une due aux non-linéarités

1. *Spherical Mexican Hat Wavelets* en anglais.

de l'effondrement gravitationnel, et une autre due aux non-gaussianités primordiales, Sefussati et Komatsu montrèrent dans la référence [368] que les futurs relevés de galaxies prévus à un décalage vers le rouge $z \equiv \frac{a_0}{a} - 1$ inférieur à 2 seront capables d'apporter des contraintes sur les paramètres $f_{NL}^{\rm loc}$ et $f_{NL}^{\rm eq}$ comparables aux meilleures observations du CMB.

La situation qu'on vient de décrire correspond à l'état de l'art au début de cette thèse. Depuis, la situation a considérablement évolué du fait de la découverte par Dalal et al. [117] qu'on ne peut pas considérer de manière indépendant le biais d'un côté et les non-gaussianités primordiales de l'autre. Plus précisément, il a été observé sur des simulations à N corps que les non-gaussianités primordiales locales induisent un biais dépendant d'échelle dans le *spectre* de puissance des galaxies, *i.e.* que la relation (9.4) doit être remplacée par

$$P_g(k) = b_1^2 P_m(k) \to P_g(k) = \left[b_1 + \Delta b_1(k)\right]^2 P_m(k) \tag{9.6}$$

où $\Delta b_1(k)$, proportionnel à $f_{NL}^{\rm loc}$, est une fonction croissante du redshift et de l'échelle $\propto 1/k$. Confirmé par d'autres groupes avec d'autres méthodes (voir les revues [267, 121] pour plus de détails), il convient de noter que plusieurs interprétations théoriques différentes ont été avancées pour expliquer cet effet, sans consensus pour l'instant. Malgré tout, sa prise en compte a déjà fourni la contrainte [380]

$$-29 < f_{NL}^{\rm loc} < 70\,, \tag{9.7}$$

comparable à celle de WMAP $-10 < f_{NL}^{\rm loc} < 74$ [222]. Il a même été montré qu'il sera possible, avec les futurs relevés de galaxies, et si tous les effets systématiques sont compris, d'atteindre la précision $\Delta f_{NL}^{\rm loc} \sim 1$ [89, 6, 303, 302] ! Mieux, de la même manière que le spectre des galaxies est affecté par le bispectre primordial local, il a été montré que le bispectre des galaxies l'est particulièrement par le trispectre primordial local [2] [192], au point qu'il est réaliste de contraindre dans un avenir proche les paramètres $f_{NL}^{\rm loc}$, τ_{NL} et g_{NL} de manière complémentaire grâce aux observations du CMB et aux relevés de galaxies.

Une variété d'autres méthodes et d'autres observables ont été proposées pour sonder les non-gaussianités primordiales avec les grandes structures de l'univers et notre but ici n'était pas d'être exhaustif (on renvoie pour cela le lecteur aux revues [267, 121]). Notons simplement que l'étude des fonctionnelles de Minkowski peut également être appliquée à la distribution des galaxies [185, 184]. Enfin, les amas de galaxies se formant dans les régions de grande concentration de matière noire, leur densité est particulièrement sensible à la queue de distribution de celle-ci, et donc aux non-gaussianités primordiales, de même que l'abondance des vides pour la même raison.

9.2 Le bispectre du fond diffus cosmologique : formalisme et détection

Dans cette section, nous nous concentrons par simplicité, et en accord avec les observations, sur des perturbations primordiales de type adiabatique. Aux sous-section 9.2.1 et 9.2.2, nous faisons le lien entre les propriétés des fluctuations primordiales et celles

2. Ceci est d'autant plus intéressant que les effets du bispectre primordial local et du trispectre primordial local sur le spectre de puissance des galaxies sont dégénérés[120].

des fluctuations de température du fond diffus cosmologique en négligeant les anisotropies secondaires, *i.e.* en évoluant les perturbations primordiales – non-gaussiennes – selon la théorie linéaire gaussienne. Nous expliquons ensuite aux sous-section 9.2.3 et 9.2.4 la construction et la mise en pratique d'estimateurs optimaux des paramètres $f_{NL}^{(i)}$ associées aux différents profils de non-gaussianités.

9.2.1 Un échauffement : du spectre primordial au spectre angulaire

Les fluctuations de température du CMB sont communément décomposées dans la base des harmoniques sphériques (l'équivalent sur la sphère de la décomposition en modes de Fourier) selon

$$\frac{\Delta T}{T}(\hat{\mathbf{n}}) = \sum_{lm} a_{lm} Y_{lm}(\hat{\mathbf{n}}) \tag{9.8}$$

où $l \geq 2$ et $-l \leq m \leq l$ (nous utilisons pour tout vecteur spatial $\mathbf{X}$ la notation $\hat{\mathbf{X}} = \mathbf{X}/X$ où $X = |\mathbf{X}|$). Résolvant les équations de Boltzmann linéaires [371, 260], les a_{lm} peuvent être exprimés comme la "convolution" entre la perturbation de courbure primordiale ζ et une fonction de transfert linéaire $\Delta_l(k)$ selon [127]

$$a_{lm} = 4\pi(-i)^l \int \frac{\mathrm{d}^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3}\, \Delta_l(k)\, \zeta_{\mathbf{k}}\, Y^*_{lm}(\hat{\mathbf{k}})\,. \tag{9.9}$$

Utilisant la relation (9.9), le spectre angulaire – la fonction de corrélation à deux points des a_{lm} par définition – est donné par

$$\begin{aligned}\langle a_{l_1m_1} a_{l_2m_2}\rangle &= (4\pi)^2(-i)^{l_1+l_2} \int \frac{\mathrm{d}^3\mathbf{k}_1}{(2\pi)^3}\frac{\mathrm{d}^3\mathbf{k}_2}{(2\pi)^3}\Delta_{l_1}(k_1)\Delta_{l_2}(k_2) \times \\ &\quad (2\pi)^3 P_\zeta(k_1)\, \delta(\mathbf{k}_1+\mathbf{k}_2) Y^*_{l_1m_1}(\hat{\mathbf{k}}_1) Y^*_{l_2m_2}(\hat{\mathbf{k}}_2)\end{aligned} \tag{9.10}$$

où on a utilisé la définition du spectre de puissance $\langle \zeta_{\mathbf{k}_1}\, \zeta_{\mathbf{k}_2}\rangle = (2\pi)^3 P_\zeta(k_1)\delta(\mathbf{k}_1+\mathbf{k}_2)$. Utilisant ensuite la forme intégrale de la distribution de Dirac

$$\delta(\mathbf{k}) = \frac{1}{(2\pi)^3}\int e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}\, \mathrm{d}^3\mathbf{x}\,, \tag{9.11}$$

le développement de Rayleigh

$$e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} = 4\pi \sum_l i^l j_l(kx) \sum_m Y_{lm}(\hat{\mathbf{k}}) Y^*_{lm}(\hat{\mathbf{x}}) \tag{9.12}$$

(où les j_l sont les fonctions de Bessel sphériques) et l'orthonormalité des harmoniques sphériques

$$\int d\Omega_x\, Y_{l_1m_1}(\hat{\mathbf{x}}) Y_{l_2m_2}(\hat{\mathbf{x}}) = \delta_{l_1l_2}\delta_{m_1-m_2}(-1)^{m_1}\,, \tag{9.13}$$

nous obtenons

$$\begin{aligned}\langle a_{l_1m_1} a_{l_2m_2}\rangle &= \left(\frac{2}{\pi}\right)^2 \int \mathrm{d}k_1\mathrm{d}k_2 (k_1k_2)^2 \Delta_{l_1}(k_1)\Delta_{l_2}(k_2) P_\zeta(k_1) \times \\ &\quad \int \mathrm{d}x x^2 j_{l_1}(k_1x) j_{l_2}(k_2x) \delta_{l_1l_2}\delta_{m_1-m_2}(-1)^{m_1}\,.\end{aligned} \tag{9.14}$$

Avec l'identité

$$\int_0^\infty \mathrm{d}x x^2 j_{l_1}(k_1 x) j_{l_2}(k_2 x) = \frac{\pi}{2k_1^2}\delta(k_1 - k_2)\,, \tag{9.15}$$

l'expression (9.14) se simplifie enfin en

$$\langle a_{l_1 m_1} a_{l_2 m_2}\rangle = C_{l_1}\delta_{l_1 l_2}\delta_{m_1 - m_2}(-1)^{m_1} \tag{9.16}$$

avec

$$C_l = \frac{2}{\pi}\int \mathrm{d}k k^2 \Delta_l^2(k) P_\zeta(k)\,. \tag{9.17}$$

On peut montrer que la forme (9.16) du spectre de puissance angulaire est en fait dictée par l'invariance statistique par rotation (voir par exemple la référence [219]), le calcul mené ci-dessus permettant d'exprimer les C_l en fonction du spectre primordial dans le cas considéré. Notons enfin que les C_l peuvent être interprétés comme une certaine moyenne azimutale, *i.e.* sur m, du spectre de puissance :

$$C_l = \frac{1}{2l+1}\sum_{m=-l}^{l}\langle a_{lm}^* a_{lm}\rangle \tag{9.18}$$

9.2.2 Du bispectre primordial au bispectre angulaire

Suivons maintenant la même démarche qu'à la sous-section précédente pour relier le bispectre primordial au bispectre angulaire des anisotropies de température (le cas des anisotropies de la polarisation peut être traité de la même manière [25, 428]). Utilisant la relation (9.9), la fonction de corrélation à trois points des a_{lm} est donnée par

$$\begin{aligned} B_{m_1 m_2 m_3}^{l_1 l_2 l_3} &\equiv \langle a_{l_1 m_1} a_{l_2 m_2} a_{l_3 m_3}\rangle \\ &= (4\pi)^3(-i)^{l_1+l_2+l_3}\int \frac{\mathrm{d}^3\mathbf{k}_1}{(2\pi)^3}\frac{\mathrm{d}^3\mathbf{k}_2}{(2\pi)^3}\frac{\mathrm{d}^3\mathbf{k}_3}{(2\pi)^3}\Delta_{l_1}(k_1)\Delta_{l_2}(k_2)\Delta_{l_3}(k_3)\times \\ &\quad (2\pi)^3 B_\zeta(k_1,k_2,k_3)\,\delta(\mathbf{k}_1+\mathbf{k}_2+\mathbf{k}_3) Y_{l_1 m_1}^*(\hat{\mathbf{k}}_1) Y_{l_2 m_2}^*(\hat{\mathbf{k}}_2) Y_{l_3 m_3}^*(\hat{\mathbf{k}}_3) \end{aligned} \tag{9.19}$$

Utilisant à la suite les relations (9.11), (9.12) et (9.13), nous obtenons

$$\begin{aligned} B_{m_1 m_2 m_3}^{l_1 l_2 l_3} &= \left(\frac{2}{\pi}\right)^3 \int \mathrm{d}k_1 \mathrm{d}k_2 \mathrm{d}k_3 (k_1 k_2 k_3)^2 B_\zeta(k_1,k_2,k_3)\,\Delta_{l_1}(k_1)\Delta_{l_2}(k_2)\Delta_{l_3}(k_3)\times \\ &\quad \int \mathrm{d}x\, x^2 j_{l_1}(k_1 x) j_{l_2}(k_2 x) j_{l_3}(k_3 x)\left(\int d\Omega_x\, Y_{l_1 m_1}(\hat{\mathbf{x}}) Y_{l_2 m_2}(\hat{\mathbf{x}}) Y_{l_3 m_3}(\hat{\mathbf{x}})\right)^* . \end{aligned} \tag{9.20}$$

La dernière intégrale angulaire, réelle, est connue sous le nom d'intégrale de Gaunt et peut s'exprimer en fonction des symboles $3j$ de Wigner (voir la référence [348] pour une présentation détaillée) selon

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_{m_1 m_2 m_3}^{l_1 l_2 l_3} &\equiv \int \mathrm{d}\Omega_x Y_{l_1 m_1}(\hat{\mathbf{x}}) Y_{l_2 m_2}(\hat{\mathbf{x}}) Y_{l_3 m_3}(\hat{\mathbf{x}}) \\ &= \sqrt{\frac{(2l_1+1)(2l_2+1)(2l_3+1)}{4\pi}}\begin{pmatrix} l_1 & l_2 & l_3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} l_1 & l_2 & l_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{9.21}$$

Ainsi, le bispectre peut se mettre sous la forme

$$B^{l_1 l_2 l_3}_{m_1 m_2 m_3} = \mathcal{G}^{l_1 l_2 l_3}_{m_1 m_2 m_3} b_{l_1 l_2 l_3} \tag{9.22}$$

où $b_{l_1 l_2 l_3}$, dit bispectre réduit, est donné par

$$\begin{aligned} b_{l_1 l_2 l_3} &= \left(\frac{2}{\pi}\right)^3 \int \mathrm{d}x \mathrm{d}k_1 \mathrm{d}k_2 \mathrm{d}k_3 \, (x k_1 k_2 k_3)^2 \, B_\zeta(k_1, k_2, k_3) \times \\ & \Delta_{l_1}(k_1) \, \Delta_{l_2}(k_2) \, \Delta_{l_3}(k_3) \, j_{l_1}(k_1 x) \, j_{l_2}(k_2 x) \, j_{l_3}(k_3 x) \, . \end{aligned} \tag{9.23}$$

Les deux équations précédentes sont le pendant pour le bispectre angulaire des équations (9.16) et (9.17) pour le spectre angulaire. En particulier, on peut montrer que l'invariance statistique par rotation impose que le bispectre soit de la forme (9.22) où le bispectre réduit est une fonction réelle symétrique en les l_i quelconque [219]. De la même manière que les C_l peuvent être calculés selon l'expression (9.18), il est intéressant d'introduire le bispectre angulaire moyenné

$$B_{l_1 l_2 l_3} \equiv \sum_{m_i} \begin{pmatrix} l_1 & l_2 & l_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{pmatrix} B^{l_1 l_2 l_3}_{m_1 m_2 m_3} \, . \tag{9.24}$$

De l'identité

$$\sum_{m_i} \begin{pmatrix} l_1 & l_2 & l_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{pmatrix}^2 = 1 \, , \tag{9.25}$$

on en déduit en effet que celui-ci est directement relié au bispectre par

$$B^{l_1 l_2 l_3}_{m_1 m_2 m_3} = \begin{pmatrix} l_1 & l_2 & l_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{pmatrix} B_{l_1 l_2 l_3} \tag{9.26}$$

et donc au bispectre réduit par

$$B_{l_1 l_2 l_3} = \sqrt{\frac{(2l_1+1)(2l_2+1)(2l_3+1)}{4\pi}} \begin{pmatrix} l_1 & l_2 & l_3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} b_{l_1 l_2 l_3} \, . \tag{9.27}$$

Notons enfin que l'invariance statistique par rotation restreint les configurations pour lesquelles le bispectre est non-nul à priori. L'intégrale de Gaunt, entrant dans la relation (9.22), est en effet non nulle si et seulement si $l_1 + l_2 + l_3$ est pair, $m_1 + m_2 = m_3 = 0$ et $|l_i - l_j| \leq l_k \leq l_i + l_j$. La dernière condition impose que les l_i forment un triangle dans l'espace des multipôles et est réminiscente de la contrainte équivalente sur les vecteurs d'onde du bispectre primordial.

9.2.3 Estimateurs des $f^{(i)}_{NL}$

Suivant la démarche des tests spécifiques exposée à la sous-section 9.1.1, nous décomposons maintenant le bispectre (moyenné) selon

$$B_{l_1 l_2 l_3} = \sum_i f^{(i)}_{NL} B^{(i)}_{l_1 l_2 l_3} \tag{9.28}$$

où la somme porte sur différents types de bispectre (local, équilatéral, orthogonal, anisotropies secondaires, avant-plans ...), d'amplitudes quantifiées par les paramètres $f_{NL}^{(i)}$, et nous considérons le problème de l'extraction de ces derniers à partir des données des fluctuations de température du CMB. La construction des estimateurs optimaux correspondants a été développée dans les références [223, 111, 23, 383, 427] et a été mise en pratique pour la première fois pour les non-gaussianités locales dans la référence [382]. La procédure mathématique est bien connue (voir par exemple [127] pour une introduction à la théorie de l'estimation en cosmologie). Le point de départ est la fonction de distribution de probabilité (souvent notée PDF en référence à l'anglais *probability distribution function*) des a_{lm} en fonction des paramètres à déterminer, les $f_{NL}^{(i)}$:

$$p(a_{lm} \mid f_{NL}^{(i)}) \,. \tag{9.29}$$

La valeur "réelle" de ces-derniers peut alors être considérée comme celle maximisant la PDF. L'estimateur $\hat{f}_{NL}^{(i)}$ construit de cette façon est appelé l'estimateur de probabilité maximale. Ensuite, à maximum de la PDF donné, la précision de son estimation dépend évidemment du caractère piqué ou pas de la PDF autour de son maximum. On ne peut pas espérer obtenir une contrainte plus fine avec une PDF "étalée" qu'avec une PDF très piquée. En d'autres termes, la courbure de la PDF autour de son maximum impose une borne inférieure à la variance de tout estimateur non-biaisé, *i.e.* tel que $\hat{f}_{NL}^{(i)} = f_{NL}^{(i)}$. C'est ce qu'on appelle la borne de Cramer-Rao. Mieux, un théorème indique que l'estimateur de probabilité maximale est asymptotiquement optimal, dans le sens où il sature la borne de Cramer-Rao dans la limite d'un nombre infini d'observations. La PDF peut elle être calculée analytiquement dans la limite des faibles non-gaussianités – c'est le cas des anisotropies du CMB – en utilisant le développement d'Edgeworth [58, 399, 59], qui peut être vu comme un développement en série d'une PDF autour de sa partie gaussienne[3]. Cette approche a la mérite d'être générique et permet de prendre en compte facilement les contraintes expérimentales comme le bruit où la couverte incomplète du ciel. Dans la suite, nous négligeons ces considérations par simplicité et suivons une méthode équivalente plus simple et plus intuitive : dans la limite des faibles non-gaussianités, les configurations du bispectre peuvent en première approximation être caractérisées par une statistique gaussienne. Dans ce cas, maximiser leur fonction de distribution de probabilité est équivalent à minimiser le χ^2

$$\chi^2 = \sum_{2 \le l_1 \le l_2 \le l_3} \frac{\left(B_{l_1 l_2 l_3}^{\rm obs} - \sum_i f_{NL}^{(i)} B_{l_1 l_2 l_3}^{(i)} \right)^2}{\sigma_{l_1 l_2 l_3}^2} \tag{9.30}$$

où par définition

$$B_{l_1 l_2 l_3}^{\rm obs} \equiv \sum_{m_i} \begin{pmatrix} l_1 & l_2 & l_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{pmatrix} a_{l_1 m_1}^{\rm obs} a_{l_2 m_2}^{\rm obs} a_{l_3 m_3}^{\rm obs} \tag{9.31}$$

3. Dans le cas simple d'une théorie isotrope et d'une couverture complète et parfaite du ciel, le développement d'Edgeworth au premier ordre donne, pour les anisotropies de température du CMB [23] : $p(a_{lm} \mid f_{NL}^{(i)}) = \left(\prod_{lm} \frac{e^{-\frac{a_{lm} a_{lm}^*}{2C_l}}}{\sqrt{2\pi C_l}} \right) \left(1 + \sum_{l_i m_i} B_{m_1 m_2 m_3}^{l_1 l_2 l_3} \frac{a_{l_1 m_1} a_{l_2 m_2} a_{l_3 m_3}}{C_{l_1} C_{l_2} C_{l_3}} \right)$.

et [152, 180, 274, 387]

$$\sigma^2_{l_1l_2l_3} \equiv \langle \left(B^{\rm obs}_{l_1l_2l_3}\right)^2 \rangle - \langle B^{\rm obs}_{l_1l_2l_3}\rangle^2 \simeq C_{l_1}C_{l_2}C_{l_3}\Delta_{l_1l_2l_3}\,. \tag{9.32}$$

Ici, $\Delta_{l_1l_2l_3}$ vaut 1, 2 ou 6 si tous les l_i sont différents, deux sont égaux ou tous sont égaux respectivement. Par la suite, comme toutes les quantités à sommer $S_{l_1l_2l_3}$ sont complètement symétriques en les l_i, il est commode, bien que redondant, d'effectuer le remplacement

$$\sum_{2\le l_1\le l_2\le l_3} \frac{S_{l_1l_2l_3}}{\sigma^2_{l_1l_2l_3}} \to \frac{1}{6}\sum_{2\le l_1,l_2,l_3} \frac{S_{l_1l_2l_3}}{C_{l_1}C_{l_2}C_{l_3}}\,. \tag{9.33}$$

La minimisation $\partial\chi^2/\partial f^{(i)}_{NL} = 0$ donne alors

$$\sum_j \left[\sum_{l_1l_2l_3} \frac{B^{(i)}_{l_1l_2l_3}B^{(j)}_{l_1l_2l_3}}{C_{l_1}C_{l_2}C_{l_3}}\right] f^{(j)}_{NL} = \sum_{l_1l_2l_3} \frac{B^{(i)}_{l_1l_2l_3}B^{\rm obs}_{l_1l_2l_3}}{C_{l_1}C_{l_2}C_{l_3}}\,. \tag{9.34}$$

Introduisant la matrice F d'éléments [4]

$$F_{ij} \equiv \frac{1}{6}\sum_{l_1l_2l_3} \frac{B^{(i)}_{l_1l_2l_3}B^{(j)}_{l_1l_2l_3}}{C_{l_1}C_{l_2}C_{l_3}}\,, \tag{9.35}$$

notre estimateur s'écrit donc

$$\hat{f}^{(i)}_{NL} = \sum_j \left(F^{-1}\right)_{ij} D_j \tag{9.36}$$

où le terme de source D_i, dépendant des données, vaut

$$D_i = \frac{1}{6}\sum_{l_1l_2l_3} \frac{B^{(i)}_{l_1l_2l_3}B^{\rm obs}_{l_1l_2l_3}}{C_{l_1}C_{l_2}C_{l_3}}\,. \tag{9.37}$$

Ainsi, afin que l'estimateur de $f^{(i)}_{NL}$ soit non-biaisé, il ne suffit pas de projeter le bispectre observé sur le bispectre théorique $B^{(i)}_{l_1l_2l_3}$ (9.37) mais on doit également corriger l'effet de la possible corrélation entre celui-ci et d'autres composantes, *i.e.* prendre en compte le fait que la matrice (9.35) est non diagonale en général. Celle-ci est appelée la matrice de Fisher des $\hat{f}^{(i)}_{NL}$, dans le sens où la matrice de covariance de ces derniers est donnée par l'inverse de F, *i.e.*,

$$\left(F^{-1}\right)_{ij} = \langle \hat{f}^{(i)}_{NL}\hat{f}^{(j)}_{NL}\rangle - \langle \hat{f}^{(i)}_{NL}\rangle\langle \hat{f}^{(j)}_{NL}\rangle\,. \tag{9.38}$$

L'incertitude à 68 % de niveau de confiance sur l'estimation du paramètre $f^{(i)}_{NL}$ est donc donnée par $\Delta f^{(i)}_{NL} = \sqrt{(F^{-1})_{ii}}$.

Notons que D_i peut se réécrire, en utilisant l'identité (9.25),

$$\begin{aligned} D_i &= \sum_{l_jm_j} \frac{\langle a^i_{l_1m_1}a^i_{l_2m_2}a^i_{l_3m_3}\rangle\, a^{\rm obs}_{l_1m_1}a^{\rm obs}_{l_2m_2}a^{\rm obs}_{l_3m_3}}{C_{l_1}C_{l_2}C_{l_3}} \\ &= \sum_{l_jm_j} \mathcal{G}^{l_1l_2l_3}_{m_1m_2m_3}\, b^{(i)}_{l_1l_2l_3}\, \frac{a^{\rm obs}_{l_1m_1}a^{\rm obs}_{l_2m_2}a^{\rm obs}_{l_3m_3}}{C_{l_1}C_{l_2}C_{l_3}} \end{aligned} \tag{9.39}$$

4. Le facteur $\frac{1}{6}$ est inclu de telle façon que F soit la matrice de Fisher des $\hat{f}^{(i)}_{NL}$, *c.f.* l'équation (9.38).

où on a utilisé l'équation (9.22) à la dernière égalité. Enfin, en utilisant la relation (9.27), les éléments de la matrice de Fisher (9.35) peuvent être exprimées en termes des bispectres réduits selon

$$F_{ij} = \sum_{l_1 l_2 l_3} \frac{(2l_1+1)(2l_2+1)(2l_3+1)}{4\pi} \begin{pmatrix} l_1 & l_2 & l_3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^2 \frac{b^{(i)}_{l_1 l_2 l_3} b^{(j)}_{l_1 l_2 l_3}}{C_{l_1} C_{l_2} C_{l_3}} \,. \tag{9.40}$$

Il est important d'insister sur le fait que l'estimateur (9.36), saturant la borne de Rao-Cramer, est optimal non seulement parmi les estimateurs cubiques dans les a_{lm} mais aussi parmi tous les estimateurs usant des données de fluctuations de température du CMB. En d'autres termes, de meilleures contraintes sur les $f^{(i)}_{NL}$ ne peuvent être apportées par aucune autre méthode : trispectre, fonctionnelles de Minkowski..., bien que celles-ci soient utiles comme expliqué à la sous-section 9.1.1.

Notons enfin qu'on peut s'intéresser à un autre problème, celui de l'évaluation, non de nombres caractérisant le bispectre, comme les $f^{(i)}_{NL}$, mais de sa dépendance d'échelle. Il convient à cet égard de remarquer qu'on a procédé, en sommant sur toutes les configurations de bispectre dans l'estimateur (9.37), à une compression radicale des données. Ceci est justifié par le faible rapport signal sur bruit de chaque configuration de bispectre. Cependant, si le signal primordial est suffisamment important, on peut envisager d'étudier le "spectre de puissance relié au bispectre" [317]

$$C_l^{\text{skew}} \equiv \frac{1}{2(l+1)} \sum_{l_1 l_2} \frac{B_{l_1 l_2 l} B^{\text{obs}}_{l_1 l_2 l}}{C_{l_1} C_{l_2} C_l} \,. \tag{9.41}$$

et ainsi vérifier (ou pas) l'origine primordiale d'un signal non-gaussien en observant la manifestation des oscillations acoustiques dans le bispectre (voir également la référence [76] à ce propos).

9.2.4 Mise en pratique et séparabilité

Nous discutons maintenant l'implémentation de l'estimateur présenté à la sous-section précédente. Naïvement, il suffit de calculer le terme de source (9.39) et les éléments de la matrice de Fisher (9.40) en utilisant l'expression générale (9.23) du bispectre réduit. Cependant, les temps de calcul associés à la somme sur toutes les configurations de bispectre dans l'équation (9.39) ainsi qu'à l'intégrale quadridimensionnelle intervenant dans l'expression (9.23) du bispectre réduit sont en général prohibitifs, et ce d'autant plus que la résolution angulaire expérimentale est grande, $l_{\max} \simeq 500$ pour WMAP et $l_{\max} \simeq 2000$ pour Planck. Pour cette raison, seuls des profils de bispectre séparables avaient été étudiées jusqu'à peu. Par ceci, nous voulons dire des profils $S^{(i)}$ (*c.f.* l'équation (5.4)) pouvant être écrits sous la forme

$$S^{(i)}(k_1, k_2, k_3) = X^{(i)}(k_1) Y^{(i)}(k_2) Z^{(i)}(k_3) + 5\,\text{perms.} \tag{9.42}$$

ou comme la somme de tels termes. Substituant (9.42) dans (9.23), nous trouvons en effet que l'expression du bispectre se simplifie alors en

$$b^{(i)}_{l_1 l_2 l_3} = N \int \mathrm{d}r\, r^2 X^{(i)}_{l_1}(r) Y^{(i)}_{l_2}(r) Z^{(i)}_{l_3}(r) + 5\,\text{perms.} \tag{9.43}$$

où

$$X_l^{(i)}(r) \equiv \int \mathrm{d}k X^{(i)}(k) j_l(kr) \Delta_l(k) \tag{9.44}$$

(et similairement pour $Y^{(i)}$ et $Z^{(i)}$) et le facteur numérique N vaut $2^7 \pi A_s^2$. Autrement dit, la triple intégrale sur les impulsions dans l'équation (9.23) a été remplacée par le produit de trois intégrales unidimensionnelles, rendant le calcul réalisable numériquement. De la même façon, le terme de source (9.39) peut alors s'écrire

$$\begin{aligned} D_i &= N \int \mathrm{d}r\, r^2 \int \mathrm{d}\Omega_{\hat{\mathbf{n}}} \sum_{l_1 m_1} \frac{a_{l_1 m_1}^{\mathrm{obs}} X_{l_1}^{(i)}(r) Y_{l_1 m_1}(\hat{\mathbf{n}})}{C_{l_1}} \sum_{l_2 m_2} \frac{a_{l_2 m_2}^{\mathrm{obs}} Y_{l_2}^{(i)}(r) Y_{l_2 m_2}(\hat{\mathbf{n}})}{C_{l_2}} \times \\ & \sum_{l_3 m_3} \frac{a_{l_3 m_3}^{\mathrm{obs}} Z_{l_3}^{(i)}(r) Y_{l_3 m_3}(\hat{\mathbf{n}})}{C_{l_3}} + 5\,\mathrm{perms.} \end{aligned} \tag{9.45}$$

où on a utilisé la définition (9.21) de l'intégrale de Gaunt. La somme initiale sur $l_1 l_2 l_3, m_1 m_2 m_3$ est donc remplacée dans ce cas par le produit de trois termes, chacun ne faisant intervenir qu'une somme sur les indices l, m. Si on définit les quantités

$$M_X^{(i)}(r, \hat{\mathbf{n}}) \equiv \sum_{lm} \frac{a_{lm}^{\mathrm{obs}} X_l^{(i)}(r)}{C_l} Y_{lm}(\hat{\mathbf{n}}) \tag{9.46}$$

(ainsi que $M_Y^{(i)}(r, \hat{\mathbf{n}})$ et $M_Z^{(i)}(r, \hat{\mathbf{n}})$ de la même façon), le terme de source D_i dans l'estimateur (9.36) peut donc s'écrire sous la forme compacte

$$D_i = N \int \mathrm{d}r\, r^2 \int \mathrm{d}\Omega_{\hat{\mathbf{n}}}\, M_X^{(i)}(r, \hat{\mathbf{n}}) M_Y^{(i)}(r, \hat{\mathbf{n}}) M_Z^{(i)}(r, \hat{\mathbf{n}}) + 5\,\mathrm{perms.} \tag{9.47}$$

La condition de séparabilité est évidemment hautement restrictive et, des profils calculés au chapitre 5, seul celui local (5.40) la vérifie. Pour cette raison, des ansätze séparables ont souvent été étudiés à la place des profils originaux, comme l'ansatz équilatéral (5.103) en remplacement des profils (5.94) et (5.95), où l'ansatz orthogonal (5.105). Il a cependant été mis en place récemment par Fergusson et al. [143] (voir [145, 144] pour des travaux antérieurs reliés) une méthode permettant de déterminer de manière systématique une approximation séparable à tout profil de bispectre. L'idée est de considérer l'espace de Hilbert des fonctions profils muni de la norme induite par le produit scalaire (5.5). Suivant une technique classique d'analyse harmonique, on peut alors décomposer tout profil selon une "base séparable" orthonormale

$$S(k_1, k_2, k_3) = \sum_{p,r,s} \alpha_{prs} q_p(k_1) q_r(k_2) q_s(k_3)\,. \tag{9.48}$$

Tronquer la somme dans le membre de droite quand le niveau de convergence est suffisant fournit alors une approximation séparable au profil S à laquelle on peut appliquer la démarche présentée dans cette sous-section (voir la référence [143] pour plus de détails). Suivant cette méthode, l'étude observationnelle de la forme des non-gaussianités peut donc être menée en toute généralité.

9.3 Contraintes actuelles et perspectives

Le tableau 9.3 récapitule les contraintes observationnelles, actuelles et attendues, sur les paramètres quantifiant l'amplitude de différentes formes de bispectre et de trispectre primordiaux, toujours à un niveau de confiance de 95 %. La première colonne indique les contraintes apportées par l'observation du fond diffus cosmologique (par le satellite WMAP) et la seconde, les incertitudes attendues du satellite Planck. La troisième colonne donne elle les contraintes apportées par différents catalogues de galaxies comme SDSS tandis que la dernière colonne mentionne la précision attendue des futurs relevés comme Euclid [342] [5] et LSST [191] [6]. Évidemment, comme au niveau linéaire, le détail des contraintes dépend de la méthode d'estimation choisie, des hypothèses sur le nombre de paramètres à estimer etc. Les incertitudes attendues en particulier sont à considérer comme des ordres de grandeur.

	WMAP	Planck	SDSS+...	Euclid/LSST
$f_{NL}^{\rm loc}$	$-10 < f_{NL}^{\rm loc} < 74^{a)}$	$3^{b)}$	$-29 < f_{NL}^{\rm loc} < 70^{c)}$	$1^{d)}$
$f_{NL}^{\rm eq}$	$-214 < f_{NL}^{\rm eq} < 266^{a)}$	$25^{e)}$	N/A	N/A
$f_{NL}^{\rm orth}$	$-410 < f_{NL}^{\rm orth} < 6^{a)}$	N/A	N/A	N/A
τ_{NL}	$-3.2 < \tau_{NL}/10^5 < 3.3^{f)}$	$560^{g)}$	N/A	N/A
g_{NL}	$-5.6 < g_{NL}/10^5 < 6.4^{h)}$	N/A	$-3.5 < g_{NL}/10^5 < 8.2^{i)}$	$\mathcal{O}(10^3)^{i)}$

TABLE 9.1 – Contraintes actuelles et précisions futures sur l'amplitude de différents types de non-gaussianités primordiales. a) [222] b) [429] c) [380] d) [89] e) [47, 369] f) [381] g) [218] h) [408] i) [120].

Les profils local (5.40), équilatéral (5.103) et orthogonal (5.105) étant séparables, les contraintes citées sur leur amplitude ont été obtenues avec le CMB en utilisant la méthode présentée à la section précédente, méthode qui s'étend aisément à l'estimation des paramètres du trispectre local τ_{NL} et g_{NL} (5.43). Les contraintes sur $f_{NL}^{\rm loc}$ et g_{NL} apportées par les relevés de galaxies ont, elles, été déterminées en utilisant la dépendance d'échelle du biais du spectre de puissance des galaxies en présence de non-gaussianités primordiales locales (*c.f.* la sous-section 9.1.2).

Les donnée cosmologiques sont donc, pour l'instant, compatibles avec des fluctuations primordiales gaussiennes. Récemment cependant, il a été annoncé que $25 < f_{NL}^{\rm loc} < 117\,(95\%CL)$ suite à l'analyse du relevé de galaxies NRAO VLA [426]. De plus, si on considère les intervalles de confiance à 68 %, les analyses de WMAP donnent [222]

$$f_{NL}^{\rm loc} = 32 \pm 21 \ (68\%CL) \tag{9.49}$$

et

$$f_{NL}^{\rm orth} = -202 \pm 104 \ (68\%CL) \tag{9.50}$$

Est-ce que ces estimations suggèrent des non-gaussianités primordiales locales ou orthogonales ? Concernant $f_{NL}^{\rm orth}$, aucune étude n'a encore été menée sur les effets de contaminations

5. http ://sci.esa.int/science-e/www/area/index.cfm ?fareaid=102
6. http ://www.lsst.org

par les sources ponctuelles et les anisotropies secondaires. Il convient donc de ne pas tirer de conclusions hâtives à cet égard. Quant à l'analyse du relevé NRAO VLA, ses auteurs expliquent que des études sont encore nécessaires avant de conclure, ou pas, à la détection de non-gaussianités primordiales. Concernant les mesures des non-gaussianités locales par WMAP enfin, le point le plus délicat est la forte variation (d'un facteur $\Delta f_{NL}^{\rm loc} \sim 10$) de l'estimation de $f_{NL}^{\rm loc}$ avec la bande de fréquences utilisée pour détecter le signal, qui suggère que la contribution des avant-plans est mal comprise. Ceci devrait cependant être mieux pris en compte avec Planck, qui disposera d'un nombre beaucoup plus important de bandes de fréquences. Sinon, les autres contaminants sont bien connus ou d'amplitude bien inférieure à la valeur centrale $f_{NL}^{\rm loc} \sim 32$ (comme la contribution $\Delta f_{NL}^{\rm loc} \sim 5$ de l'évolution non-linéaire du mélange baryons-photons [335]). Le satellite Planck, avec sa capacité de réduire d'un facteur quatre l'incertitude sur $f_{NL}^{\rm loc}$ par rapport à la contrainte actuelle $f_{NL}^{\rm loc} = 32 \pm 21 (68\% CL)$, permettra de trancher. Notons qu'en cas de détection, le trispectre permettra alors une vérification intéressante. Rappelons en effet que (5.49)

$$\tau_{NL} \geq \left(\frac{6}{5} f_{NL}^{\rm loc} \right)^2 , \tag{9.51}$$

de telle façon que $\tau_{NL} \gtrsim 1300$ pour $f_{NL}^{\rm loc} \sim 30$, une valeur bien supérieure à l'incertitude attendue $\Delta \tau_{NL} \sim 560$ [218].

Conclusions et perspectives

Sommaire

9.1 Comment sonder les non-gaussianités primordiales ? 339
9.1.1 Le fond diffus cosmologique 340
9.1.2 Les grandes structures de l'univers 341
9.2 Le bispectre du fond diffus cosmologique : formalisme et détection 342
9.2.1 Un échauffement : du spectre primordial au spectre angulaire . . 343
9.2.2 Du bispectre primordial au bispectre angulaire 344
9.2.3 Estimateurs des $f_{NL}^{(i)}$ 345
9.2.4 Mise en pratique et séparabilité 348
9.3 Contraintes actuelles et perspectives 350

Le travail de thèse exposé dans ce mémoire a essentiellement porté sur la théorie, linéaire et non-linéaire, des perturbations cosmologiques générées dans les modèles d'univers primordiaux d'action non canonique ou/et avec plusieurs champs scalaires. Nous avons dans ce contexte développé des formalismes très généraux que nous avons appliqués à des scénarios intéressants, allant des aspects les plus théoriques jusqu'aux prédictions observationnelles.

Nous avons démontré l'utilité du formalisme covariant développé par Langlois et Vernizzi pour déterminer des résultats dont l'obtention serait autrement laborieuse, comme la construction et la détermination des équations d'évolution de variables invariantes de jauge au troisième ordre dans la théorie des perturbations dans les scénarios impliquant deux champs scalaires. Ces résultats n'ont pas qu'un intérêt académique, comme nous l'avons démontré en déterminant grâce à eux le trispectre primordial généré dans les scénarios ekpyrotiques. Le satellite Planck en particulier aura la sensibilité nécessaire pour tester ces prédictions dans un avenir proche.

Notre étude de l'inflation multichamp d'action invariante de Lorentz la plus générale possible a elle permis d'unifier, et d'aller au-delà, des résultats connus concernant l'inflation à un champ avec des termes cinétiques non standard et l'inflation multichamp canonique. Appliquée à l'inflation Dirac-Born-Infeld, le fait que ses aspects multichamp puissent altérer considérablement les observables cosmologiques et ainsi la rendre viable, contrairement aux assertions antérieures dans la littérature, constitue un résultat particulièrement important qui a motivé des études complémentaires d'autres chercheurs. Ceci s'explique par

le statut particulier de l'inflation DBI comme modèle d'inflation inspirée par la théorie des cordes et prototype et motivation principale des scénario de k-inflation générant d'importantes non-gaussianités équilatérales. Nous avons également montré qu'il est possible dans ces scénarios de générer d'importantes non-gaussianités d'un autre type, locales, fournissant le premier exemple de modèle où ces deux types de non-gaussianités, auparavant considérées de manière indépendante, peuvent être présentes à des niveaux observationnels important dans le même modèle. Nous avons de plus prouvé l'existence d'une relation de cohérence, faisant intervenir différents moments de la distribution des fluctuations, complètement générique et permettant la falsification (ou la vérification) observationnelle de ce type de modèles.

Parmi les pistes ouvertes par notre travail, mentionnons par exemple que, dans le cadre de l'inflation multichamp avec des actions de type non standard, l'inflation DBI est particulière dans le sens où toutes les perturbations scalaires y évoluent à la même vitesse. Il serait intéressant d'étudier la phénoménologie associée à la situation générique dans laquelle plusieurs vitesses de propagation coïncident. Concernant l'inflation DBI multichamp, deux directions de recherche sont particulièrement naturelles. L'une consiste à considérer la construction explicite de tels modèle dans le cadre de la théorie des cordes. L'autre consiste à développer plus avant les outils, comme des estimateurs statistiques du trispectre primordial, permettant de les tester observationnellement.

Enfin, nous attendons évidemment avec beaucoup d'impatience les résultats du satellite Planck, qu'il sera très intéressant de comparer aux prédictions établies dans cette thèse. Au-delà du sort réservé aux modèles que nous avons étudiés cependant, il est clair que l'âge d'or de la cosmologie ne fait que commencer !

Bibliographie

[1] Abbott, L. F., Farhi, E., and Wise, M. B., *Particle Production in the New Inflationary Cosmology*, Phys. Lett. **B117** (1982) 29.

[2] Acquaviva, V., Bartolo, N., Matarrese, S., and Riotto, A., *Second-order cosmological perturbations from inflation*, Nucl. Phys. **B667** (2003) 119–148, [astro-ph/0209156].

[3] Adams, J., Cresswell, B., and Easther, R., *Inflationary perturbations from a potential with a step*, astro-ph/0102236v2.

[4] Adshead, P., and Easther, R., *Constraining Inflation*, JCAP **0810** (2008) 047, [arXiv:0802.3898].

[5] Adshead, P., Easther, R., and Lim, E. A., *Cosmology With Many Light Scalar Fields : Stochastic Inflation and Loop Corrections*, Phys. Rev. **D79** (2009) 063504, [arXiv:0809.4008].

[6] Afshordi, N., and Tolley, A. J., *Primordial non-gaussianity, statistics of collapsed objects, and the Integrated Sachs-Wolfe effect*, Phys. Rev. **D78** (2008) 123507, [arXiv:0806.1046].

[7] Agarwal, N., and Bean, R., *Cosmological constraints on general, single field inflation*, Phys. Rev. **D79** (2009) 023503, [arXiv:0809.2798].

[8] Alabidi, L., and Lyth, D., *Curvature perturbation from symmetry breaking the end of inflation*, JCAP **0608** (2006) 006, [astro-ph/0604569].

[9] Alabidi, L., Malik, K. A., Byrnes, C. T., and Choi, K.-Y., *How the curvaton scenario, modulated reheating and an inhomogeneous end of inflation are related*, arXiv:1002.1700.

[10] Albrecht, A. J., and Steinhardt, P. J., *Cosmology for Grand Unified Theories with Radiatively Induced Symmetry Breaking*, Phys. Rev. Lett. **48** (1982) 1220–1223.

[11] Alishahiha, M., Silverstein, E., and Tong, D., *DBI in the sky*, Phys. Rev. **D70** (2004) 123505, [hep-th/0404084].

[12] Allen, L. E., Gupta, S., and Wands, D., *Non-Gaussian perturbations from multi-field inflation*, JCAP **0601** (2006) 006, [astro-ph/0509719].

[13] Anderegg, S., and Mukhanov, V. F., *Path integral quantization of cosmological perturbations*, Phys. Lett. **B331** (1994) 30–38, [hep-th/9403091].

[14] Antoniadis, I., Arkani-Hamed, N., Dimopoulos, S., and Dvali, G. R., *New dimensions at a millimeter to a Fermi and superstrings at a TeV*, Phys. Lett. **B436** (1998) 257–263, [hep-ph/9804398].

[15] Arkani-Hamed, N., Cheng, H.-C., Luty, M. A., and Mukohyama, S., *Ghost condensation and a consistent infrared modification of gravity*, JHEP **05** (2004) 074, [hep-th/0312099].

[16] Arkani-Hamed, N., Creminelli, P., Mukohyama, S., and Zaldarriaga, M., *Ghost Inflation*, JCAP **0404** (2004) 001, [hep-th/0312100].

[17] Arkani-Hamed, N., Dimopoulos, S., and Dvali, G. R., *The hierarchy problem and new dimensions at a millimeter*, Phys. Lett. **B429** (1998) 263–272, [hep-ph/9803315].

[18] Arkani-Hamed, N., Dimopoulos, S., and Dvali, G. R., *Phenomenology, astrophysics and cosmology of theories with sub-millimeter dimensions and TeV scale quantum gravity*, Phys. Rev. **D59** (1999) 086004, [hep-ph/9807344].

[19] Armendariz-Picon, C., Damour, T., and Mukhanov, V. F., *k-Inflation*, Phys. Lett. **B458** (1999) 209–218, [hep-th/9904075].

[20] Arnowitt, R., Deser, S., and Misner, C. W., *The dynamics of general relativity*, LOUIS WITTEN ED **7** (1962) 227.

[21] Arroja, F., Mizuno, S., and Koyama, K., *Non-gaussianity from the bispectrum in general multiple field inflation*, JCAP **0808** (2008) 015, [arXiv:0806.0619].

[22] Arroja, F., Mizuno, S., Koyama, K., and Tanaka, T., *On the full trispectrum in single field DBI-inflation*, Phys. Rev. **D80** (2009) 043527, [arXiv:0905.3641].

[23] Babich, D., *Optimal Estimation of Non-Gaussianity*, Phys. Rev. **D72** (2005) 043003, [astro-ph/0503375].

[24] Babich, D., Creminelli, P., and Zaldarriaga, M., *The shape of non-Gaussianities*, JCAP **0408** (2004) 009, [astro-ph/0405356].

[25] Babich, D., and Zaldarriaga, M., *Primordial Bispectrum Information from CMB Polarization*, Phys. Rev. **D70** (2004) 083005, [astro-ph/0408455].

[26] Babichev, E., Mukhanov, V., and Vikman, A., *k-Essence, superluminal propagation, causality and emergent geometry*, JHEP **02** (2008) 101, [arXiv:0708.0561].

[27] Bachas, C. P., *Lectures on D-branes*, hep-th/9806199.

[28] Bakshi, P. M., and Mahanthappa, K. T., *Expectation value formalism in quantum field theory. 1*, J. Math. Phys. **4** (1963) 1–11.

[29] Bamba, K., Ohta, N., and Tsujikawa, S., *Generic estimates for magnetic fields generated during inflation including Dirac-Born-Infeld theories*, Phys. Rev. **D78** (2008) 043524, [arXiv:0805.3862].

[30] Bardeen, J. M., *Gauge Invariant Cosmological Perturbations*, Phys. Rev. **D22** (1980) 1882–1905.

[31] Bardeen, J. M., Steinhardt, P. J., and Turner, M. S., *Spontaneous Creation of Almost Scale - Free Density Perturbations in an Inflationary Universe*, Phys. Rev. **D28** (1983) 679.

[32] Barnaby, N., and Cline, J. M., *Nongaussian and nonscale-invariant perturbations from tachyonic preheating in hybrid inflation*, Phys. Rev. **D73** (2006) 106012, [astro-ph/0601481].

[33] Barnaby, N., and Cline, J. M., *Nongaussianity from Tachyonic Preheating in Hybrid Inflation*, Phys. Rev. **D75** (2007) 086004, [astro-ph/0611750].

[34] Bartolo, N., Dimastrogiovanni, E., Matarrese, S., and Riotto, A., *Anisotropic bispectrum of curvature perturbations from primordial non-Abelian vector fields*, arXiv:0906.4944.

[35] Bartolo, N., Dimastrogiovanni, E., Matarrese, S., and Riotto, A., *Anisotropic Trispectrum of Curvature Perturbations Induced by Primordial Non-Abelian Vector Fields*, arXiv:0909.5621.

[36] Bartolo, N., Fasiello, M., Matarrese, S., and Riotto, A., *Large non-Gaussianities in the Effective Field Theory Approach to Single-Field Inflation : the Bispectrum*, arXiv:1004.0893.

[37] Bartolo, N., Matarrese, S., and Riotto, A., *On non-Gaussianity in the curvaton scenario*, Phys. Rev. **D69** (2004) 043503, [hep-ph/0309033].

[38] Bartolo, N., Matarrese, S., and Riotto, A., *Non-Gaussianity and the Cosmic Microwave Background Anisotropies*, arXiv:1001.3957.

[39] Bassett, B. A., and Tsujikawa, S., *Inflationary preheating and primordial black holes*, Phys. Rev. **D63** (2001) 123503, [hep-ph/0008328].

[40] Bassett, B. A., Tsujikawa, S., and Wands, D., *Inflation dynamics and reheating*, 2005.

[41] Battefeld, T., and Easther, R., *Non-gaussianities in multi-field inflation*, JCAP **0703** (2007) 020, [astro-ph/0610296].

[42] Baumann, D., *TASI Lectures on Inflation*, arXiv:0907.5424.

[43] Baumann, D., Dymarsky, A., Kachru, S., Klebanov, I. R., and McAllister, L., *Compactification Effects in D-brane Inflation*, arXiv:0912.4268.

[44] Baumann, D., Dymarsky, A., Kachru, S., Klebanov, I. R., and McAllister, L., *D3-brane Potentials from Fluxes in AdS/CFT*, arXiv:1001.5028.

[45] Baumann, D., Dymarsky, A., Klebanov, I. R., and McAllister, L., *Towards an Explicit Model of D-brane Inflation*, JCAP **0801** (2008) 024, [arXiv:0706.0360].

[46] Baumann, D., Dymarsky, A., Klebanov, I. R., McAllister, L., and Steinhardt, P. J., *A Delicate Universe*, Phys. Rev. Lett. **99** (2007) 141601, [arXiv:0705.3837].

[47] **CMBPol Study Team** Collaboration, Baumann, D., et al., *CMBPol Mission Concept Study : Probing Inflation with CMB Polarization*, arXiv:0811.3919.

[48] Baumann, D., and McAllister, L., *A Microscopic Limit on Gravitational Waves from D-brane Inflation*, Phys. Rev. **D75** (2007) 123508, [hep-th/0610285].

[49] Baumann, D., and McAllister, L., *Advances in Inflation in String Theory*, arXiv:0901.0265.

[50] Baumann, D., and Peiris, H. V., *Cosmological Inflation : Theory and Observations*, Adv. Sci. Lett. **2** (2009) 105–120, [arXiv:0810.3022].

[51] Bean, R., Chen, X., Hailu, G., Tye, S.-H. H., and Xu, J., *Duality cascade in brane inflation*, arXiv:0802.0491.

[52] Bean, R., Chen, X., Peiris, H., and Xu, J., *Comparing Infrared Dirac-Born-Infeld Brane Inflation to Observations*, Phys. Rev. **D77** (2008) 023527, [arXiv:0710.1812].

[53] Bean, R., Shandera, S. E., Henry Tye, S. H., and Xu, J., *Comparing Brane Inflation to WMAP*, JCAP **0705** (2007) 004, [hep-th/0702107].

[54] Becker, M., Leblond, L., and Shandera, S., *Inflation from wrapped branes*, arXiv:0709.1170.

[55] Bernardeau, F., *Gravity and non-gravity mediated couplings in multiple- field inflation*, arXiv:1003.2869.

[56] Bernardeau, F., *Mode coupling evolution in arbitrary inflationary backgrounds*, arXiv:1003.3575.

[57] Bernardeau, F., and Brunier, T., *Non-Gaussianities in extended D-term inflation*, Phys. Rev. **D76** (2007) 043526, [arXiv:0705.2501].

[58] Bernardeau, F., Colombi, S., Gaztanaga, E., and Scoccimarro, R., *Large-scale structure of the universe and cosmological perturbation theory*, Phys. Rept. **367** (2002) 1–248, [astro-ph/0112551].

[59] Bernardeau, F., and Kofman, L., *Properties of the Cosmological Density Distribution Function*, Astrophys. J. **443** (1995) 479–498, [astro-ph/9403028].

[60] Bernardeau, F., Kofman, L., and Uzan, J.-P., *Modulated fluctuations from hybrid inflation*, Phys. Rev. **D70** (2004) 083004, [astro-ph/0403315].

[61] Bernardeau, F., and Uzan, J.-P., *Non-Gaussianity in multi-field inflation*, Phys. Rev. **D66** (2002) 103506, [hep-ph/0207295].

[62] Bernardeau, F., and Uzan, J.-P., *Inflationary models inducing non-gaussian metric fluctuations*, Phys. Rev. **D67** (2003) 121301, [astro-ph/0209330].

[63] Berndsen, A., Lidsey, J. E., and Ward, J., *Non-relativistic Matrix Inflation*, arXiv:0908.4252.

[64] Bertschinger, E., *On the Growth of Perturbations as a Test of Dark Energy*, Astrophys. J. **648** (2006) 797–806, [astro-ph/0604485].

[65] Bezrukov, F. L., and Shaposhnikov, M. E., *The standard model higgs boson as the inflaton*, Physics Letters B **659** (2008) 703.

[66] Bird, S., Peiris, H. V., and Baumann, D., *Brane Inflation and the Overshoot Problem*, arXiv:0905.2412.

[67] Birrell, N. D., and Davies, P. C. W., *Quantum Fields in Curved Space*, . Cambridge, Uk : Univ. Pr. (1982) 340p.

[68] Brandenberger, R. H., Frey, A. R., and Lorenz, L. C., *Entropy fluctuations in brane inflation models*, International Journal of Modern Physics A **24** (2009) 4327.

[69] Brax, P., and Cluzel, E., *Brane bremsstrahlung in dbi inflation*, arXiv:0912.0806.

[70] Brax, P., and Steer, D. A., *A comment on bouncing and cyclic branes in more than one extra-dimension*, hep-th/0207280.

[71] Brax, P., and Steer, D. A., *Remark on bouncing and cyclic branes in more than one extra dimension*, Phys. Rev. **D66** (2002) 061501.

[72] Bruni, M., Ellis, G. F. R., and Dunsby, P. K. S., *Gauge invariant perturbations in a scalar field dominated universe*, Class. Quant. Grav. **9** (1992) 921–946.

[73] Bruni, M., Matarrese, S., Mollerach, S., and Sonego, S., *Perturbations of spacetime : Gauge transformations and gauge invariance at second order and beyond*, Class. Quant. Grav. **14** (1997) 2585–2606, [gr-qc/9609040].

[74] Buchbinder, E. I., Khoury, J., and Ovrut, B. A., *New Ekpyrotic Cosmology*, Phys. Rev. **D76** (2007) 123503, [hep-th/0702154].

[75] Buchbinder, E. I., Khoury, J., and Ovrut, B. A., *On the Initial Conditions in New Ekpyrotic Cosmology*, JHEP **11** (2007) 076, [arXiv:0706.3903].

[76] Bucher, M., Van Tent, B., and Carvalho, C. S., *Detecting Bispectral Acoustic Oscillations from Inflation Using a New Flexible Estimator*, arXiv:0911.1642.

[77] Burgess, C. P., *Lectures on Cosmic Inflation and its Potential Stringy Realizations*, PoS **P2GC** (2006) 008, [arXiv:0708.2865].

[78] Byrnes, C. T., and Choi, K.-Y., *Review of local non-Gaussianity from multi-field inflation*, arXiv:1002.3110.

[79] Byrnes, C. T., Choi, K.-Y., and Hall, L. M. H., *Conditions for large non-Gaussianity in two-field slow- roll inflation*, JCAP **0810** (2008) 008, [arXiv:0807.1101].

[80] Byrnes, C. T., Choi, K.-Y., and Hall, L. M. H., *Large non-Gaussianity from two-component hybrid inflation*, JCAP **0902** (2009) 017, [arXiv:0812.0807].

[81] Byrnes, C. T., Koyama, K., Sasaki, M., and Wands, D., *Diagrammatic approach to non-Gaussianity from inflation*, JCAP **0711** (2007) 027, [arXiv:0705.4096].

[82] Byrnes, C. T., Nurmi, S., Tasinato, G., and Wands, D., *Scale dependence of local f_{NL}*, JCAP **1002** (2010) 034, [arXiv:0911.2780].

[83] Byrnes, C. T., Sasaki, M., and Wands, D., *The primordial trispectrum from inflation*, Phys. Rev. **D74** (2006) 123519, [astro-ph/0611075].

[84] Byrnes, C. T., and Tasinato, G., *Non-Gaussianity beyond slow roll in multi-field inflation*, arXiv:0906.0767.

[85] Byrnes, C. T., and Wands, D., *Curvature and isocurvature perturbations from two-field inflation in a slow-roll expansion*, Physical Review D **74** (2006) 043529.

[86] Cabella, P., et al., *Foreground influence on primordial non-Gaussianity estimates : needlet analysis of WMAP 5-year data*, arXiv:0910.4362.

[87] Calzetta, E., and Hu, B. L., *Closed Time Path Functional Formalism in Curved Space- Time : Application to Cosmological Back Reaction Problems*, Phys. Rev. **D35** (1987) 495.

[88] Candelas, P., and de la Ossa, X. C., *Comments on Conifolds*, Nucl. Phys. **B342** (1990) 246–268.

[89] Carbone, C., Verde, L., and Matarrese, S., *Non-Gaussian halo bias and future galaxy surveys*, Astrophys. J. **684** (2008) L1–L4, [arXiv:0806.1950].

[90] Cardoso, A., and Wands, D., *Generalised perturbation equations in bouncing cosmologies*, Phys. Rev. **D77** (2008) 123538, [arXiv:0801.1667].

[91] Challinor, A., and Peiris, H., *Lecture notes on the physics of cosmic microwave background anisotropies*, AIP Conf. Proc. **1132** (2009) 86–140, [arXiv:0903.5158].

[92] Chen, H.-Y., Gong, J.-O., and Shiu, G., *Systematics of multi-field effects at the end of warped brane inflation*, JHEP **09** (2008) 011, [arXiv:0807.1927].

[93] Chen, X., *Inflation from warped space*, JHEP **08** (2005) 045, [hep-th/0501184].

[94] Chen, X., *Multi-throat brane inflation*, Phys. Rev. **D71** (2005) 063506, [hep-th/0408084].

[95] Chen, X., *Running non-Gaussianities in DBI inflation*, Phys. Rev. **D72** (2005) 123518, [astro-ph/0507053].

[96] Chen, X., *Primordial Non-Gaussianities from Inflation Models*, arXiv:1002.1416.

[97] Chen, X., Easther, R., and Lim, E. A., *Large non-Gaussianities in single field inflation*, JCAP **0706** (2007) 023, [astro-ph/0611645].

[98] Chen, X., Easther, R., and Lim, E. A., *Generation and Characterization of Large Non-Gaussianities in Single Field Inflation*, JCAP **0804** (2008) 010, [arXiv:0801.3295].

[99] Chen, X., Hu, B., Huang, M.-x., Shiu, G., and Wang, Y., *Large Primordial Trispectra in General Single Field Inflation*, arXiv:0905.3494.

[100] Chen, X., Huang, M.-x., Kachru, S., and Shiu, G., *Observational signatures and non-Gaussianities of general single field inflation*, JCAP **0701** (2007) 002, [hep-th/0605045].

[101] Chen, X., Huang, M.-x., and Shiu, G., *The inflationary trispectrum for models with large non- Gaussianities*, Phys. Rev. **D74** (2006) 121301, [hep-th/0610235].

[102] Chen, X., Sarangi, S., Henry Tye, S. H., and Xu, J., *Is brane inflation eternal ?*, JCAP **0611** (2006) 015, [hep-th/0608082].

[103] Chen, X., and Wang, Y., *Large non-Gaussianities with Intermediate Shapes from Quasi-Single Field Inflation*, arXiv:0909.0496.

[104] Chen, X., and Wang, Y., *Quasi-Single Field Inflation and Non-Gaussianities*, arXiv:0911.3380.

[105] Cheung, C., Creminelli, P., Fitzpatrick, A. L., Kaplan, J., and Senatore, L., *The Effective Field Theory of Inflation*, JHEP **03** (2008) 014, [arXiv:0709.0293].

[106] Cheung, C., Fitzpatrick, A. L., Kaplan, J., and Senatore, L., *On the consistency relation of the 3-point function in single field inflation*, JCAP **0802** (2008) 021, [arXiv:0709.0295].

[107] Choi, K.-Y., Hall, L. M. H., and van de Bruck, C., *Spectral running and non-Gaussianity from slow-roll inflation in generalised two-field models*, JCAP **0702** (2007) 029, [astro-ph/0701247].

[108] Cline, J. M., *String cosmology*, hep-th/0612129.

[109] Copeland, E. J., Liddle, A. R., Lyth, D. H., Stewart, E. D., and Wands, D., *False vacuum inflation with einstein gravity*, Physical Review D **49** (1994) 6410.

[110] Copeland, E. J., Mizuno, S., and Shaeri, M., *Cosmological dynamics of a dirac-born-infeld field*, arXiv:1003.2881.

[111] Creminelli, P., Nicolis, A., Senatore, L., Tegmark, M., and Zaldarriaga, M., *Limits on non-Gaussianities from WMAP data*, JCAP **0605** (2006) 004, [astro-ph/0509029].

[112] Creminelli, P., Nicolis, A., and Zaldarriaga, M., *Perturbations in bouncing cosmologies : Dynamical attractor vs scale invariance*, Phys. Rev. **D71** (2005) 063505, [hep-th/0411270].

[113] Creminelli, P., and Senatore, L., *A smooth bouncing cosmology with scale invariant spectrum*, JCAP **0711** (2007) 010, [hep-th/0702165].

[114] Creminelli, P., and Zaldarriaga, M., *Single field consistency relation for the 3-point function*, JCAP **0410** (2004) 006, [astro-ph/0407059].

[115] Curto, A., et al., *WMAP 5-year constraints on fnl with wavelets*, Mon. Not. Roy. Astron. Soc. **393** (2009) 615–622, [arXiv:0807.0231].

[116] Curto, A., Martinez-Gonzalez, E., and Barreiro, R. B., *Improved constraints on primordial non-Gaussianity for the Wilkinson Microwave Anisotropy Probe 5-yr data*, Astrophys. J. **706** (2009) 399–403, [arXiv:0902.1523].

[117] Dalal, N., Dore, O., Huterer, D., and Shirokov, A., *The imprints of primordial non-gaussianities on large- scale structure : scale dependent bias and abundance of virialized objects*, Phys. Rev. **D77** (2008) 123514, [arXiv:0710.4560].

[118] Danielsson, U. H., *A note on inflation and transplanckian physics*, Phys. Rev. **D66** (2002) 023511, [hep-th/0203198].

[119] Deruelle, N., and Mukhanov, V. F., *On matching conditions for cosmological perturbations*, Phys. Rev. **D52** (1995) 5549–5555, [gr-qc/9503050].

[120] Desjacques, V., and Seljak, U., *Signature of primordial non-Gaussianity of ϕ^3-type in the mass function and bias of dark matter haloes*, arXiv:0907.2257.

[121] Desjacques, V., and Seljak, U., *Primordial non-Gaussianity from the large scale structure*, arXiv:1003.5020.

[122] DeWolfe, O., and Giddings, S. B., *Scales and hierarchies in warped compactifications and brane worlds*, Phys. Rev. **D67** (2003) 066008, [hep-th/0208123].

[123] DeWolfe, O., McAllister, L., Shiu, G., and Underwood, B., *D3-brane Vacua in Stabilized Compactifications*, JHEP **09** (2007) 121, [hep-th/0703088].

[124] Di Marco, F., Finelli, F., and Brandenberger, R., *Adiabatic and Isocurvature Perturbations for Multifield Generalized Einstein Models*, Phys. Rev. **D67** (2003) 063512, [astro-ph/0211276].

[125] Dimastrogiovanni, E., Bartolo, N., Matarrese, S., and Riotto, A., *Non-Gaussianity and statistical anisotropy from vector field populated inflationary models*, arXiv:1001.4049.

[126] Dimopoulos, K., Karciauskas, M., Lyth, D. H., and Rodriguez, Y., *Statistical anisotropy of the curvature perturbation from vector field perturbations*, JCAP **0905** (2009) 013, [arXiv:0809.1055].

[127] Dodelson, S., *Modern Cosmology*. Academic Press, 1 ed., March, 2003.

[128] Dolgov, A. D., and Kirilova, D. P., *Production of particles by a variable scalar field*, Sov. J. Nucl. Phys. **51** (1990) 172–177.

[129] Dolgov, A. D., and Linde, A. D., *Baryon Asymmetry in Inflationary Universe*, Phys. Lett. **B116** (1982) 329.

[130] Durrer, R., *The cosmic microwave backgrond*, PoS **CARGESE2007** (2007) 006.

[131] Dutta, B., Leblond, L., and Kumar, J., *Tachyon Mediated Non-Gaussianity*, Phys. Rev. **D78** (2008) 083522, [arXiv:0805.1229].

[132] Dvali, G., Gruzinov, A., and Zaldarriaga, M., *A new mechanism for generating density perturbations from inflation*, Phys. Rev. **D69** (2004) 023505, [astro-ph/0303591].

[133] Dvali, G. R., and Tye, S. H. H., *Brane inflation*, Phys. Lett. **B450** (1999) 72–82, [hep-ph/9812483].

[134] Easson, D., Gregory, R., Tasinato, G., and Zavala, I., *Cycling in the throat*, JHEP **04** (2007) 026, [hep-th/0701252].

[135] Easson, D. A., Gregory, R., Mota, D. F., Tasinato, G., and Zavala, I., *Spinflation*, JCAP **0802** (2008) 010, [arXiv:0709.2666].

[136] Easson, D. A., Mukohyama, S., and Powell, B. A., *Observational signatures of gravitational couplings in dbi inflation*, arXiv:0910.1353.

[137] Ellis, G. F. R., and Bruni, M., *covariant and gauge invariant approach to cosmological density fluctuations*, Phys. Rev. **D40** (1989) 1804–1818.

[138] Ellis, J. R., Hagelin, J. S., Nanopoulos, D. V., Olive, K. A., and Srednicki, M., *Supersymmetric relics from the big bang*, Nucl. Phys. **B238** (1984) 453–476.

[139] Enqvist, K., Hogdahl, J., Nurmi, S., and Vernizzi, F., *Covariant generalization of cosmological perturbation theory*, Phys. Rev. **D75** (2007) 023515, [gr-qc/0611020].

[140] Erickson, J. K., Gratton, S., Steinhardt, P. J., and Turok, N., *Cosmic Perturbations Through the Cyclic Ages*, Phys. Rev. **D75** (2007) 123507, [hep-th/0607164].

[141] Felder, G. N., et al., *Dynamics of symmetry breaking and tachyonic preheating*, Phys. Rev. Lett. **87** (2001) 011601, [hep-ph/0012142].

[142] Felder, G. N., and Tkachev, I., *LATTICEEASY : A program for lattice simulations of scalar fields in an expanding universe*, Comput. Phys. Commun. **178** (2008) [hep-ph/0011159].

[143] Fergusson, J. R., Liguori, M., and Shellard, E. P. S., *General CMB and Primordial Bispectrum Estimation I : Mode Expansion, Map-Making and Measures of f_{NL}*, arXiv:0912.5516.

[144] Fergusson, J. R., and Shellard, E. P. S., *Primordial non-Gaussianity and the CMB bispectrum*, Phys. Rev. **D76** (2007) 083523, [astro-ph/0612713].

[145] Fergusson, J. R., and Shellard, E. P. S., *The shape of primordial non-Gaussianity and the CMB bispectrum*, Phys. Rev. **D80** (2009) 043510, [arXiv:0812.3413].

[146] Finelli, F., and Khlebnikov, S., *Large metric perturbations from rescattering*, Phys. Lett. **B504** (2001) 309–313, [hep-ph/0009093].

[147] Finelli, F., and Khlebnikov, S., *Metric perturbations at reheating : The use of spherical symmetry*, Phys. Rev. **D65** (2002) 043505, [hep-ph/0107143].

[148] Flauger, R., McAllister, L., Pajer, E., Westphal, A., and Xu, G., *Oscillations in the CMB from Axion Monodromy Inflation*, arXiv:0907.2916.

[149] Flauger, R., and Pajer, E., *Resonant Non-Gaussianity*, arXiv:1002.0833.

[150] Frieman, J. A., and Gaztanaga, E., *The Projected Three-point Correlation Function : Theory and Observations*, Astrophys. J. **521** (1999) L83, [astro-ph/9903423].

[151] Gangui, A., Lucchin, F., Matarrese, S., and Mollerach, S., *The Three point correlation function of the cosmic microwave background in inflationary models*, Astrophys. J. **430** (1994) 447–457, [astro-ph/9312033].

[152] Gangui, A., and Martin, J., *Best unbiased estimators for the three-point correlators of the cosmic microwave background radiation*, Phys. Rev. D **62** (Oct, 2000) 103004.

[153] Gao, X., *Primordial Non-Gaussianities of General Multiple Field Inflation*, JCAP **0806** (2008) 029, [arXiv:0804.1055].

[154] Gao, X., *Note on Cross-correlations between Curvature and Isocurvature Perturbations during Inflation*, arXiv:0908.4035.

[155] Gao, X., and Hu, B., *Primordial Trispectrum from Entropy Perturbations in Multi-field DBI Model*, arXiv:0903.1920.

[156] Gao, X., Li, M., and Lin, C., *Primordial Non-Gaussianities from the Trispectra in Multiple Field Inflationary Models*, arXiv:0906.1345.

[157] Gao, X., and Xu, F., *Loop Corrections to Cosmological Perturbations in Multi- field Inflationary Models : I. Entropy Loops*, arXiv:0905.0405.

[158] Garcia-Bellido, J., and Wands, D., *Metric perturbations in two-field inflation*, Phys. Rev. **D53** (1996) 5437–5445, [astro-ph/9511029].

[159] Garriga, J., and Mukhanov, V. F., *Perturbations in k-inflation*, Phys. Lett. **B458** (1999) 219–225, [hep-th/9904176].

[160] Gauntlett, J. P., Martelli, D., Sparks, J., and Waldram, D., *Sasaki-einstein metrics on $s\hat{2}$ x $s\hat{3}$*, Advances in Theoretical and Mathematical Physics **8** (2004) 711.

[161] Giddings, S. B., Kachru, S., and Polchinski, J., *Hierarchies from fluxes in string compactifications*, Phys. Rev. **D66** (2002) 106006, [hep-th/0105097].

[162] Gordon, C., Wands, D., Bassett, B. A., and Maartens, R., *Adiabatic and entropy perturbations from inflation*, Phys. Rev. **D63** (2001) 023506, [astro-ph/0009131].

[163] Gott, III, J. R., et al., *TOPOLOGY OF MICROWAVE BACKGROUND FLUCTUATIONS : THEORY*, . PUPT-1136.

[164] Grasso, D., and Rubinstein, H. R., *Magnetic fields in the early universe*, Phys. Rept. **348** (2001) 163–266, [astro-ph/0009061].

[165] Green, A. M., and Malik, K. A., *Primordial black hole production due to preheating*, Phys. Rev. **D64** (2001) 021301, [hep-ph/0008113].

[166] Green, M. B., Schwarz, J. H., and Witten, E., *SUPERSTRING THEORY. VOL. 1 : INTRODUCTION*, . Cambridge, Uk : Univ. Pr. (1987) 469 P. (Cambridge Monographs On Mathematical Physics).

[167] Green, M. B., Schwarz, J. H., and Witten, E., *SUPERSTRING THEORY. VOL. 2 : LOOP AMPLITUDES, ANOMALIES AND PHENOMENOLOGY*, . Cambridge, Uk : Univ. Pr. (1987) 596 P. (Cambridge Monographs On Mathematical Physics).

[168] Greene, B., Schalm, K., van der Schaar, J. P., and Shiu, G., *Extracting new physics from the CMB*, astro-ph/0503458.

[169] Groot Nibbelink, S., and van Tent, B. J. W., *Density perturbations arising from multiple field slow- roll inflation*, hep-ph/0011325.

[170] Groot Nibbelink, S., and van Tent, B. J. W., *Scalar perturbations during multiple field slow-roll inflation*, Class. Quant. Grav. **19** (2002) 613–640, [hep-ph/0107272].

[171] Gruzinov, A., *Consistency relation for single scalar inflation*, Phys. Rev. **D71** (2005) 027301, [astro-ph/0406129].

[172] Gupta, S., Berera, A., Heavens, A. F., and Matarrese, S., *Non-gaussian signatures in the cosmic background radiation from warm inflation*, Phys. Rev. D **66** (Aug, 2002) 043510.

[173] Guth, A. H., *The Inflationary Universe : A Possible Solution to the Horizon and Flatness Problems*, Phys. Rev. **D23** (1981) 347–356.

[174] Guth, A. H., and Pi, S. Y., *Fluctuations in the New Inflationary Universe*, Phys. Rev. Lett. **49** (1982) 1110–1113.

[175] Hailu, G., and Tye, S. H. H., *Structures in the Gauge/Gravity Duality Cascade*, JHEP **08** (2007) 009, [hep-th/0611353].

[176] Hamann, J., Covi, L., Melchiorri, A., and Slosar, A., *New constraints on oscillations in the primordial spectrum of inflationary perturbations*, astro-ph/0701380v1.

[177] Hannestad, S., Haugboelle, T., Jarnhus, P. R., and Sloth, M. S., *Non-Gaussianity from Axion Monodromy Inflation*, arXiv:0912.3527.

[178] Hawking, S. W., *Perturbations of an expanding universe*, Astrophys. J. **145** (1966) 544–554.

[179] Hawking, S. W., *The Development of Irregularities in a Single Bubble Inflationary Universe*, Phys. Lett. **B115** (1982) 295.

[180] Heavens, A. F., *Estimating non-gaussianity in the microwave background*, astro-ph/9804222.

[181] Henry Tye, S. H., *Brane inflation : String theory viewed from the cosmos*, Lect. Notes Phys. **737** (2008) 949–974, [hep-th/0610221].

[182] Herzog, C. P., Klebanov, I. R., and Ouyang, P., *Remarks on the warped deformed conifold*, hep-th/0108101.

[183] Hikage, C., et al., *Limits on Primordial Non-Gaussianity from Minkowski Functionals of the WMAP Temperature Anisotropies*, Mon. Not. Roy. Astron. Soc. **389** (2008) 1439–1446, [arXiv:0802.3677].

[184] Hikage, C., et al., *The Effect of Primordial Non–Gaussianity on the Topology of Large-Scale Structure*, Mon. Not. Roy. Astron. Soc. **385** (2008) 1513, [arXiv:0711.3603].

[185] Hikage, C., Komatsu, E., and Matsubara, T., *Primordial Non-Gaussianity and Analytical Formula for Minkowski Functionals of the Cosmic Microwave Background and Large-scale Structure*, Astrophys. J. **653** (2006) 11–26, [astro-ph/0607284].

[186] Hikage, C., Koyama, K., Matsubara, T., Takahashi, T., and Yamaguchi, M., *Limits on Isocurvature Perturbations from Non-Gaussianity in WMAP Temperature Anisotropy*, arXiv:0812.3500.

[187] Hindmarsh, M., Ringeval, C., and Suyama, T., *The CMB temperature trispectrum of cosmic strings*, arXiv:0911.1241.

[188] Holman, R., and Tolley, A. J., *Enhanced Non-Gaussianity from Excited Initial States*, JCAP **0805** (2008) 001, [arXiv:0710.1302].

[189] Huang, M.-x., Shiu, G., and Underwood, B., *Multifield DBI Inflation and Non-Gaussianities*, Phys. Rev. **D77** (2008) 023511, [arXiv:0709.3299].

[190] Huston, I., Lidsey, J. E., Thomas, S., and Ward, J., *Gravitational wave constraints on multi-brane inflation*, arXiv:0802.0398.

[191] Ivezic, Z., et al., *LSST : from Science Drivers to Reference Design and Anticipated Data Products*, arXiv:0805.2366.

[192] Jeong, D., and Komatsu, E., *Primordial non-Gaussianity, scale-dependent bias, and the bispectrum of galaxies*, arXiv:0904.0497.

[193] Jeong, E., and Smoot, G. F., *Probing Non-Gaussianity In The Cosmic Microwave Background Anisotropies : One Point Distribution Function*, arXiv:0710.2371.

[194] Jordan, R. D., *Effective Field Equations for Expectation Values*, Phys. Rev. **D33** (1986) 444–454.

[195] Joy, M., Sahni, V., and Starobinsky, A. A., *New universal local feature in the inflationary perturbation spectrum*, arXiv:0711.1585.

[196] Kachru, S., et al., *Towards inflation in string theory*, JCAP **0310** (2003) 013, [hep-th/0308055].

[197] Kachru, S., Kallosh, R., Linde, A. D., and Trivedi, S. P., *De Sitter vacua in string theory*, Phys. Rev. **D68** (2003) 046005, [hep-th/0301240].

[198] Kaiser, N., *On the spatial correlations of abell clusters*, Astrophys. J. Lett. , 284 :L9–L12 (1984).

[199] Kallosh, R., *On Inflation in String Theory*, Lect. Notes Phys. **738** (2008) 119–156, [hep-th/0702059].

[200] Kawakami, E., Kawasaki, M., Nakayama, K., and Takahashi, F., *Non-Gaussianity from Isocurvature Perturbations : Analysis of Trispectrum*, arXiv:0905.1552.

[201] Kawasaki, M., and Moroi, T., *Gravitino production in the inflationary universe and the effects on big bang nucleosynthesis*, Prog. Theor. Phys. **93** (1995) 879–900, [hep-ph/9403364].

[202] Kawasaki, M., Nakayama, K., Sekiguchi, T., Suyama, T., and Takahashi, F., *Non-Gaussianity from isocurvature perturbations*, JCAP **0811** (2008) 019, [arXiv:0808.0009].

[203] Kecskemeti, S., Maiden, J., Shiu, G., and Underwood, B., *DBI inflation in the tip region of a warped throat*, JHEP **09** (2006) 076, [hep-th/0605189].

[204] Kehagias, A., and Kiritsis, E., *Mirage cosmology*, JHEP **11** (1999) 022, [hep-th/9910174].

[205] Keldysh, L. V., *Diagram technique for nonequilibrium processes*, Zh. Eksp. Teor. Fiz. **47** (1964) 1515–1527.

[206] Khoury, J., Ovrut, B. A., Steinhardt, P. J., and Turok, N., *A brief comment on 'The pyrotechnic universe'*, hep-th/0105212.

[207] Khoury, J., Ovrut, B. A., Steinhardt, P. J., and Turok, N., *The ekpyrotic universe : Colliding branes and the origin of the hot big bang*, Phys. Rev. **D64** (2001) 123522, [hep-th/0103239].

[208] Khoury, J., and Piazza, F., *Rapidly-Varying Speed of Sound, Scale Invariance and Non- Gaussian Signatures*, arXiv:0811.3633.

[209] Khoury, J., and Steinhardt, P. J., *Adiabatic Ekpyrosis : Scale-Invariant Curvature Perturbations from a Single Scalar Field in a Contracting Universe*, Phys. Rev. Lett. **104** (2010) 091301, [arXiv:0910.2230].

[210] Kiritsis, E., *String theory in a nutshell*, . Princeton, USA : Univ. Pr. (2007) 588 p.

[211] Klebanov, I. R., and Strassler, M. J., *Supergravity and a confining gauge theory : Duality cascades and chiSB-resolution of naked singularities*, JHEP **08** (2000) 052, [hep-th/0007191].

[212] Klebanov, I. R., and Tseytlin, A. A., *Gravity Duals of Supersymmetric SU(N) x SU(N+M) Gauge Theories*, Nucl. Phys. **B578** (2000) 123–138, [hep-th/0002159].

[213] Kobayashi, T., Mukohyama, S., and Kinoshita, S., *Constraints on Wrapped DBI Inflation in a Warped Throat*, JCAP **0801** (2008) 028, [arXiv:0708.4285].

[214] Kodama, H., and Sasaki, M., *Cosmological Perturbation Theory*, Prog. Theor. Phys. Suppl. **78** (1984) 1–166.

[215] Kofman, L., *Probing string theory with modulated cosmological fluctuations*, astro-ph/0303614.

[216] Kofman, L., Linde, A. D., and Starobinsky, A. A., *Reheating after inflation*, Phys. Rev. Lett. **73** (1994) 3195–3198, [hep-th/9405187].

[217] Kofman, L., and Yi, P., *Reheating the universe after string theory inflation*, Phys. Rev. **D72** (2005) 106001, [hep-th/0507257].

[218] Kogo, N., and Komatsu, E., *Angular Trispectrum of CMB Temperature Anisotropy from Primordial Non-Gaussianity with the Full Radiation Transfer Function*, Phys. Rev. **D73** (2006) 083007, [astro-ph/0602099].

[219] Komatsu, E., *The Pursuit of Non-Gaussian Fluctuations in the Cosmic Microwave Background*, astro-ph/0206039.

[220] Komatsu, E., *Hunting for Primordial Non-Gaussianity in the Cosmic Microwave Background*, arXiv:1003.6097.

[221] Komatsu, E., Dunkley, J., Nolta, M. R., Bennett, C. L., Gold, B., Hinshaw, G., Jarosik, N., Larson, D., Limon, M., Page, L., Spergel, D. N., Halpern, M., Hill, R. S., Kogut, A., Meyer, S. S., Tucker, G. S., Weiland, J. L., Wollack, E., and Wright, E. L., *Five-year wilkinson microwave anisotropy probe (wmap) observations : Cosmological interpretation*, Astrophys.J.Suppl. **180** (2009) 330–376, [arXiv:0803.0547].

[222] Komatsu, E., et al., *Seven-Year Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP) Observations : Cosmological Interpretation*, arXiv:1001.4538.

[223] Komatsu, E., Spergel, D. N., and Wandelt, B. D., *Measuring primordial non-Gaussianity in the cosmic microwave background*, Astrophys. J. **634** (2005) 14–19, [astro-ph/0305189].

[224] **Supernova Cosmology Project** Collaboration, Kowalski, M., et al., *Improved Cosmological Constraints from New, Old and Combined Supernova Datasets*, Astrophys. J. **686** (2008) 749–778, [arXiv:0804.4142].

[225] Koyama, K., *Non-Gaussianity of quantum fields during inflation*, arXiv:1002.0600.

[226] Koyama, K., Mizuno, S., Vernizzi, F., and Wands, D., *Non-Gaussianities from ekpyrotic collapse with multiple fields*, JCAP **0711** (2007) 024, [arXiv:0708.4321].

[227] Koyama, K., Mizuno, S., and Wands, D., *Curvature perturbations from ekpyrotic collapse with multiple fields*, Class. Quant. Grav. **24** (2007) 3919–3932, [arXiv:0704.1152].

[228] Koyama, K., and Wands, D., *Ekpyrotic collapse with multiple fields*, JCAP **0704** (2007) 008, [hep-th/0703040].

[229] Kronberg, P. P., *Extragalactic magnetic fields*, Rept. Prog. Phys. **57** (1994) 325–382.

[230] Lalak, Z., Langlois, D., Pokorski, S., and Turzynski, K., *Curvature and isocurvature perturbations in two-field inflation*, JCAP **0707** (2007) 014, [arXiv:0704.0212].

[231] Langlois, D., *Hamiltonian formalism and gauge invariance for linear perturbations in inflation*, Class. Quant. Grav. **11** (1994) 389–407.

[232] Langlois, D., *Correlated adiabatic and isocurvature perturbations from double inflation*, Phys. Rev. **D59** (1999) 123512, [astro-ph/9906080].

[233] Langlois, D., *Brane cosmology : An introduction*, Prog. Theor. Phys. Suppl. **148** (2003) 181–212, [hep-th/0209261].

[234] Langlois, D., *Inflation, quantum fluctuations and cosmological perturbations*, hep-th/0405053.

[235] Langlois, D., and Renaux-Petel, S., *Perturbations in generalized multi-field inflation*, JCAP **0804** (2008) 017, [arXiv:0801.1085].

[236] Langlois, D., Renaux-Petel, S., and Steer, D. A., *Multi-field DBI inflation : introducing bulk forms and revisiting the gravitational wave constraints*, JCAP **0904** (2009) 021, [arXiv:0902.2941].

[237] Langlois, D., Renaux-Petel, S., Steer, D. A., and Tanaka, T., *Primordial fluctuations and non-Gaussianities in multi- field DBI inflation*, Phys. Rev. Lett. **101** (2008) 061301, [arXiv:0804.3139].

[238] Langlois, D., Renaux-Petel, S., Steer, D. A., and Tanaka, T., *Primordial perturbations and non-Gaussianities in DBI and general multi-field inflation*, Phys. Rev. **D78** (2008) 063523, [arXiv:0806.0336].

[239] Langlois, D., and Riazuelo, A., *Correlated mixtures of adiabatic and isocurvature cosmological perturbations*, Physical Review D **62** (2000) 043504.

[240] Langlois, D., and Vernizzi, F., *Conserved non-linear quantities in cosmology*, Phys. Rev. **D72** (2005) 103501, [astro-ph/0509078].

[241] Langlois, D., and Vernizzi, F., *Evolution of non-linear cosmological perturbations*, Phys. Rev. Lett. **95** (2005) 091303, [astro-ph/0503416].

[242] Langlois, D., and Vernizzi, F., *Nonlinear perturbations for dissipative and interacting relativistic fluids*, JCAP **0602** (2006) 014, [astro-ph/0601271].

[243] Langlois, D., and Vernizzi, F., *Nonlinear perturbations of cosmological scalar fields*, JCAP **0702** (2007) 017, [astro-ph/0610064].

[244] Langlois, D., and Vernizzi, F., *A geometrical approach to nonlinear perturbations in relativistic cosmology*, arXiv:1003.3270.

[245] Langlois, D., Vernizzi, F., and Wands, D., *Non-linear isocurvature perturbations and non- Gaussianities*, JCAP **0812** (2008) 004, [arXiv:0809.4646].

[246] Leach, S. M., and Liddle, A. R., *Constraining slow-roll inflation with WMAP and 2dF*, Phys. Rev. **D68** (2003) 123508, [astro-ph/0306305].

[247] Leach, S. M., and Liddle, A. R., *Microwave background constraints on inflationary parameters*, Mon. Not. Roy. Astron. Soc. **341** (2003) 1151, [astro-ph/0207213].

[248] Leblond, L., and Shandera, S., *Cosmology of the tachyon in brane inflation*, JCAP **0701** (2007) 009, [hep-th/0610321].

[249] Lee, H.-C., Sasaki, M., Stewart, E. D., Tanaka, T., and Yokoyama, S., *A new delta N formalism for multi-component inflation*, JCAP **0510** (2005) 004, [astro-ph/0506262].

[250] Lehners, J.-L., *Ekpyrotic and Cyclic Cosmology*, Phys. Rept. **465** (2008) 223–263, [arXiv:0806.1245].

[251] Lehners, J.-L., *Ekpyrotic Non-Gaussianity – A Review*, arXiv:1001.3125.

[252] Lehners, J.-L., McFadden, P., Turok, N., and Steinhardt, P. J., *Generating ekpyrotic curvature perturbations before the big bang*, Phys. Rev. **D76** (2007) 103501, [hep-th/0702153].

[253] Lehners, J.-L., and Renaux-Petel, S., *Multifield Cosmological Perturbations at Third Order and the Ekpyrotic Trispectrum*, Phys. Rev. **D80** (2009) 063503, [arXiv:0906.0530].

[254] Lehners, J.-L., and Steinhardt, P. J., *Intuitive understanding of non-gaussianity in ekpyrotic and cyclic models*, Phys. Rev. **D78** (2008) 023506, [arXiv:0804.1293].

[255] Lehners, J.-L., and Steinhardt, P. J., *Non-Gaussian Density Fluctuations from Entropically Generated Curvature Perturbations in Ekpyrotic Models*, Phys. Rev. **D77** (2008) 063533, [arXiv:0712.3779].

[256] Lehners, J.-L., and Steinhardt, P. J., *Non-Gaussianity Generated by the Entropic Mechanism in Bouncing Cosmologies Made Simple*, Phys. Rev. **D80** (2009) 103520, [arXiv:0909.2558].

[257] Leigh, R. G., *Dirac-Born-Infeld Action from Dirichlet Sigma Model*, Mod. Phys. Lett. **A4** (1989) 2767.

[258] Lesgourgues, J., *Features in the primordial power spectrum of double d-term inflation*, Nuclear Physics B **582** (2000) 593.

[259] Lesgourgues, J., Starobinsky, A. A., and Valkenburg, W., *What do WMAP and SDSS really tell about inflation ?*, JCAP **0801** (2008) 010, [arXiv:0710.1630].

[260] Lewis, A., Challinor, A., and Lasenby, A., *Efficient Computation of CMB anisotropies in closed FRW models*, Astrophys. J. **538** (2000) 473–476, [astro-ph/9911177].

[261] Li, M., Lin, C., Wang, T., and Wang, Y., *Non-Gaussianity, Isocurvature Perturbation, Gravitational Waves and a No-Go Theorem for Isocurvaton*, Phys. Rev. **D79** (2009) 063526, [arXiv:0805.1299].

[262] Li, M., and Wang, Y., *Consistency Relations for Non-Gaussianity*, JCAP **0809** (2008) 018, [arXiv:0807.3058].

[263] Li, S., Cai, Y.-F., and Piao, Y.-S., *DBI-Curvaton*, Phys. Lett. **B671** (2009) 423–427, [arXiv:0806.2363].

[264] Liddle, A. R., and Lyth, D. H., *Cosmological inflation and large-scale structure*, . ISBN-13-9780521828499.

[265] Lidsey, J. E., and Huston, I., *Gravitational wave constraints on Dirac-Born-Infeld inflation*, JCAP **0707** (2007) 002, [arXiv:0705.0240].

[266] Lidsey, J. E., and Seery, D., *Primordial Non-Gaussianity and Gravitational Waves : Observational Tests of Brane Inflation in String Theory*, Phys. Rev. **D75** (2007) 043505, [astro-ph/0610398].

[267] Liguori, M., Sefusatti, E., Fergusson, J. R., and Shellard, E. P. S., *Primordial non-Gaussianity and Bispectrum Measurements in the Cosmic Microwave Background and Large-Scale Structure*, arXiv:1001.4707.

[268] Linde, A., *Hybrid inflation*, Phys. Rev. D **49** (Jan, 1994) 748–754.

[269] Linde, A., *Particle physics and inflationary cosmology*, CONTEMP.CONCEPTS PHYS. **5** (2005) 1.

[270] Linde, A. D., *A New Inflationary Universe Scenario : A Possible Solution of the Horizon, Flatness, Homogeneity, Isotropy and Primordial Monopole Problems*, Phys. Lett. **B108** (1982) 389–393.

[271] Linde, A. D., and Mukhanov, V. F., *Nongaussian isocurvature perturbations from inflation*, Phys. Rev. **D56** (1997) 535–539, [astro-ph/9610219].

[272] Lorenz, L., Martin, J., and Ringeval, C., *K-inflationary Power Spectra in the Uniform Approximation*, Phys. Rev. **D78** (2008) 083513, [arXiv:0807.3037].

[273] LoVerde, M., Miller, A., Shandera, S., and Verde, L., *Effects of Scale-Dependent Non-Gaussianity on Cosmological Structures*, JCAP **0804** (2008) 014, [arXiv:0711.4126].

[274] Luo, X.-c., *The Angular bispectrum of the cosmic microwave background*, Astrophys. J. **427** (1994) L 71, [astro-ph/9312004].

[275] Lyth, D. H., *What would we learn by detecting a gravitational wave signal in the cosmic microwave background anisotropy ?*, Physical Review Letters **78** (1997) 1861.

[276] Lyth, D. H., *The primordial curvature perturbation in the ekpyrotic universe*, Phys. Lett. **B524** (2002) 1–4, [hep-ph/0106153].

[277] Lyth, D. H., *Generating the curvature perturbation at the end of inflation*, JCAP **0511** (2005) 006, [astro-ph/0510443].

[278] Lyth, D. H., Malik, K. A., and Sasaki, M., *A general proof of the conservation of the curvature perturbation*, JCAP **0505** (2005) 004, [astro-ph/0411220].

[279] Lyth, D. H., and Riotto, A., *Particle physics models of inflation and the cosmological density perturbation*, 1998.

[280] Lyth, D. H., and Riotto, A., *Generating the curvature perturbation at the end of inflation in string theory*, Phys. Rev. Lett. **97** (2006) 121301, [astro-ph/0607326].

[281] Lyth, D. H., and Rodriguez, Y., *The inflationary prediction for primordial non-gaussianity*, Phys. Rev. Lett. **95** (2005) 121302, [astro-ph/0504045].

[282] Lyth, D. H., Ungarelli, C., and Wands, D., *The primordial density perturbation in the curvaton scenario*, Phys. Rev. **D67** (2003) 023503, [astro-ph/0208055].

[283] Lyth, D. H., and Wands, D., *Generating the curvature perturbation without an inflaton*, Phys. Lett. **B524** (2002) 5–14, [hep-ph/0110002].

[284] Lyth, D. H., and Wands, D., *Conserved cosmological perturbations*, Phys. Rev. **D68** (2003) 103515, [astro-ph/0306498].

[285] Maldacena, J. M., *The large N limit of superconformal field theories and supergravity*, Adv. Theor. Math. Phys. **2** (1998) 231–252, [hep-th/9711200].

[286] Maldacena, J. M., *Non-Gaussian features of primordial fluctuations in single field inflationary models*, JHEP **05** (2003) 013, [astro-ph/0210603].

[287] Maldacena, J. M., and Nunez, C., *Supergravity description of field theories on curved manifolds and a no go theorem*, Int. J. Mod. Phys. **A16** (2001) 822–855, [hep-th/0007018].

[288] Malik, K. A., and Lyth, D. H., *A numerical study of non-gaussianity in the curvaton scenario*, JCAP **0609** (2006) 008, [astro-ph/0604387].

[289] Malik, K. A., and Matravers, D. R., *A Concise Introduction to Perturbation Theory in Cosmology*, Class. Quant. Grav. **25** (2008) 193001, [arXiv:0804.3276].

[290] Malik, K. A., and Wands, D., *Evolution of second-order cosmological perturbations*, Class. Quant. Grav. **21** (2004) L65–L72, [astro-ph/0307055].

[291] Malik, K. A., and Wands, D., *Cosmological perturbations*, arXiv:0809.4944.

[292] Marinucci, D., et al., *Spherical Needlets for CMB Data Analysis*, arXiv:0707.0844.

[293] Martin, J., and Brandenberger, R. H., *The trans-Planckian problem of inflationary cosmology*, Phys. Rev. **D63** (2001) 123501, [hep-th/0005209].

[294] Martin, J., and Schwarz, D. J., *The influence of cosmological transitions on the evolution of density perturbations*, Phys. Rev. **D57** (1998) 3302–3316, [gr-qc/9704049].

[295] Martinez-Gonzalez, E., *Gaussianity*, arXiv:0805.4157.

[296] Martinez-Gonzalez, E., Gallegos, J. E., Argueso, F., Cayon, L., and Sanz, J. L., *The performance of spherical wavelets to detect non- Gaussianity in the CMB sky*, Mon. Not. Roy. Astron. Soc. **336** (2002) 22, [astro-ph/0111284].

[297] Matarrese, S., Mollerach, S., and Bruni, M., *Relativistic second-order perturbations of the einstein-de sitter universe*, Physical Review D **58** (1998) 043504.

[298] Matsubara, T., *Analytic Minkowski Functionals of the Cosmic Microwave Background : Second-order Non-Gaussianity with Bispectrum and Trispectrum*, arXiv:1001.2321.

[299] Mazumdar, A., and Rocher, J., *Particle physics models of inflation and curvaton scenarios*, 2010.

[300] McAllister, L., and Silverstein, E., *String Cosmology : A Review*, Gen. Rel. Grav. **40** (2008) 565–605, [arXiv:0710.2951].

[301] McAllister, L., Silverstein, E., and Westphal, A., *Gravity Waves and Linear Inflation from Axion Monodromy*, arXiv:0808.0706.

[302] McDonald, P., *Primordial non-Gaussianity : large-scale structure signature in the perturbative bias model*, Phys. Rev. **D78** (2008) 123519, [arXiv:0806.1061].

[303] McDonald, P., and Seljak, U., *How to measure redshift-space distortions without sample variance*, JCAP **0910** (2009) 007, [arXiv:0810.0323].

[304] Mecke, K. R., Buchert, T., and Wagner, H., *Robust Morphological Measures for Large-Scale Structure in the Universe*, Astron. Astrophys. **288** (1994) 697–704, [astro-ph/9312028].

[305] Meerburg, P. D., van der Schaar, J. P., and Corasaniti, P. S., *Signatures of Initial State Modifications on Bispectrum Statistics*, JCAP **0905** (2009) 018, [arXiv:0901.4044].

[306] Meerburg, P. D., van der Schaar, J. P., and Jackson, M. G., *Bispectrum signatures of a modified vacuum in single field inflation with a small speed of sound*, arXiv:0910.4986.

[307] Minasian, R., and Tsimpis, D., *On the geometry of non-trivially embedded branes*, Nucl. Phys. **B572** (2000) 499–513, [hep-th/9911042].

[308] Mizuno, S., Arroja, F., and Koyama, K., *On the full trispectrum in multi-field DBI inflation*, arXiv:0907.2439.

[309] Mizuno, S., Arroja, F., Koyama, K., and Tanaka, T., *Lorentz boost and non-Gaussianity in multi-field DBI- inflation*, arXiv:0905.4557.

[310] Mollerach, S., *Isocurvature baryon perturbations and inflation*, Phys. Rev. **D42** (1990) 313–325.

[311] Moroi, T., *Effects of the gravitino on the inflationary universe*, 1995.

[312] Moroi, T., *Effects of the gravitino on the inflationary universe*, hep-ph/9503210.

[313] Moss, I. G., and Xiong, C., *Non-gaussianity in fluctuations from warm inflation*, JCAP **0704** (2007) 007, [astro-ph/0701302].

[314] Mukhanov, V. F., *Quantum Theory of Gauge Invariant Cosmological Perturbations*, Sov. Phys. JETP **67** (1988) 1297–1302.

[315] Mukhanov, V. F., Feldman, H. A., and Brandenberger, R. H., *Theory of cosmological perturbations. Part 1. Classical perturbations. Part 2. Quantum theory of perturbations. Part 3. Extensions*, Phys. Rept. **215** (1992) 203–333.

[316] Mulryne, D. J., Seery, D., and Wesley, D., *Moment transport equations for non-Gaussianity*, arXiv:0909.2256.

[317] Munshi, D., and Heavens, A., *A New Approach to Probing Primordial Non-Gaussianity*, arXiv:0904.4478.

[318] Myers, R. C., *Dielectric-branes*, JHEP **9912** (1999) 022.

[319] Myers, R. C., *Nonabelian phenomena on d-branes*, Classical and Quantum Gravity **20** (2003) S347.

[320] Nakahara, M., *Geometry, topology and physics*, . Boca Raton, USA : Taylor and Francis (2003) 573 p.

[321] Nibbelink, S. G., and van Tent, B. J. W., *Scalar perturbations during multiple-field slow-roll inflation*, Classical and Quantum Gravity **19** (2002) 613.

[322] Nitta, D., Komatsu, E., Bartolo, N., Matarrese, S., and Riotto, A., *CMB anisotropies at second order III : bispectrum from products of the first-order perturbations*, JCAP **0905** (2009) 014, [arXiv:0903.0894].

[323] Ohta, K., and Yokono, T., *Deformation of conifold and intersecting branes*, JHEP **02** (2000) 023, [hep-th/9912266].

[324] Panda, S., Sami, M., and Tsujikawa, S., *Prospects of inflation in delicate D-brane cosmology*, Phys. Rev. **D76** (2007) 103512, [arXiv:0707.2848].

[325] Pandolfi, S., et al., *Harrison-Z'eldovich primordial spectrum is consistent with observations*, arXiv:1003.4763.

[326] Peiris, H., and Easther, R., *Recovering the Inflationary Potential and Primordial Power Spectrum With a Slow Roll Prior : Methodology and Application to WMAP 3 Year Data*, JCAP **0607** (2006) 002, [astro-ph/0603587].

[327] Peiris, H., and Easther, R., *Slow Roll Reconstruction : Constraints on Inflation from the 3 Year WMAP Dataset*, JCAP **0610** (2006) 017, [astro-ph/0609003].

[328] Peiris, H. V., Baumann, D., Friedman, B., and Cooray, A., *Phenomenology of D-Brane Inflation with General Speed of Sound*, Phys. Rev. **D76** (2007) 103517, [arXiv:0706.1240].

[329] Peiris, H. V., and Easther, R., *Primordial Black Holes, Eternal Inflation, and the Inflationary Parameter Space after WMAP5*, JCAP **0807** (2008) 024, [arXiv:0805.2154].

[330] Peskin, M. E., and Schroeder, D. V., *An Introduction to quantum field theory*, . Reading, USA : Addison-Wesley (1995) 842 p.

[331] Peter, P., and Uzan, J.-P., *Cosmologie primordiale*. Éditions Belin, 2005.

[332] Pietrobon, D., Cabella, P., Balbi, A., de Gasperis, G., and Vittorio, N., *Constraints on Primordial Non-Gaussianity from a Needlet Analysis of the WMAP-5 Data*, arXiv:0812.2478.

[333] Pietrobon, D., et al., *Needlet Bispectrum Asymmetries in the WMAP 5-year Data*, arXiv:0905.3702.

[334] Pitrou, C., Uzan, J.-P., and Bernardeau, F., *Cosmic microwave background bispectrum on small angular scales*, Phys. Rev. **D78** (2008) 063526, [arXiv:0807.0341].

[335] Pitrou, C., Uzan, J.-P., and Bernardeau, F., *The cosmic microwave background bispectrum from the non- linear evolution of the cosmological perturbations*, arXiv:1003.0481.

[336] Polchinski, J., *String theory. Vol. 1 : An introduction to the bosonic string*, . Cambridge, UK : Univ. Pr. (1998) 402 p.

[337] Polchinski, J., *String theory. Vol. 2 : Superstring theory and beyond*, . Cambridge, UK : Univ. Pr. (1998) 531 p.

[338] Press, W. H., Teukolsky, S. A., Vetterling, W. T., and Flannery, B. P., *Numerical Recipes in FORTRAN : The Art of Scientific Computing*. Cambridge University Press, Cambridge, England, Second Edition, 1992.

[339] Quevedo, F., *Lectures on string/brane cosmology*, Class. Quant. Grav. **19** (2002) 5721–5779, [hep-th/0210292].

[340] Randall, L., and Sundrum, R., *A large mass hierarchy from a small extra dimension*, Phys. Rev. Lett. **83** (1999) 3370–3373, [hep-ph/9905221].

[341] Randall, L., and Sundrum, R., *An alternative to compactification*, Phys. Rev. Lett. **83** (1999) 4690–4693, [hep-th/9906064].

[342] Refregier, A., et al., *Euclid Imaging Consortium Science Book*, arXiv:1001.0061.

[343] Regan, D. M., and Shellard, E. P. S., *Cosmic String Power Spectrum, Bispectrum and Trispectrum*, arXiv:0911.2491.

[344] Renaux-Petel, S., *Combined local and equilateral non-Gaussianities from multifield DBI inflation*, JCAP **0910** (2009) 012, [arXiv:0907.2476].

[345] Renaux-Petel, S., and Tasinato, G., *Nonlinear perturbations of cosmological scalar fields with non-standard kinetic terms*, JCAP **0901** (2009) 012, [arXiv:0810.2405].

[346] Rigopoulos, G. I., Shellard, E. P. S., and van Tent, B. J. W., *Large non-Gaussianity in multiple-field inflation*, Phys. Rev. **D73** (2006) 083522, [astro-ph/0506704].

[347] Rigopoulos, G. I., Shellard, E. P. S., and van Tent, B. J. W., *Non-linear perturbations in multiple-field inflation*, Phys. Rev. **D73** (2006) 083521, [astro-ph/0504508].

[348] Rotenberg, M., Bivins, R., Metropolis, N., and Wooten Jr., J., *The 3-j and 6-j Symbols*. The Technology Press, Massachusetts Institute of Technology, Massachusetts, 1959.

[349] Rudjord, O., et al., *CMB likelihood approximation by a Gaussianized Blackwell- Rao estimator*, Astrophys. J. **692** (2009) 1669–1677, [arXiv:0809.4624].

[350] Rudjord, O., et al., *Directional Variations of the Non-Gaussianity Parameter f_{NL}*, Astrophys. J. **708** (2010) 1321–1325, [arXiv:0906.3232].

[351] Salem, M. P., *On the generation of density perturbations at the end of inflation*, Phys. Rev. **D72** (2005) 123516, [astro-ph/0511146].

[352] Santos, M. G., et al., *Estimate of the Cosmological Bispectrum from the MAXIMA-1 Cosmic Microwave Background Map*, Phys. Rev. Lett. **88** (2002) 241302, [astro-ph/0107588].

[353] Sasaki, M., *Large Scale Quantum Fluctuations in the Inflationary Universe*, Prog. Theor. Phys. **76** (1986) 1036.

[354] Sasaki, M., *Multi-brid inflation and non-Gaussianity*, Prog. Theor. Phys. **120** (2008) 159–174, [arXiv:0805.0974].

[355] Sasaki, M., and Stewart, E. D., *A General analytic formula for the spectral index of the density perturbations produced during inflation*, Prog. Theor. Phys. **95** (1996) 71–78, [astro-ph/9507001].

[356] Sasaki, M., and Tanaka, T., *Super-horizon scale dynamics of multi-scalar inflation*, Prog. Theor. Phys. **99** (1998) 763–782, [gr-qc/9801017].

[357] Sasaki, M., Valiviita, J., and Wands, D., *Non-gaussianity of the primordial perturbation in the curvaton model*, Phys. Rev. **D74** (2006) 103003, [astro-ph/0607627].

[358] Schmalzing, J., and Buchert, T., *Beyond genus statistics : a unifying approach to the morphology of cosmic structure*, Astrophys. J. **482** (1997) L1–L4, [astro-ph/9702130].

[359] Schmalzing, J., and Gorski, K. M., *Minkowski Functionals used in the Morphological Analysis of Cosmic Microwave Background Anisotropy Maps*, astro-ph/9710185.

[360] Schwinger, J. S., *Brownian motion of a quantum oscillator*, J. Math. Phys. **2** (1961) 407–432.

[361] Scoccimarro, R., Feldman, H. A., Fry, J. N., and Frieman, J. A., *The Bispectrum of IRAS Galaxies*, Astrophys. J. **546** (2001) 652, [astro-ph/0004087].

[362] Seery, D., and Hidalgo, J. C., *Non-Gaussian corrections to the probability distribution of the curvature perturbation from inflation*, JCAP **0607** (2006) 008, [astro-ph/0604579].

[363] Seery, D., and Lidsey, J. E., *Primordial non-gaussianities from multiple-field inflation*, JCAP **0509** (2005) 011, [astro-ph/0506056].

[364] Seery, D., and Lidsey, J. E., *Primordial non-gaussianities in single field inflation*, JCAP **0506** (2005) 003, [astro-ph/0503692].

[365] Seery, D., and Lidsey, J. E., *Non-gaussianity from the inflationary trispectrum*, JCAP **0701** (2007) 008, [astro-ph/0611034].

[366] Seery, D., Lidsey, J. E., and Sloth, M. S., *The inflationary trispectrum*, JCAP **0701** (2007) 027, [astro-ph/0610210].

[367] Seery, D., Sloth, M. S., and Vernizzi, F., *Inflationary trispectrum from graviton exchange*, JCAP **0903** (2009) 018, [arXiv:0811.3934].

[368] Sefusatti, E., and Komatsu, E., *Bispectrum of galaxies from high-redshift galaxy surveys : Primordial non-gaussianity and nonlinear galaxy bias*, Phys. Rev. D **76** (Oct, 2007) 083004.

[369] Sefusatti, E., Liguori, M., Yadav, A. P. S., Jackson, M. G., and Pajer, E., *Constraining Running Non-Gaussianity*, arXiv:0906.0232.

[370] Seiberg, N., and Witten, E., *String theory and noncommutative geometry*, JHEP **09** (1999) 032, [hep-th/9908142].

[371] Seljak, U., and Zaldarriaga, M., *A Line of Sight Approach to Cosmic Microwave Background Anisotropies*, Astrophys. J. **469** (1996) 437–444, [astro-ph/9603033].

[372] Sen, A., *Tachyon matter*, JHEP **07** (2002) 065, [hep-th/0203265].

[373] Senatore, L., Smith, K. M., and Zaldarriaga, M., *Non-Gaussianities in Single Field Inflation and their Optimal Limits from the WMAP 5-year Data*, arXiv:0905.3746.

[374] Senatore, L., and Zaldarriaga, M., *A Naturally Large Four-Point Function in Single Field Inflation*, arXiv:1004.1201.

[375] Shandera, S. E., and Tye, S. H. H., *Observing brane inflation*, JCAP **0605** (2006) 007, [hep-th/0601099].

[376] Shiu, G., and Underwood, B., *Observing the Geometry of Warped Compactification via Cosmic Inflation*, Phys. Rev. Lett. **98** (2007) 051301, [hep-th/0610151].

[377] Shtanov, Y., Traschen, J. H., and Brandenberger, R. H., *Universe reheating after inflation*, Phys. Rev. **D51** (1995) 5438–5455, [hep-ph/9407247].

[378] Silverstein, E., and Tong, D., *Scalar Speed Limits and Cosmology : Acceleration from D- cceleration*, Phys. Rev. **D70** (2004) 103505, [hep-th/0310221].

[379] Silverstein, E., and Westphal, A., *Monodromy in the CMB : Gravity Waves and String Inflation*, Phys. Rev. **D78** (2008) 106003, [arXiv:0803.3085].

[380] Slosar, A., Hirata, C., Seljak, U., Ho, S., and Padmanabhan, N., *Constraints on local primordial non-Gaussianity from large scale structure*, JCAP **0808** (2008) 031, [arXiv:0805.3580].

[381] Smidt, J., et al., *A Measurement of Cubic-Order Primordial Non-Gaussianity (g_{NL} and τ_{NL}) With WMAP 5-Year Data*, arXiv:1001.5026.

[382] Smith, K. M., Senatore, L., and Zaldarriaga, M., *Optimal limits on f_{NL}^{local} from WMAP 5-year data*, JCAP **0909** (2009) 006, [arXiv:0901.2572].

[383] Smith, K. M., and Zaldarriaga, M., *Algorithms for bispectra : forecasting, optimal analysis, and simulation*, astro-ph/0612571.

[384] Smoot, G. F., *Nobel Lecture : Cosmic microwave background radiation anisotropies : Their discovery and utilization*, Rev. Mod. Phys. **79** (2007) 1349–1379.

[385] Smoot, G. F., et al., *Structure in the COBE differential microwave radiometer first year maps*, Astrophys. J. **396** (1992) L1–L5.

[386] Sopuerta, C. F., Bruni, M., and Gualtieri, L., *Non-Linear N-Parameter Spacetime Perturbations : Gauge Transformations through the Baker-Campbell-Hausdorff Formula*, Phys. Rev. **D70** (2004) 064002, [gr-qc/0306027].

[387] Spergel, D. N., and Goldberg, D. M., *Microwave background bispectrum. 1. Basic formalism*, Phys. Rev. **D59** (1999) 103001, [astro-ph/9811252].

[388] Starobinsky, A. A., *Dynamics of Phase Transition in the New Inflationary Universe Scenario and Generation of Perturbations*, Phys. Lett. **B117** (1982) 175–178.

[389] Starobinsky, A. A., *Multicomponent de Sitter (Inflationary) Stages and the Generation of Perturbations*, JETP Lett. **42** (1985) 152–155.

[390] Starobinsky, A. A., Tsujikawa, S., and Yokoyama, J., *Cosmological perturbations from multi-field inflation in generalized Einstein theories*, Nucl. Phys. **B610** (2001) 383–410, [astro-ph/0107555].

[391] Starobinsky, A. A., and Yokoyama, J., *Density fluctuations in brans-dicke inflation*, 1995.

[392] Steer, D. A., and Parry, M. F., *Brane cosmology, varying speed of light and inflation in models with one or more extra dimensions*, Int. J. Theor. Phys. **41** (2002) 2255–2286, [hep-th/0201121].

[393] Stewart, E. D., *Inflation, supergravity and superstrings*, Phys. Rev. **D51** (1995) 6847–6853, [hep-ph/9405389].

[394] Stewart, E. D., *Spectrum of density perturbations produced during inflation to leading order in a general slow-roll approximation*, Phys. Rev. D **65** (Apr, 2002) 103508.

[395] Strominger, A., and Vafa, C., *Microscopic Origin of the Bekenstein-Hawking Entropy*, Phys. Lett. **B379** (1996) 99–104, [hep-th/9601029].

[396] Sur, S., and Das, S., *Multiple kinetic k-essence, phantom barrier crossing and stability*, JCAP **0901** (2009) 007, [arXiv:0806.4368].

[397] Suyama, T., and Yamaguchi, M., *Non-gaussianity in the modulated reheating scenario*, Physical Review D **77** (2008) 023505.

[398] Tanaka, T., Suyama, T., and Yokoyama, S., *Use of delta N formalism*, arXiv:1003.5057.

[399] Taylor, A., and Watts, P., *Parameter information from nonlinear cosmological fields*, Mon. Not. Roy. Astron. Soc. **328** (2001) 1027, [astro-ph/0010014].

[400] Thomas, S., and Ward, J., *IR Inflation from Multiple Branes*, Phys. Rev. **D76** (2007) 023509, [hep-th/0702229].

[401] Tsagas, C. G., Challinor, A., and Maartens, R., *Relativistic cosmology and large-scale structure*, Phys. Rept. **465** (2008) 61–147, [arXiv:0705.4397].

[402] Tsujikawa, S., Parkinson, D., and Bassett, B. A., *Correlation-consistency cartography of the double inflation landscape*, Phys. Rev. **D67** (2003) 083516, [astro-ph/0210322].

[403] Tye, S. H. H., and Xu, J., *A Meandering Inflaton*, arXiv:0910.0849.

[404] van Tent, B. J. W., *Cosmological Inflation with Multiple Fields and the Theory of Density Fluctuations*, .

[405] van Tent, B. J. W., *Multiple-field inflation and the CMB*, Class. Quant. Grav. **21** (2004) 349–370, [astro-ph/0307048].

[406] van Tent, B. J. W., and Groot Nibbelink, S., *Inflationary perturbations with multiple scalar fields*, hep-ph/0111370.

[407] Vernizzi, F., and Wands, D., *Non-Gaussianities in two-field inflation*, JCAP **0605** (2006) 019, [astro-ph/0603799].

[408] Vielva, P., and Sanz, J. L., *Constraints on f_{nl} and g_{nl} from the analysis of the N-pdf of the CMB large scale anisotropies*, arXiv:0910.3196.

[409] Wald, R. M., *General Relativity.* Chicago University Press, 1984. Chicago, Usa : Univ. Pr. (1984) 491p.

[410] Wands, D., *Cosmological perturbations through the big bang*, arXiv:0809.4556.

[411] Wands, D., *Local non-Gaussianity from inflation*, arXiv:1004.0818.

[412] Wands, D., Bartolo, N., Matarrese, S., and Riotto, A., *An observational test of two-field inflation*, Phys. Rev. **D66** (2002) 043520, [astro-ph/0205253].

[413] Wands, D., Malik, K. A., Lyth, D. H., and Liddle, A. R., *A new approach to the evolution of cosmological perturbations on large scales*, Phys. Rev. **D62** (2000) 043527, [astro-ph/0003278].

[414] Ward, J., *Dbi n-flation*, arXiv:0711.0760.

[415] Weinberg, S., *The Quantum theory of fields. Vol. 1 : Foundations*, . Cambridge, UK : Univ. Pr. (1995) 609 p.

[416] Weinberg, S., *Gravitation and cosmology.* John Wiley and Sons, 1972.

[417] Weinberg, S., *Can non-adiabatic perturbations arise after single-field inflation ?*, Phys. Rev. **D70** (2004) 043541, [astro-ph/0401313].

[418] Weinberg, S., *Must cosmological perturbations remain non-adiabatic after multi-field inflation ?*, Phys. Rev. **D70** (2004) 083522, [astro-ph/0405397].

[419] Weinberg, S., *Quantum contributions to cosmological correlations*, Phys. Rev. **D72** (2005) 043514, [hep-th/0506236].

[420] Weinberg, S., *Effective field theory for inflation*, Phys. Rev. D **77** (Jun, 2008) 123541.

[421] White, S. D. M., and Rees, M. J., *Core condensation in heavy halos - a two-stage theory for galaxy formation and clustering*, Mon. Not. R. Astron. Soc. , 183 :341–358 (1978).

[422] Widrow, L. M., *Origin of Galactic and Extragalactic Magnetic Fields*, Rev. Mod. Phys. **74** (2002) 775–823, [astro-ph/0207240].

[423] Winitzki, S., and Kosowsky, A., *Minkowski Functional Description of Microwave Background Gaussianity*, New Astron. **3** (1998) 75, [astro-ph/9710164].

[424] Witten, E., *Anti-de Sitter space and holography*, Adv. Theor. Math. Phys. **2** (1998) 253–291, [hep-th/9802150].

[425] Wu, J. H. P., et al., *Tests for Gaussianity of the MAXIMA-1 CMB Map*, Phys. Rev. Lett. **87** (2001) 251303, [astro-ph/0104248].

[426] Xia, J.-Q., et al., *Primordial Non-Gaussianity and the NRAO VLA Sky Survey*, arXiv:1003.3451.

[427] Yadav, A. P. S., et al., *Fast Estimator of Primordial Non-Gaussianity from Temperature and Polarization Anisotropies in the Cosmic Microwave Background II : Partial Sky Coverage and Inhomogeneous Noise*, Astrophys. J. **678** (2008) 578, [arXiv:0711.4933].

[428] Yadav, A. P. S., Komatsu, E., and Wandelt, B. D., *Fast Estimator of Primordial Non-Gaussianity from Temperature and Polarization Anisotropies in the Cosmic Microwave Background*, Astrophys. J. **664** (2007) 680–686, [astro-ph/0701921].

[429] Yadav, A. P. S., and Wandelt, B. D., *Evidence of Primordial Non-Gaussianity* ($f_{\rm NL}$) *in the Wilkinson Microwave Anisotropy Probe 3-Year Data at 2.8*σ, Phys. Rev. Lett. **100** (2008) 181301, [arXiv:0712.1148].

[430] Zaldarriaga, M., *Non-Gaussianities in models with a varying inflaton decay rate*, Phys. Rev. **D69** (2004) 043508, [astro-ph/0306006].

[431] Zwiebach, B., *A first course in string theory*, . Cambridge, UK : Univ. Pr. (2004) 558 p.